# QS randomizzato

pr: quesi
indovinare esattamente

$\frac{1}{n!}$

ALGORITMO RANDOMIZZATO

- costo al caso medio
  si calcola usando come spazio di probabilità $\boxed{\text{tutte le possibili scelte randomiche dell'algoritmo}}$

- caso medio di alg. deterministico:
  spazio di probabilità $\boxed{\text{tutti i possibili input}}$

$$E[X] = \sum_{x \in \text{valori}} x \cdot Pr[X = x] \quad \text{media}$$

es. dado : valori $= \{1, 2, 3, 5, 6\}$

$$Pr[\text{esca } x] = \frac{1}{6} \quad \text{uniforme}$$

$$E[X] = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} \cdots + 6 \cdot \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1 + 2 + 3 \cdots + 6}{6} = \frac{7}{2}$$

$$E[aX + bY + c] = aE[X] + b[Y] + c$$

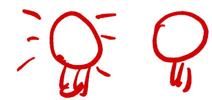
lineare

$X, Y$ non necessariamente indipendenti.

# VARIABILE INDICATRICE

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se evento } i \quad p \\ 0 & \text{altrimenti} \quad 1-p \end{cases}$$

LED ON/OFF



1) $E[X_i] = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p = Pr[X_i = 1]$

2) Non richiede che $X_i$ siano indipendenti

$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ conterà gli eventi di interesse

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = np$$

# Problema della cuffia

n negozi on-line → migliore cuffia

- si sceglie un ordine dei negozi, numerato da 1 a n
- comprate la cuffia nel negozio 1 : best
- **for** $i = 2, 3, \dots, n$:
  - compra cuffia nel negozio $i$
  - se tale cuffia è migliore di best, restituisci/vendi best, e best ← cuffia negozio $i$

⇒ Scopo: $\boxed{\text{MINIMIZZA CAMBIO BEST}}$

## Esempio

BEST

1 4 7 3 5 2 6

2 3 5 1 4 6 7

7 6 5 4 3 2 1

1 2 3 4 5 6 7

Caso migliore: non cambio mai $\boxed{0}$

caso peggiore cambio sempre $\boxed{n-1}$

Ordine random → numeriamo i
negozi da 1 a n
secondo questo ordine

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se nel negozio } i \text{ troviamo cuffia migliore di BEST} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$X = \sum_{i=2}^{n} X_i$$

indica quante volte
ho cambiato le
cuffie BEST

$$E[X] = \sum_{i=2}^{n} E[X_i] = \sum_{i=2}^{n} \Pr[X_i = 1] \quad (*)$$

$Pr[X_i = 1]$

$$\overbrace{1 \quad 3 \quad 2}^{<5} \quad \overset{i}{5} \quad 4 \quad 6 \quad 7$$

$X_i = 1$

$$A \quad \overset{1}{\boxed{\quad << \quad}}\overset{i}{\boxed{c}}\overset{n}{\boxed{\quad\quad\quad}}$$

$X_i = 1$ sse $A[i] > x$ $\forall x \in A[1..i-1]$

Spazio di probabilità sono le $n!$ permutazioni

$$Pr[X_i = 1] = \frac{\#\text{ permutazioni in cui l'i-esimo elemento è maggiore dei precedenti}}{n!} = \frac{(i-1)!}{i!}$$

$$= \frac{1}{i}$$

$$E[X]^{(*)} = \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} \sim \ln n - \text{costante}$$

serie armonica

Esercizio: random$(a, b)$ → restituisce un numero compreso tra $a$ e $b$ con $pr = \frac{1}{b-a+1}$ uniforme

scambia$(i, j)$

input $A[1..n]$

output: **for** $(i=1;\ i \leq n-1;\ i{+}{+})$ :

$$j = \text{random}(i, n)$$

$$\text{scambia}(i, j)$$

dim che genera tutte le $n!$ permutazioni di $A$ ciascuna con $pr = \frac{1}{n!}$

Sugg usare variabili indicatrici $X_i$

# QS randomizzato:

```
QuickSort( a, sinistra, destra ):
                                ⟨pre: 0 ≤ sinistra, destra ≤ n − 1⟩
  IF (sinistra < destra) {
    pivot = sinistra + (destra − sinistra) × random();
    rango = Distribuzione( a, sinistra, pivot, destra );
    QuickSort( a, sinistra, rango-1 );
    QuickSort( a, rango+1, destra );
  }
```

⇝ pivot = random(sinistra, destra)

Ricordiamo che il caso medio è sulle scelte random() non sugli input

Il tempo di esecuzione può essere espresso con una variabile aleatoria $X$

$O(n + X)$ tempo dove $X$ = # confronti

Il tempo medio è $O(n + E[X])$

Usiamo le variabili indicatrici per $X$

① assume che <u>dopo</u> l'ordinamento abbiamo

$$z_1 < z_2 < \dots < z_n$$

(in input esse appaiono in un qualunque ordine)

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } z_i \text{ e } z_j \text{ sono confrontate dal QSR,} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad i<j$$

② $\forall i<j$ : $z_i$ e $z_j$ vengono confrontate al più 1 volta

③ $\forall i<j$ : se $z_i$ e $z_j$ sono confrontati, uno di loro è certamente pivot.

$$X = \sum_{i<j} X_{ij}$$ = numero totale di confronti effettuati da QSR.

$$E[X] = \sum_{i<j} E[X_{ij}] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} Pr[X_{ij}=1]$$

$$Pr[X_{ij}=1] \leq \frac{2}{j-i+1}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{2}{j-i+1}$$

$$\simeq \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim n \ln n$$

$$\Pr[X_{ij}=1] = \Pr[z_i \text{ e } z_j \text{ sono confrontate}] =$$

$$\Pr[z_i \text{ sia pivot di } z_j \text{ OR } z_j \text{ sia pivot di } z_i] =$$

$$= \frac{2}{dx - sx + 1} \leq \frac{2}{j - i + 1}$$

$\leftarrow$ UNION BOUND

(4) $\forall i<j$: $z_i$ e $z_j$ sono confrontate in $A[sx..dx)$

$$\Rightarrow z_i, z_{i+1}, \dots, z_j \in A[sx..dx)$$

$$\Rightarrow dx - sx + 1 \geq j - i + 1$$