

Condensato di applicazioni

GGC

colabufo@mail.dm.unipi.it

settembre 2019

Indice

1	Introduction	2
2	Preambolo generale	3
3	Equazione del calore	4
3.1	Schemi numerici	6
4	L'equazione delle onde	8
5	Altri esempi di equazioni	9
6	Metodo delle differenze finite	10
6.1	Metodi di approssimazione	10
6.2	Schemi multilivello	12
6.3	In dimensione maggiore	12
6.4	Tabelle riassuntive	13
7	Teoria dei segnali: un riassunto	16
7.1	Segnali discreti	20
7.1.1	Filtri ricorsivi	21
7.1.2	La trasformata z	21
7.1.3	Segnali finiti	22
7.1.4	FFT	22
7.2	Segnali aleatori	23
7.2.1	L'operatore di covarianza	24
7.2.2	Potenza spettrale	24
7.2.3	Filtri di Wiener	25
7.3	Elaborazione della parola	27
7.3.1	Eccitazione	28
7.3.2	Processi autoregressivi	29
7.3.3	Regressione lineare	30

7.4	Analisi Tempo-Frequenza	31
7.4.1	Frequenza istantanea	33
7.5	Informazione e codifica	35
7.5.1	Successioni tipiche	35
7.5.2	Codificazione entropica	36
7.5.3	Quantizzazione scalare dei segnali	37
7.6	Tricks to know	38
8	Riassunti	39
8.1	Fourier	39
8.2	Sulla convoluzione	39
8.3	Un piccolo dizionario di teoria dei segnali	40

1 Introduction

2 Preambolo generale

D'ora in poi • Passo di discretizzazione in tempo $\Delta t > 0$.

- Passo di discretizzazione in spazio $\Delta x > 0$.
- I punti della griglia di discretizzazione:

$$(t_n, x_j) = (n\Delta t, j\Delta x)_{n \geq 0, j \in \mathbb{Z}}$$

- $u_j^n = u(x_j, t_n)$.
- Condizione CFL (Courant, Friedrichs, Lewy) di stabilità per uno schema numerico.

Definizione 2.1. *Un problema $A(u) = f$ è ben posto (secondo Hadamard) se per ogni dato f esiste unica una soluzione u che dipende in modo continuo da f .*

Definizione 2.2. *Lo stencil è l'insieme delle coppie di indici (m, i) che intervengono nell'equazione discreta al punto (t_n, x_j) . Più lo stencil è grosso più il costo della risoluzione è in generale elevato.*

3 Equazione del calore

Buono a sapersi • Chiamata anche equazione di diffusione: migrazione di una concentrazione o di una densità attraverso il dominio.

- Dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ occupato da un materiale omogeneo conduttore termico e isotropo.
- Le fonti di calore rappresentate da una funzione $f(x, t)$.
- La temperatura $\theta(x, t)$ è incognita.
- Quantità di calore = $c\theta$ dove c è il calore specifico.
- Scrivendo l'equilibrio tra il calore prodotto dalla sorgente e quello che entra ed esce dal bordo:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_V c\theta dx \right) = \int_V f dx - \int_{\partial V} q \cdot nds$$

otteniamo la legge di conservazione dell'energia:

$$c \frac{\partial \theta}{\partial t} + \operatorname{div} q = f$$

- Legge **costitutiva** di Fourier:

$$q = -k \nabla \theta$$

con k conduttività termica.

L'equazione Finalmente l'equazione si scrive come:

$$c \frac{\partial \theta}{\partial t} - k \Delta \theta = f$$

con condizione iniziale $\theta(t = 0, x) = \theta_0(x)$.

Condizioni al limite 1. **Dirichlet** (a temperatura costante):

$$x \in \partial \Omega \quad t > 0 \quad \theta(t, x) = 0$$

2. **Neumann** (dominio adiabatico o termicamente isolato):

$$x \in \partial \Omega \quad t > 0 \quad \frac{\partial \theta}{\partial n}(t, x) \equiv n(x) \cdot \nabla \theta(t, x) = 0$$

3. **Fourier** (il flusso di calore che esce è proporzionale al salto di temperatura tra interno ed esterno):

$$x \in \partial \Omega \quad t > 0 \quad \frac{\partial \theta}{\partial n}(t, x) + \alpha \theta(t, x) = 0$$

con $\alpha > 0$.

Definizione 3.1. Il problema di Cauchy con condizioni al contorno dell'equazione di diffusione è :

$$\begin{cases} c \frac{\partial \theta}{\partial t} - k \Delta \theta = f & (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+^* \\ \theta(t, x) = 0 & (x, t) \in \partial \Omega \times \mathbb{R}_+^* \\ \theta(t = 0, x) = \theta_0(x) & x \in \Omega \end{cases}$$

Se il calore si propaga in un mezzo che si muove a velocità $V(x, t)$ allora il flusso è somma di un flusso di diffusione (come sopra) e di un flusso di convezione proporzionale a V .

Definizione 3.2. Il problema di Cauchy con condizioni al contorno dell'equazione di convezione - diffusione è :

$$\begin{cases} c \frac{\partial \theta}{\partial t} + cV \cdot \nabla \theta - k \Delta \theta = f & (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+^* \\ \theta(t, x) = 0 & (x, t) \in \partial \Omega \times \mathbb{R}_+^* \\ \theta(t = 0, x) = \theta_0(x) & x \in \Omega \end{cases}$$

Definizione 3.3. L'equilibrio tra i termini di convezione e diffusione è misurato dal numero di **Péclet**

$$Pe = \frac{cVL}{k}$$

dove L è una lunghezza caratteristica (diametro di Ω ...)

Osservazione. Più Pe è piccolo più domina l'effetto di diffusione, più è grande più domina quello dovuto alla convezione. Se è molto grande il modello è sostituito dall'equazione di avvezione.

Definizione 3.4. Il problema di Cauchy con condizioni al contorno dell'equazione di avvezione è :

$$\begin{cases} c \frac{\partial \theta}{\partial t} + cV \cdot \nabla \theta = f & (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+^* \\ \theta(t, x) = 0 & (x, t) \in \partial \Omega \times \mathbb{R}_+^* \text{ se } V(x) \cdot n(x) < 0 \\ \theta(t = 0, x) = \theta_0(x) & x \in \Omega \end{cases}$$

Esempio Nel caso in cui $\Omega = \mathbb{R}$ con sorgente $f = 0$ e velocità V costante, ponendo $\nu = \frac{k}{c}$ otteniamo che il problema di convezione diffusione (3.2)

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial t} + V \frac{\partial \theta}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0 & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \\ \theta(t = 0, x) = \theta_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ammette come soluzione

$$\theta(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}} \int_{\mathbb{R}} \theta_0(y) \exp\left(-\frac{(x - Vt - y)^2}{4\nu t}\right) dy$$

Esempio Nel caso in cui $\Omega = \mathbb{R}$ con sorgente $f = 0$ e velocità V costante, il problema di avvezione (3.4)

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial t} + V \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \\ \theta(t = 0, x) = \theta_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ammette come soluzione

$$\theta(t, x) = \theta_0(x - Vt)$$

Principio del massimo Entrambe le soluzioni verificano:

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \quad \min_{x \in \mathbb{R}} \theta_0(x) \leq \theta(x, t) \leq \max_{x \in \mathbb{R}} \theta_0(x)$$

Il tempo Nel caso in cui $f = 0$ l'equazione di avvezione (3.4) non cambia se invertiamo il segno di V e del tempo. Al contrario l'equazione del calore (3.1) è irreversibile, non c'è modo di compensare un cambio di segno del tempo.

Osservazione. La soluzione dell'equazione di diffusione (3.1) dipende da tutti i valori del dato iniziale. Nel caso dell'avvezione (3.4) il dato iniziale è legato alla velocità V dunque il calore si propaga a velocità finita, mentre nel caso di convezione - diffusione (3.2) un dato iniziale positivo a supporto compatto farebbe sì che il calore si propaga a velocità infinita, istantaneamente.

Definizione 3.5. *In termini generali l'equazione del calore si riscrive:*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}_+^* \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+^* \\ u(t = 0) = u_0 & \text{in } \Omega \end{cases}$$

Caratteristiche • Equazione **parabolica** d'ordine 1 in tempo e 2 in spazio.

3.1 Schemi numerici

Per l'equazione di convezione diffusione (3.2) (nel caso $f = 0$, sennò si approssima anche lei), per $1 \leq j \leq N$:

1. Richardson:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + V \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta t} + \nu \frac{-u_{j-1}^n + 2u_j^n - u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} = 0$$

2. Eulero esplicito:

$$\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} + V \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta t} + \nu \frac{-u_{j-1}^n + 2u_j^n - u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} = 0$$

3. Eulero implicito:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta t} + \nu \frac{-u_{j-1}^n + 2u_j^n - u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} = 0$$

4. θ -schema:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \theta \nu \frac{-u_{j-1}^{n+1} + 2u_j^{n+1} - u_{j+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + (1-\theta) \nu \frac{-u_{j-1}^n + 2u_j^n - u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} = 0$$

5. Crank-Nicolson ($\theta = 1/2$):

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} \nu \frac{-u_{j-1}^{n+1} + 2u_j^{n+1} - u_{j+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{2} \nu \frac{-u_{j-1}^n + 2u_j^n - u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} = 0$$

6. Dufort-Frankel:

7. Gear:

Per l'equazione di avvezione (3.4) (nel caso V costante, $f = 0$ e condizioni al bordo periodiche), per $1 \leq j \leq N$:

1. Esplicito centrato:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

2. Implicito centrato:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} = 0$$

3. Lax - Friedrichs:

$$\frac{2u_j^{n+1} - u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta t} + V \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

4. Lax - Wendroff:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} - \left(\frac{V^2 \Delta t}{2} \right) \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} = 0$$

5. Decentrato all'indietro:

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} &= 0 \quad V > 0 \\ \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} &= 0 \quad V < 0 \end{aligned}$$

6.

4 L'equazione delle onde

Buono a sapersi • Chiamata anche equazione delle corde vibranti: vibrazione di una membrana elastica.

Definizione 4.1. *In termini generali l'equazione delle onde si scrive:*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}_+^* \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+^* \\ u(t=0) = u_0 & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial t}(t=0) = u_1 & \text{in } \Omega \end{cases}$$

Caratteristiche • Equazione d'ordine 2 in tempo e spazio.

- Come nel caso dell'avvezione (3.4), anche l'equazione delle onde (4.1) ha la proprietà di propagazione a velocità finita, poiché la sua soluzione non dipende da tutti i valori del dato iniziale, ma solo da quelli nel dominio di dipendenza (o cono di luce).
- L'equazione delle onde (4.1) è reversibile in tempo.
- Poiché le condizioni al bordo non fissano il valore di u al bordo, la soluzione potrebbe non essere limitata in tempo, aggiungiamo l'ipotesi che la velocità iniziale abbia media nulla:

$$\int_{\Omega} u_1(x) dx = 0$$

5 Altri esempi di equazioni

Definizione 5.1. *L'equazione di ordine 2 in spazio:*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

è detta equazione di Laplace.

6 Metodo delle differenze finite

6.1 Metodi di approssimazione

Per la derivata prima:

1. formula centrata:

$$-\frac{\partial u}{\partial t}(t_n, x_j) \approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t}$$

2. formula decentrata all'indietro:

$$-\frac{\partial u}{\partial t}(t_n, x_j) \approx \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t}$$

3. formula decentrata in avanti:

$$-\frac{\partial u}{\partial t}(t_n, x_j) \approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}$$

Per la derivata seconda:

1. formula centrata:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_n, x_j) \approx \frac{-u_{j-1}^n + 2u_j^n - u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2}$$

Per le condizioni al bordo:

1. Dirichlet:

$$u_0^n = u_{N+1}^n = 0$$

2. Neumann:

$$\frac{u_1^n - u_{-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad \frac{u_{N+2}^n - u_N^n}{2\Delta x} = 0$$

3. periodiche:

$$u_j^n = u_{N+1+j}^n$$

Errori • L'errore di troncatura si ottiene iniettando una soluzione u esatta nello schema numerico.

Definizione 6.1. Uno schema è **consistente** se per ogni soluzione sufficientemente regolare l'errore di troncatura tende a 0 uniformemente su (x, t) quando Δt e Δx vanno a 0 in modo indipendente.

Definizione 6.2. Uno schema è **preciso** all'ordine p in tempo e q in spazio se l'errore di troncatura è $O(\Delta t^p + \Delta x^q)$ per Δt e Δx che tendono a 0.

Definizione 6.3. Definiamo la norma per le soluzioni numeriche:

$$\|u^n\|_p = \left(\sum_{j=1}^n \Delta x |u_j^n|^p \right)^{1/p} \quad 1 \leq p \leq +\infty$$

Definizione 6.4. Uno schema è detto **stabile** per la norma $\|\cdot\|$ se

$$\exists K > 0 \quad \forall n \geq 0 \quad \|u^n\| \leq \|u^0\|$$

dove K è indipendente da Δt e Δx .

Definizione 6.5. Uno schema alle differenze finite verifica il **principio del massimo discreto** se

$$\forall n \geq 0; \forall 1 \leq j \leq N \quad \min \left(0, \min_{0 \leq j \leq N+1} u_j^0 \right) \leq u_j^n \leq \max \left(0, \max_{0 \leq j \leq N+1} u_j^0 \right)$$

Esempio Per dimostrare la stabilità in norma L^2 :

1. Decomponiamo in serie di Fourier:

$$u^n(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{u}^n(k) e^{2i\pi kx}$$

$$\text{dove } \hat{u}^n(k) = \int_0^1 u^n(x) e^{-2i\pi kx} dx.$$

2. Osservazione importante:

$$v^n(x) = u^n(x + \Delta x) \Rightarrow \hat{v}^n(k) = \hat{u}^n(k) e^{2i\pi k \Delta x}$$

3. Riscriviamo lo schema sostituendo ad u^n la sua serie di Fourier (con le eventuali traslazioni);
4. Otteniamo un'equazione per i coefficienti $\hat{u}^n(k)$.
5. A causa della formula di Parseval-Plancherel

$$\int_0^1 |u^n(x)|^2 dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{u}^n(k)|^2$$

la condizione di stabilità per $\hat{u}^n(k)$ è la stessa che per il vettore originario u^n .

Teorema 6.1 (Lax). Sia u soluzione sufficientemente regolare. Sia u^n la soluzione numerica discreta ottenuta con uno schema delle differenze finite con dato iniziale $u_j^0 = u_0(x_j)$. Se lo schema è lineare a 2 livelli, consistente e stabile per la norma $\|\cdot\|$ allora lo schema è convergente: posto $e_j^n = u_j^n - u(t_n, x_j)$ si ha

$$\forall T > 0 \quad \lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \left(\sup_{t_n \leq T} \|e^n\| \right) = 0.$$

Inoltre se lo schema è preciso all'ordine p in spazio e q in tempo

$$\forall T > 0 \quad \exists C_T > 0 \quad \sup_{t_n \leq T} \|e^n\| \leq C_T (\Delta x^p + \Delta t^q).$$

In sintesi Consistente + stabile \Rightarrow convergente.

Specifiche • Il teorema vale per ogni equazione alle derivate parziali lineare.

- Viceversa ogni schema lineare consistente a 2 livelli che converge è necessariamente stabile.
- La velocità di convergenza è la precisione dello schema.
- La stima dell'errore vale solo su tempi finiti, ma è indipendente dal numero di punti usati per la discretizzazione.

6.2 Schemi multilivello

Nulla di sorprendente: si pone

$$U^n = \begin{pmatrix} u^n \\ u^{n-1} \end{pmatrix}$$

in modo da avere come iterazione

$$U^{n+1} = AU^n = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ Id & 0 \end{pmatrix} U^n.$$

La condizione di stabilità si scrive:

$$\forall n \geq 1 \quad \|A^n\| = \sup_{\substack{U^1 \in \mathbb{R}^{2N} \\ U^1 \neq 0}} \frac{\|A^n U^1\|}{\|U^1\|} \leq K$$

Spesso si utilizza una condizione necessaria non sufficiente di stabilità (**di von Neumann**) per la norma L^2 :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \rho(A(k)) \leq 1$$

6.3 In dimensione maggiore

Se si hanno più passi per la discretizzazione dello spazio:

$$\Delta x = \frac{L_x}{N_x + 1} \quad \Delta y = \frac{L_y}{N_y + 1}$$

gli schemi si riscrivono considerando tutte le variabili.

Esempio L'equazione del calore in dimensione 2 si scrive

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}_+^* \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+^* \\ u(t=0, x, y) = u_0(x, y) & \text{in } \Omega \end{cases}$$

dunque ad esempio lo schema di Eulero implicito diventa:

$$\frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^n}{\Delta t} + \nu \frac{-u_{j-1,k}^{n+1} + 2u_{j,k}^{n+1} - u_{j+1,k}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \nu \frac{-u_{j,k-1}^{n+1} + 2u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k+1}^{n+1}}{(\Delta y)^2} = 0$$

e quello esplicito:

$$\frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^n}{\Delta t} + \nu \frac{-u_{j-1,k}^n + 2u_{j,k}^n - u_{j+1,k}^n}{(\Delta x)^2} + \nu \frac{-u_{j,k-1}^n + 2u_{j,k}^n - u_{j,k+1}^n}{(\Delta y)^2} = 0$$

In generale la matrice $(u_{j,k}^n)_{j,k}$ si può vettorizzare per colonne:

$$u^n = (u_{1,1}^n, \dots, u_{1,N_y}^n, u_{2,1}^n, \dots, u_{2,N_y}^n, \dots, u_{N_x,1}^n, \dots, u_{N_x,N_y}^n)$$

in questo caso per esempio lo schema implicito ha per matrice d'iterazione una tridiagonale a blocchi, con i blocchi sulla diagonale tridiagonali e gli altri diagonali. Quindi è pentadiagonale e simmetrica.

Osservazione. Spesso il costo in dimensione maggiore è troppo elevato, quindi si preferisce utilizzare uno schema unidimensionale e la tecnica delle *direzioni alternate* (**splitting**) che consiste nel risolvere alternativamente due equazioni unidimensionali la cui "media" dà l'equazione originaria.

Definizione 6.6. L'equazione equivalente di uno schema è ottenuta aggiungendo al modello la parte principale dell'errore di troncatura.

6.4 Tabelle riassuntive

Schema	Consistenza	Errore troncatura	Stabilità	Note
Eulero esplicito	✓	$O(\Delta t + \Delta x^2)$	L^2 ; L^∞ con CFL $2\nu\Delta t \leq \Delta x^2$.	$\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2} = \frac{1}{6} \Rightarrow$ precisione 2 in tempo e 4 in spazio
Eulero implicito	✓	$O(\Delta t + \Delta x^2)$	L^2 ; L^∞	
Crank-Nicolson	✓	$O(\Delta t^2 + \Delta x^2)$	L^2	
θ -schema	✓	$O(\Delta t + \Delta x^2)$	L^2 con CFL $2(1 - 2\theta)\nu\Delta t \leq \Delta x^2$	$\theta \neq \frac{1}{2}$
DuFort-Frankel	✓	$O\left(\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 + \Delta x^2\right)$	L^2 con CFL $\frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ limitato	
Gear	✓	$O(\Delta t^2 + \Delta x^2)$	L^2	

Tabella 1: Equazione del calore

Schema	Consistenza	Errore troncatura	Stabilità	Note
Esplicito centrato	✓	$O(\Delta t + \Delta x^2)$	instabile in norma L^2 .	
Implicito centrato	✓	$O(\Delta t + \Delta x^2)$	L^2	
Lax-Friedrichs	✓	$O(\Delta t + \frac{\Delta x^2}{\Delta t})$	L^2 ; L^∞ con CFL $ V \Delta t \leq \Delta x$	approssimazione all'ordine 2 per l'equazione di convezione-diffusione (3.2)
Lax-Wendroff	✓	$O(\Delta t^2 + \Delta x^2)$	L^2 con CFL $ V \Delta t \leq \Delta x$	
Decentrato all'indietro	✓	$O(\Delta t + \Delta x)$	L^2 ; L^∞ con CFL $ V \Delta t \leq \Delta x$	diffusivo (?)

Tabella 2: Equazione di avvezione

7 Teoria dei segnali: un riassunto

Il trattamento dei segnali analogici riposa sull'utilizzo di operatori lineari che modificano le proprietà di un segnale in modo omogeneo nel tempo. La trasformata di Fourier permette di diagonalizzare questi operatori.

Un **filtro** è un operatore lineare omogeneo: se $f(t)$ è un segnale, allora

$$L[f(t)] = g(t) \Rightarrow L[f(t - \tau)] = g(t - \tau).$$

Con le dovute ipotesi su $f(t)$ possiamo riscrivere un segnale come somma di impulsi di Dirac:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\delta(t - u)du.$$

Possiamo allora definire la **risposta all'impulso** come

$$h(t) = L[\delta(t)]$$

e ottenere che per ogni segnale vale:

$$L[f(t)] = h * f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)f(t - u)du$$

cioè che la risposta all'impulso caratterizza completamente il filtro.

Un filtro è **causale** se non dipende dai valori negativi del tempo, ovvero se h è a supporto in \mathbb{R}_+ .

Un filtro si dice **stabile** se mantiene la limitatezza del segnale, ovvero:

$$f(t) \text{ limitata} \Rightarrow L[f(t)] \text{ limitata}$$

Una condizione sufficiente per la stabilità è che $h \in L^1(\mathbb{R})$, in qual caso

$$|L[f(t)]| \leq \sup_{u \in \mathbb{R}} |f(u)| \int_{\mathbb{R}} |h(u)| du < +\infty.$$

Nome	Forma	$L[f(t)]$	Causale/Stabile
Amplificazione e ritardo	$h(t) = \lambda\delta(t - \tau)$	$\lambda f(t - \tau)$	causale, stabile
Media uniforme	$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{T} & t \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \\ 0 & t > \frac{T}{2} \end{cases}$	$\frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} f(u)du$	stabile
Media ponderata	$h(u) \text{ t.c. } \int_{\mathbb{R}} h(u)du = 1$	$\int_{\mathbb{R}} h(u)f(t - u)du$	stabile

Tabella 3: Esempi di filtri.

Fondamentale. Le funzioni esponenziali complesse $e^{i\omega t}$ sono autovettori dell'operatore di convoluzione. La trasformata di Fourier $\hat{h}(\omega)$ di $h(t)$ è detta **funzione di trasferimento** del filtro. Gli esponenziali complessi sono quindi autovettori di un sistema lineare omogeneo:

$$L[e^{i\omega t}] = e^{i\omega t} \hat{h}(\omega).$$

*** Tutte le proprietà della trasformata di Fourier sono fondamentali per la teoria dei segnali. Per ora guarda in *Cose a caso di Analisi*, un giorno forse copierò il tutto qui. ***

Filtro	Risposta impulsionale h	TF $\hat{h}(\omega)$
Passa basso ideale	$h_0(t) = \frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t}$	$\hat{h}_0(\omega) = \mathbb{1}_{ \omega < \omega_c}(\omega)$
Passa basso reale di Butterworth di Chebyshev	$h_1(t) = 2 \cos(\omega_0 t) \frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t}$	$\hat{h}_1(\omega) = \mathbb{1}_{[\omega_0 - \omega_c, \omega_0 + \omega_c]}(\omega)$ $ \hat{h}_n^b(\omega) ^2 = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_c)^{2n}}$ $ \hat{h}_n^c(\omega) ^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon C_n^2(\omega/\omega_c)}$ (C_n è l' n -esimo polinomio di Chebyshev)

Tabella 4: Alcuni filtri.

Campionamento del segnale. Un campionamento $f(nT)$ è rappresentato da un impulso di Dirac di ampiezza $f(nT)$ centrato in nT . Un campionamento uniforme corrisponde dunque alla distribuzione:

$$f_d(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT) \delta(t - nT).$$

Un tale campionamento è quindi ottenuto per moltiplicazione con un pettine di Dirac $c(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - nT)$:

$$f_d(t) = f(t)c(t)$$

e le sue proprietà si studiano facilmente nel dominio delle frequenze:

$$\begin{aligned} \hat{f}_d(\omega) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} f(nT) e^{-inT\omega} \\ &= \frac{1}{2\pi} \hat{f} * \hat{c}(\omega) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f} \left(\omega - \frac{2k\pi}{T} \right). \end{aligned}$$

Campionare un segnale è equivalente a una periodizzazione della sua trasformata di Fourier ottenuta sommando la funzione traslata nei punti $\omega - \frac{2k\pi}{T}$.

Il teorema fondamentale:

Teorema 7.1 (Nyquist/Campionamento). *Sia $f(t)$ un segnale con $\text{supp}(\hat{f}(\omega)) \subseteq [-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]$. Allora il segnale si può ricostruire interpolando il campionamento con $h_T(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}$:*

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nT) \text{sinc} \left(\frac{\pi t}{T} \right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nT) h_T(t).$$

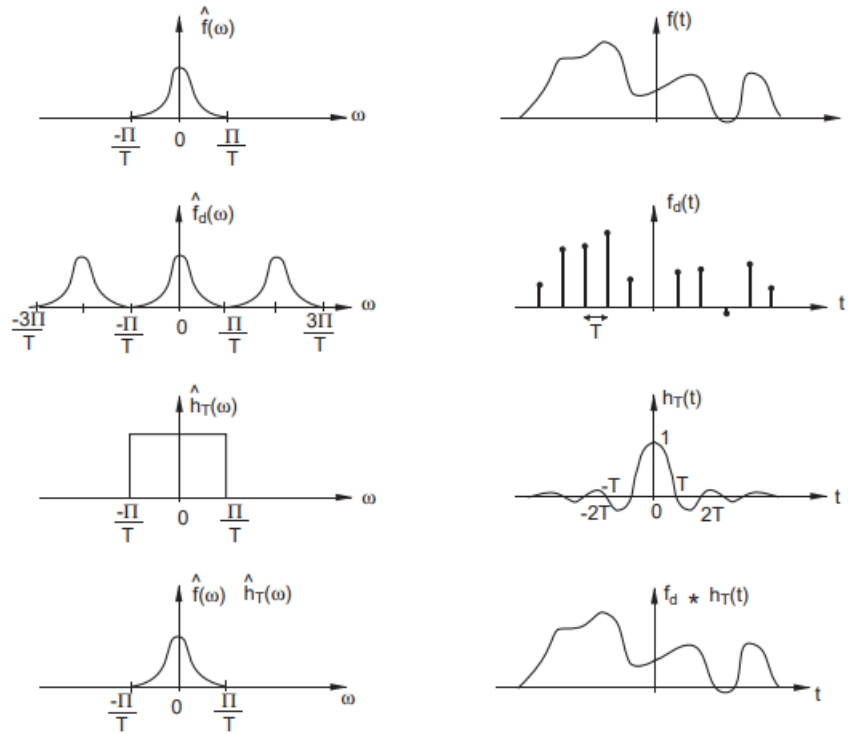


Figura 1: Campionamento e interpolazione di un segnale nei domini di frequenza e tempo:

- | il segnale $f(t)$ e la sua TF $\hat{f}(\omega)$
- | un campionamento in t corrisponde a una periodizzazione in ω
- | il filtro passa basso
- | la ricostruzione del segnale.

Osservazione. Se il supporto di $\hat{f}(\omega)$ non è incluso in $[-\pi/T, \pi/T]$, la formula di interpolazione non ricostruisce il segnale, esistono infatti degli interi $k \neq 0$ per cui $\hat{f}(\omega - \frac{2k\pi}{T}) \neq 0$ e in questo caso $\hat{f}_d(\omega)$ è somma di $\hat{f}(\omega)$ più alcune componenti di alte frequenze. Il valore di $\hat{f}_d(\omega)\hat{h}_T(\omega)$ può differire quindi anche di molto da $\hat{f}(\omega)$ anche per $\omega \in [-\pi/T, \pi/T]$.

Aliasing Un problema di sovrapposizione può essere osservato quando si filma una ruota che gira molto rapidamente con un numero insufficiente di immagini al secondo: la ruota sembra girare molto lentamente o addirittura all'indietro.

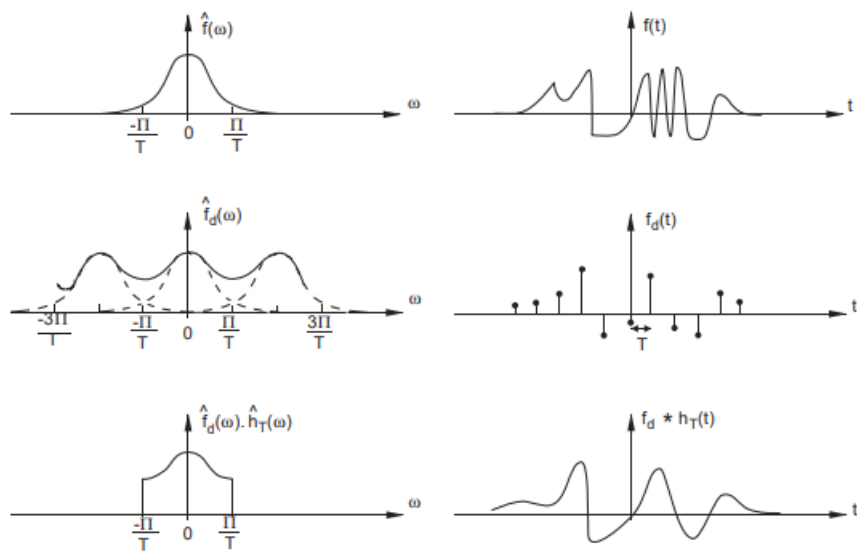


Figura 2: Aliasing causato da un passo di campionamento troppo grande:
 | il segnale $f(t)$ e la sua TF $\hat{f}(\omega)$
 | un campionamento in t corrisponde a una periodizzazione in ω
 | la ricostruzione del segnale $f_d * h_T(t)$ molto diversa da $f(t)$.

7.1 Segnali discreti

Tutto ciò che vale per i segnali continui si ricicla per i segnali discretizzati: gli integrali diventano somme, la trasformata di Fourier diviene sviluppo in serie di Fourier. In oltre si utilizza la **trasformata zeta** (estensione delle serie di Fourier al piano complesso) per analizzare più facilmente le proprietà dei filtri.

Convoluzione discreta. L'omogeneità temporale dei filtri diventa traslazione sulla griglia di campionamento. Un filtro è caratterizzato dalla propria risposta impulsiva che agisce per convoluzione discreta:

$$Lf[n] = f * h[n] = \sum_{p \in \mathbb{Z}} f[p]h[n-p].$$

Un filtro è causale se $Lf[p]$ dipende solo dai valori di $f[n]$ per $n \leq p$, ovvero se $h[n] = 0$ per $n < 0$. Un filtro è stabile se manda un segnale limitato in un segnale limitato (BIBO). Una condizione necessaria e sufficiente è che $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |h[n]| < +\infty$. Anche nel caso discreto, gli autovettori degli operatori di convoluzione sono gli esponenziali complessi $e_\omega[k] = e^{i\omega k}$ con autovalori dati dalla serie di Fourier

$$\hat{h}(e^{i\omega}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h[k]e^{-i\omega k}$$

chiamata funzione di trasferimento del filtro.

La trasformata di Fourier di un segnale discreto $f[n]$

$$\hat{f}(e^{i\omega}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f[k]e^{-i\omega k}$$

non è altro che la trasformata di Fourier del suo sviluppo in serie di Dirac

$$f_d(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f[n]\delta(t-n)$$

e tutte le proprietà della TF restano valide se $f_d(t)$ è una distribuzione temperata (e quindi se $|f[n]|$ è limitata).

Filtro discreto	Risposta impulsiva h	TF \hat{h}
Media uniforme	$h[n] = \begin{cases} \frac{1}{2N+1} & -N \leq n \leq N \\ 0 & n > N \end{cases}$	$\hat{h}(e^{i\omega}) = \frac{1}{2N+1} \frac{\sin((N+\frac{1}{2})\omega)}{\sin(\omega/2)}$
passa basso ideale	$h_0[n] = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$	$\hat{h}_0(e^{i\omega}) = \mathbb{1}_{ \omega \leq \omega_c}(e^{i\omega})$
passa banda ideale	$h_1[n] = 2 \cos(\omega_0 n) h_0[n]$	$\hat{h}_1(e^{i\omega}) = \mathbb{1}_{ \omega \in [\omega_0 - \omega_c, \omega_0 + \omega_c]}(e^{i\omega})$

Tabella 5: Esempi di filtri discreti.

7.1.1 Filtri ricorsivi

Possiamo definire un output $g[n]$ che dipende dall'input $f[n]$ tramite un'equazione alle differenze finite:

$$\sum_{k=0}^N a_k g[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k f[n-k]$$

con $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ $a_0 \neq 0$, cioè:

$$g[n] = \frac{1}{a_0} \left(\sum_{k=0}^m b_k f[n-k] - \sum_{k=1}^M a_k g[n-k] \right).$$

Se $N = 0$ il filtro ha una risposta impulsiva (**FIR=Finite Impulse Response** filter) finita di taglia M e $g[n] = h * f[n]$. Se $M = 0$ il filtro è detto *autoregressivo*:

$$g[n] = \frac{b_0}{a_0} f[n] - \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{a_0} g[n-k].$$

La funzione di trasferimento di un filtro ricorsivo è un rapporto di polinomi in $e^{-i\omega}$:

$$\begin{aligned} \hat{h}(e^{i\omega}) &= \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-ik\omega}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-ik\omega}} \\ &= \frac{b_0 \prod_{k=1}^M (1 - c_k e^{-i\omega})}{a_0 \prod_{k=1}^N (1 - d_k e^{-i\omega})}. \end{aligned}$$

dove d_k sono i poli e c_k gli zeri della funzione. La loro posizione determina la risposta impulsionale in frequenza.

7.1.2 La trasformata z

La trasformata zeta estende la serie di Fourier $\hat{h}(e^{i\omega})$ al piano complesso attraverso la serie di Laurent

$$\hat{h}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h[n] z^{-n}.$$

Il suo dominio di convergenza è una corona circolare nel piano complesso.

Nel caso di un filtro causale la serie converge sul complementare di un cerchio.

Un filtro è stabile se e solo se il dominio di convergenza contiene il cerchio unitario.

Un filtro è causale e stabile se e solo se la serie $\hat{h}(z)$ converge per $|z| \geq 1$, ovvero se e solo se i poli sono all'interno del cerchio unitario: $|d_k| < 1$.

$h[n]$	$\hat{h}(z)$	dominio di convergenza
$\delta[n-k]$	z^{-k}	$(0, +\infty)$
$a^n \mathbb{1}_{n \geq 0}$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$(a , +\infty)$
$na^n \mathbb{1}_{n \geq 0}$	$\frac{az^{-1}}{1-az^{-1}}$	$(a , +\infty)$

Tabella 6: Esempi di filtro causale e trasformazione zeta.

7.1.3 Segnali finiti

I segnali discreti finiti possono presentare effetti di bordo nel calcolo della convoluzione. Definiamo perciò la **convoluzione circolare**:

$$f \star h[n] = \sum_{p=0}^{N-1} f[p]h[n-p]$$

dove le funzioni f ed h sono estese in modo N -periodico per gli interi fuori dell'intervallo $[0, N)$. Anche in questo caso gli esponenziali complessi $e_k[n] = e^{\frac{i2\pi k}{N}n}$ sono autovettori dell'operatore di convoluzione circolare con autovalori dati dalla trasformata discreta di Fourier di $h[n]$:

$$\hat{h}[k] = \sum_{p=0}^{N-1} h[p]e^{-\frac{2i\pi k}{N}p}.$$

Effetti di bordo Se i valori di $f[0]$ e $f[N-1]$ sono molto diversi, la transizione del segnale periodico è brutale e ciò si traduce nei coefficienti di Fourier di grande ampiezza per alte frequenze.

7.1.4 FFT

L'idea è di calcolare una DFT in tempo $O(N \log_2 N)$ invece che $O(N^2)$ raggruppando i termini pari e dispari:

$$\begin{aligned} \hat{f}[2k] &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} (f[n] + f[n+N/2])e^{-\frac{2i\pi k}{N}n} \\ \hat{f}[2k+1] &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} e^{-\frac{2i\pi k}{N}n} (f[n] - f[n+N/2])e^{-\frac{2i\pi k}{N}n}. \end{aligned}$$

In questo modo le frequenze pari e dispari sono ottenute rispettivamente calcolando la DTF dei segnali di periodo $N/2$:

$$\begin{aligned} f_p[n] &= f[n] + f\left[n + \frac{N}{2}\right] \\ f_d[n] &= e^{-\frac{2i\pi k}{N}n} \left(f[n] - f\left[n + \frac{N}{2}\right] \right) \end{aligned}$$

La trasformata di Fourier inversa è ottenuta calcolando la DFT del coniugato del segnale et riconiugando alla fine. Ciò si deduce osservando che

$$\bar{f}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}[k] e^{\frac{-2ikn\pi}{N}}.$$

7.2 Segnali aleatori

Alcuni modelli stocastici riflettono le proprietà comuni di questo tipo di segnali (parole, suoni pronunciati da persone diverse...). In particolare possiamo separare il segnale vero e proprio dal rumore che lo accompagna, che ha delle caratteristiche differenti dal punto di vista stocastico, e quindi codificare efficacemente i segnali. Continuando ad assumere l'ipotesi di stazionarietà, ci troviamo a utilizzare gli strumenti della trasformata di Fourier.

Una classe di segnali è modellata da un processo aleatorio le cui realizzazioni corrispondono ai segnali della classe.

Stazionarietà Il processo è detto strettamente stazionario se la sua legge di probabilità è indipendente da uno shift temporale. Formalmente:

$$\forall p \in \mathbb{Z} \quad \forall \{n_1, \dots, n_k\} \text{ la legge di } \{X[n_1], \dots, X[n_k]\} \\ \text{è la stessa di } \{X[n_1 + p], \dots, X[n_k + p]\}.$$

In particolare la media è costante:

$$\mu[n] = \mathbb{E}(X[n]) = \mu$$

e l'autocovarianza dipende solamente dalla differenza delle posizioni:

$$\text{Cov}(X[n], X[m]) = R_X[n - m].$$

SSL Un processo è detto **stazionario in senso largo (SSL)** se soddisfa le due proprietà

$$\mu[n] = \mathbb{E}(X[n]) = \mu \quad (1)$$

$$\text{Cov}(X[n], X[m]) = R_X[n - m] \quad (2)$$

e la sua varianza è finita: $\mathbb{E}(|X[n]|^2) < +\infty$.

Processi gaussiani Un processo gaussiano è interamente definito dalla sua media e dalla sua covarianza. Se $X[n]$ è gaussiano e SSL, allora è anche strettamente stazionario.

Proposizione 7.2. Sia $\tilde{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X[n]$ la media empirica (stimatore non distorto). Il processo è **ergodico** per la media¹ se e solo se

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(\mu - \tilde{\mu}) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{l=1-N}^{N-1} \left(1 - \frac{|l|}{N}\right) R_X[l] = 0.$$

¹cioè quando N aumenta la varianza dello stimatore $\tilde{\mu}$ decresce a 0

Autocovarianza L'autocovarianza deve decrescere abbastanza rapidamente perché le correlazioni a lungo raggio siano deboli. Nel caso in cui le $X[n]$ siano a due a due decorrelate, abbiamo $R_X[l] = R_X[0]\delta[l]$ e di conseguenza $\mathbb{E}((\mu - \tilde{\mu})^2) = \frac{R_X[0]}{N}$. Lo stimatore (distorto²) per l'autocovarianza è

$$\tilde{R}_X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-|k|} (X[n] - \tilde{\mu})(X[n+|k|] - \tilde{\mu}).$$

Possiamo anche definire uno stimatore non distorto

$$\tilde{\tilde{R}}_X[k] = \frac{1}{N-|k|} \sum_{n=0}^{N-1-|k|} (X[n] - \tilde{\mu})(X[n+|k|] - \tilde{\mu}).$$

ma la sua varianza³ è grande quando $k \approx N$. Nel caso in cui $R_X[k] = O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ l'errore quadratico medio dello stimatore distorto è $\mathbb{E}\left(|\tilde{R}_X[k] - R_X[k]|^2\right) = O\left(\frac{1}{N}\right)$ è minore di quello dello stimatore non distorto. Ciò giustifica l'uso del primo stimatore rispetto al secondo.

7.2.1 L'operatore di covarianza

Se $A = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n]X[n]$ e $B = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b[n]X[n]$ sono due combinazioni lineari di $X[n]$, allora la loro covarianza è

$$Cov(A, B) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n] \sum_{m=-\infty}^{+\infty} b[m] R_X[n, m]$$

dove $R_X[n, m] = Cov(X[n], X[m])$. Definendo allora l'operatore simmetrico e definito positivo⁴ di covarianza

$$Cb[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} b[m] R_X[n, m]$$

possiamo interpretare $Cov(A, B) = \langle a, Cb \rangle$ come un prodotto scalare su $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Osservazione. La matrice $R_X = (R_X[n-m])_{n,m}$ è una matrice di Toeplitz.

7.2.2 Potenza spettrale

Se $X[n]$ è SSL allora vale $R_X[n, m] = R_X[n-m]$ e la sua autocovarianza è caratterizzata da autovalori ed autovettori dell'operatore C . Si ha infatti:

$$Ca[n] = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a[m] R_X[n-m] = a * R_x[n]$$

²la distorsione è $\mathbb{E}(\tilde{R}_X[k] - R_X[k]) = \frac{kR_X[k]}{N}$ e decresce rapidamente all'aumentare di k .

³ $O\left(\frac{1}{N-|k|}\right)$

⁴ $\langle a, Ca \rangle = Cov(A, A) \geq 0$.

cioè C è un operatore di convoluzione discreta con autovettori $e_\omega[n] = e^{-i\omega n}$ ed autovalori $\hat{R}_X(e^{i\omega}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} R_X[n] e^{-in\omega} \geq 0$:

$$C e_\omega[n] = \hat{R}_X(e^{i\omega}) e_\omega[n].$$

La funzione $\hat{R}_X(e^{i\omega})$ è chiamata potenza spettrale del processo in quanto misura l'energia media del processo per unità di frequenza. Caratterizza completamente l'autocovarianza del processo per tramite della sua TF inversa:

$$\sigma^2 = R_X[0] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{R}_X(e^{i\omega}) d\omega.$$

Rumore bianco È un processo SSL i cui valori a istanti diversi sono scorrelati: $R_X[n] = \sigma^2 \delta[n]$ e quindi la sua potenza spettrale è costante $\hat{R}_X(e^{i\omega}) = \sigma^2$.

Teorema 7.3. Siano $h[n]$ e $g[n]$ le risposte impulsive di due filtri in $\ell^2(\mathbb{Z})$ con funzioni di trasferimento limitate. Sia $X[n]$ SSL con $R_X[n] \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Allora $Y[k] = h * X[k]$ e $Z[l] = g * X[l]$ sono SSL e

$$\text{Cov}(Y[k], Z[l]) = h * \tilde{g} * R_X[k - l]$$

con $\tilde{g}[n] = g[-n]$. In particolare la potenza spettrale di $Y[n]$ è

$$\hat{R}_Y(e^{i\omega}) = |\hat{h}(e^{i\omega})|^2 \hat{R}_X(e^{i\omega}).$$

Densità di energia $\hat{R}_X(e^{i\omega})$ è chiamata potenza spettrale perché possiamo interpretarla come una densità d'energia sull'asse delle frequenze. Sia infatti

$$\hat{h}_\Delta^\xi(e^{i\omega}) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\Delta} & ||\omega| - \xi| \leq \Delta/2 \\ 0 & ||\omega| - \xi| > \Delta/2 \end{cases}$$

e definiamo $X_\Delta^\xi[n] = X * \hat{h}_\Delta^\xi[n]$. Quando $R_X[n] \in \ell^1(\mathbb{Z})$ allora $\hat{R}_X(e^{i\omega})$ è continua e verifica $\hat{R}_X(e^{i\xi}) = \hat{R}_X(e^{-i\xi})$. Poiché la varianza di $X_\Delta^\xi[n]$ è $\frac{1}{2} \int_{||\omega| - \xi| \leq \frac{\Delta}{2}} \frac{\hat{R}_X(e^{i\omega})}{\Delta} d\omega$, la potenza spettrale alla frequenza ξ è proporzionale alla densità d'energia del processo intorno alla frequenza ξ .

7.2.3 Filtri di Wiener

Parte del rumore può essere rimossa grazie ad uno stimatore ottimizzato che approfitta delle informazioni a priori sul segnale e sul rumore.

Modelliamo segnale e rumore come due processi reali stazionari X e B di cui supponiamo conoscere a priori la covarianza. Supponiamo anche $X[n]$ e $B[k]$ indipendenti per ogni n e k , e $X[n]$ centrato. Chiamiamo $D[n] = X[n] + B[n]$ i dati che riceviamo. L'obiettivo è di minimizzare l'errore quadratico medio

$$\mathbb{E} \left((X[n] - \tilde{X}[n])^2 \right)$$

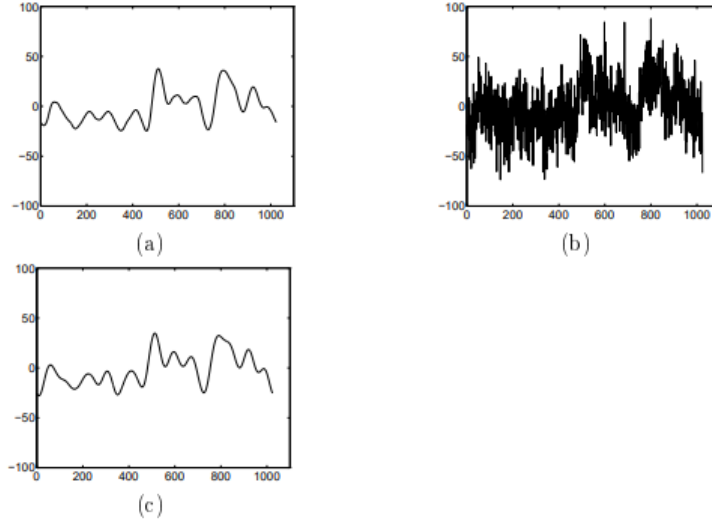


Figura 3: (a) Realizzazione di un processo gaussiano
 | (b) Aggiunta di un rumore bianco gaussiano (SNR = -0,4 dB)
 | (c) Stima di Wiener (SNR = 15,2 dB).

per mezzo di uno stimatore $\tilde{X}[n] = LD[n] = \mathbb{E}(X[n] | D[k] \forall k \in \mathbb{Z})$.

Il filtro di Wiener semplifica il problema supponendo L lineare. Lo stimatore lineare ottimale si calcola per mezzo di un filtro la cui funzione di trasferimento si esprime tramite la potenza spettrale del segnale e quella del rumore.

Teorema 7.4 (Wiener). *Lo stimatore $\tilde{X} = D * h$ dove*

$$\hat{h}(e^{i\omega}) = \frac{\hat{R}_X(e^{i\omega})}{\hat{R}_X(e^{i\omega}) + \hat{R}_B(e^{i\omega})}$$

minimizza l'errore quadratico medio, che risulta essere

$$\mathbb{E} \left((X[n] - \tilde{X}[n])^2 \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\hat{R}_X(e^{i\omega}) \hat{R}_B(e^{i\omega})}{\hat{R}_X(e^{i\omega}) + \hat{R}_B(e^{i\omega})} d\omega.$$

Il teorema mostra in particolare che la migliore stima lineare si ottiene filtrando. Osserviamo che $\hat{h}(\omega) \approx 1$ quando il rapporto $\frac{\hat{R}_X(e^{i\omega})}{\hat{R}_B(e^{i\omega})}$ è grande alla frequenza ω . Quando questo rapporto si riduce, $\hat{h}(\omega) \rightarrow 0$.

Osservazione. Se $X[n]$ è gaussiano e $B[n]$ è un rumore bianco gaussiano, allora lo stimatore lineare ottimale è anche ottimale tra quelli non lineari.

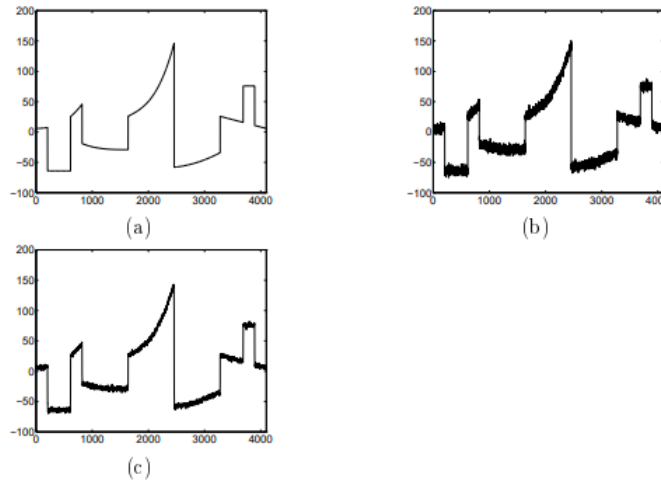


Figura 4: (a) Realizzazione di un processo non gaussiano
 | (b) Aggiunta di un rumore bianco gaussiano (SNR = 21,9 dB)
 | (c) Stima di Wiener (SNR = 25,9 dB).

Valore numerico dell'errore Spesso si esprime tramite il rapporto segnale su rumore *SNR* (*Signal to Noise Ratio*) misurato in decibel:

$$SNR_{db} = 10 \log_{10} \left(\frac{\mathbb{E}(X^2[n])}{\mathbb{E}((X[n] - \tilde{X}[n])^2)} \right).$$

7.3 Elaborazione della parola

L'identificazione dei parametri nei modelli autoregressivi usati per la produzione di parole si fa per regressione lineare.

Modellazione I suoni vocalici sono prodotti dalla vibrazione delle corde vocali. La frequenza delle ripetizioni è detta *pitch* ed è controllata dalla tensione delle corde vocali, che corrisponde alla frequenza fondamentale del suono.

Se sussurriamo, le corde vocali non vibrano ma lasciano un passaggio stretto, e il prodotto è modellato da un rumore gaussiano.

La laringe emette delle onde ricche in armoniche, filtrate dal condotto vocale. Tale condotto ha delle risonanze, dette formanti⁵. La deformazione del condotto vocale sposta le frequenze di risonanza.

Il condotto è modellato come giustapposizione di cilindri di eguale lunghezza Δ e diametri variabili. In ingresso un'onda diretta $f_{n-1}(t)$ - che misura il flusso

⁵Con formante si intende una frequenza di risonanza (anche chiamata frequenza caratteristica) attorno alla quale un suono spettralmente ricco mostra un picco di ampiezza.

dell'aria all'entrata per unità di tempo - e una inversa $b_{n-1}(t)$. In uscita un'onda diretta $f_n(t)$ e una inversa $b_n(t)$ legate ai parametri d'ingresso da una matrice T_n che dipende dall'impedenza dei cilindri:

$$\begin{pmatrix} f_N(t) \\ b_N(t) \end{pmatrix} = \prod_{n=1}^N T_n \begin{pmatrix} f_0(t) \\ b_0(t) \end{pmatrix}.$$

Discretizziamo il sistema con un passo $\frac{\Delta}{c}$ corrispondente al tempo di propagazione dell'onda acustica in ogni cilindro. Scrivendo le equazioni di propagazione delle onde e la conservazione del flusso e della pressione, calcoliamo la funzione di trasferimento:

$$\hat{h}(z) = \frac{\hat{f}_N(z)}{\hat{f}_0(z)}.$$

In assenza di perdite lungo il sistema, $\hat{h}(z)$ ha N poli e nessuno zero. Cioè è un filtro autoregressivo:

$$\hat{h}(z) = \frac{1}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}}.$$

Il condotto vocale si rappresenta infine come un filtro autoregressivo i cui parametri $a[k]$ dipendono dalla configurazione del condotto. Il filtro è causale e stabile (quindi i poli di $\hat{h}(z)$ sono tutti nel cerchio unitario). I poli di $\hat{h}(z)$ vicini al bordo del cerchio producono dei picchi nel modulo della risposta in frequenza $|\hat{h}(e^{i\omega})|$, detti *formanti*. I formanti sono importanti nel riconoscimento dei suoni prodotti. Più lo zero è vicino alla circonferenza unitaria, più il formante è pronunciato.

7.3.1 Eccitazione

Suoni sonori Un treno d'onde periodico si scrive come

$$f[n] = \sum_{p \in \mathbb{Z}} g[n - pP] = g * \sum_{p \in \mathbb{Z}} \delta[n - pP]$$

dove $g[n]$ è un'onda indipendente dalla forma del condotto con supporto piccolo rispetto al periodo P . La serie di Fourier di $f[n]$ è

$$\hat{f}(e^{i\omega}) = \hat{g}(e^{i\omega}) \frac{2\pi}{P} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta\left(\omega - \frac{2k\pi}{P}\right) = \frac{2\pi}{P} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{g}(e^{\frac{i2k\pi}{P}}) \delta\left(\omega - \frac{2k\pi}{P}\right)$$

che è una successione di armoniche con involuppo $\hat{g}(e^{i\omega})$. La risposta si può modellare con un treno d'impulsi di Dirac che passa attraverso un filtro la cui funzione di trasferimento è specificata da $\hat{h}(e^{i\omega}) = \hat{h}_0(e^{i\omega})\hat{g}(e^{i\omega})$, che è la funzione di trasferimento di un filtro autoregressivo. In conclusione, un segnale di parola discretizzato è visto come un treno di Dirac discrete $\sum_{p \in \mathbb{Z}} \delta[n - pP]$ filtrato da un filtro autoregressivo.

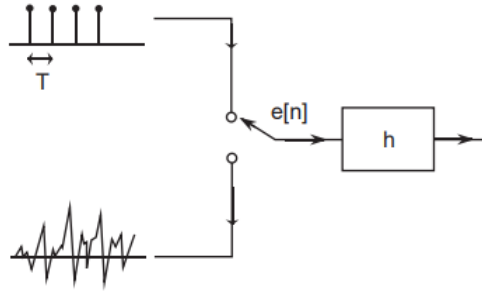


Figura 5: Modellazione di un suono di parola per mezzo di una eccitazione periodica (caso *sonoro*) o aleatoria (caso *sordo*), filtrato con un filtro autoregressivo.

Suoni sordi Sono prodotti da un segnale turbolento emesso dalla laringe. Corrispondono a un processo gaussiano stazionario $Y[n]$ di potenza spettrale $\hat{R}_Y(e^{i\omega})$ con energia ripartita su una larga banda di frequenza. Se $B[n]$ è un rumore bianco gaussiano e $g[n]$ un filtro, allora possiamo scrivere:

$$Y[n] = B * g[n] \quad \hat{R}_Y(e^{i\omega}) = |\hat{g}(e^{i\omega})|^2 \sigma^2$$

E il suono prodotto è quindi dato finalmente da

$$X[n] = Y * h_0[n] = B * g * h_0[n].$$

In conclusione si tratta di un segnale discreto ottenuto da un rumore bianco $B[n]$ con un filtro autoregressivo $h[n] = g * h_0[n]$.

7.3.2 Processi autoregressivi

Il processo risultante del filtraggio di un rumore bianco a traverso un filtro autoregressivo è detto processo autoregressivo.

$$X[n] = B * h[n] \quad \hat{h}(z) = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1} - \dots - a_N z^{-N}}.$$

Il filtro è causale e stabile e posto $\hat{R}_B(e^{i\omega}) = \sigma^2$,

$$\hat{R}_X(e^{i\omega}) = \hat{R}_B(e^{i\omega}) |\hat{h}(e^{i\omega})|^2 = \frac{\sigma^2}{|1 - \sum_{k=1}^N a_k e^{-ik\omega}|^2}.$$

Possiamo scrivere l'equazione di regressione lineare che lega $X[n]$ agli N valori passati $\{X[n-k]\}_{1 \leq k \leq N}$:

$$X[n] = B[n] + \sum_{k=1}^N a_k X[n-k]$$

e interpretare $B[n]$ come l'innovazione al tempo n . Possiamo calcolare le costanti di regressione risolvendo un sistema lineare (*equazioni di Yule-Walker 3*) che contiene R_X :

$$\begin{pmatrix} R_X[0] & R_X[1] & \dots & R_X[N-1] \\ R_X[1] & R_X[0] & \dots & R_X[N-2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_X[N-1] & R_X[N-2] & \dots & R_X[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_X[1] \\ R_X[2] \\ \vdots \\ R_X[N] \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Tale sistema si risolve in maniera efficace con l'algoritmo di Levinson-Durbin⁶. La soluzione decresce esponenzialmente⁷, poiché è data da

$$R_X[l] = \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k d_k^l$$

dove d_k sono i poli di $\hat{h}(z)$ ⁸. La varianza del rumore è interamente definita da $R_X[l]$ poiché i coefficienti a_k dipendono esclusivamente da $R_X[l]$.

7.3.3 Regressione lineare

Tutto quanto detto nella sezione precedente si ritrova in pratica: le realizzazioni del segnale $x[n]$ soddisfano l'equazione alle ricorrenze $x[n] - \tilde{x}[n] = e[n]$, in cui $e[n]$ è la realizzazione di un rumore bianco, considerato come l'innovazione rispetto alla predizione $\tilde{x}[n] = \sum_{k=1}^N a_k x[n-k]$. Possiamo calcolare i coefficienti a_k che minimizzano l'errore $\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^2[n]$ introducendo l'autocorrelazione empirica

$$r_x[k] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x[n-k]x[n]$$

in cui la somma in realtà non comporta che P valori, in quanto $x[n]$ ha al più P valori consecutivi non nulli.

Teorema 7.5. *I coefficienti $\{a_k\}_{1 \leq k \leq N}$ di regressione del segnale $\tilde{x}[n]$ che minimizza l'errore $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |x[n] - \tilde{x}[n]|^2$ sono le soluzioni del sistema (approssimazione delle equazioni di Yule-Walker 3)*

$$\begin{pmatrix} r_X[0] & r_X[1] & \dots & r_X[N-1] \\ r_X[1] & r_X[0] & \dots & r_X[N-2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_X[N-1] & r_X[N-2] & \dots & r_X[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_X[1] \\ r_X[2] \\ \vdots \\ r_X[N] \end{pmatrix}.$$

⁶ $O(N^2)$ operazioni

⁷ $\lim_{l \rightarrow +\infty} R_X[l] = 0$

⁸ $|d_k| < 1$ poiché h è stabile.

Nel caso di suoni sordi, l'autocorrelazione empirica è una stima della vera autocorrelazione del processo e le equazioni di predizione lineare approssimano dunque quelle di Yule-Walker 3. Nel caso di suoni sonori, il segnale $x[n]$ è costruito filtrando un treno d'impulsi $e[n] = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \delta[n - pP]$ con un filtro autoregressivo, il cui spettro $\hat{x}(e^{i\omega})$ è la somma di componenti armoniche alle frequenze $\frac{2k\pi}{P}$ di ampiezza $\hat{h}(e^{\frac{i2k\pi}{P}})$.

Osservazione. In un modello di parola, dobbiamo stimare i coefficienti, se il suono è sonoro o sordo, nel primo caso il *pitch*, nel secondo σ^2 , ... si veda la figura 5 a pagina 29. In pratica i passaggi sono:

1. Filtrare con una finestra⁹: $x[n] = f[n]w[n - kM]$;
2. selezionare l'eccitazione: $k = \arg \min \sum_n |x[n] - x[n - k]|^2$ ed ottenere P nel caso di un suono sonoro (altrimenti abbiamo determinato che è sordo);
3. risolvere le equazioni di Yule-Walker 3 (dopo aver determinato un'approssimazione dei coefficienti $R_X[k]$) per trovare $\{a_k\}_k$ (e σ^2 nel caso sordo).

7.4 Analisi Tempo-Frequenza

Le proprietà temporali e di frequenza del suono sono messe in evidenza dalla TF a finestra. Sia $g(t)$ la *finestra*, ovvero una funzione pari con supporto concentrato in un intorno di 0 e normalizzata $\|g\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |g(t)|^2 dt = 1$.

Definizione 7.1. La trasformata di Fourier a finestra in un intorno di u e alla frequenza ξ è definita da

$$Sf(u, \xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t - u)e^{-i\xi t} dt.$$

Poniamo $g_{u,\xi}(t) = g(t - u)e^{i\xi t}$, interpretabile come una nota musicale localizzata in $t = u$ e intorno alla frequenza ξ . La TF a finestra misura allora la correlazione tra questa "nota" ed il segnale $f(t)$:

$$Sf(u, \xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g_{u,\xi}^*(t) dt$$

Essendo g pari, $g_{u,\xi}$ è centrata in u ed il prodotto $f g_{u,\xi}$ isola le componenti di f in un intorno di u . La TF a finestra dipende solamente dalle proprietà di f in quest'intorno. La diffusione

$$\sigma_t^2 = \int_{\mathbb{R}} (t - u)^2 |g_{u,\xi}(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} t^2 |g(t)|^2 dt$$

⁹generalmente si usa una funzione di Hann.

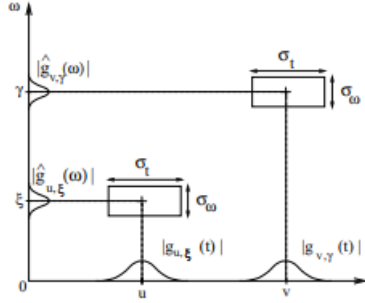


Figura 6: Rettangoli corrispondenti alle due funzioni $g_{u,\xi}$ e $g_{\nu,\gamma}$ nel piano tempo-frequenza.

è indipendente da u e ξ . Applicando la formula di Parseval otteniamo che

$$Sf(u, \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \hat{g}_{u,\xi}^*(\omega) d\omega$$

dipende solo dal comportamento di $\hat{f}(\omega)$ nel dominio di frequenza dove $\hat{g}_{u,\xi}^*$ è non trascurabile. Osserviamo che in base alle proprietà della TF abbiamo

$$\hat{g}_{u,\xi}(\omega) = e^{-iu(\omega-\xi)} \hat{g}(\omega - \xi) \quad \sigma_{\omega}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \omega^2 |\hat{g}(\omega)| d\omega.$$

Cioè la funzione è centrata in ξ e la diffusione in frequenza è indipendente da u e ξ . In un piano *tempo-frequenza* possiamo rappresentare $g_{u,\xi}$ come un rettangolo di taglia $\sigma_t \times \sigma_{\omega}$ centrato in (u, ξ) . Poiché le dimensioni del rettangolo non dipendono dal suo centro, la risoluzione della TF a finestra è costante su tutto il piano.

Indeterminazione Per misurare le componenti di f e \hat{f} in piccoli intorno di u e ξ , dovremmo costruire una finestra g che sia ben localizzata in tempo e per cui l'energia della sua trasformata di Fourier sia concentrata. Ora ciò non è possibile: quel che si guadagna in tempo si perde in frequenza, a causa della relazione di indeterminazione di Heisenberg

$$\sigma_t^2 \sigma_{\omega}^2 \geq \frac{1}{4}$$

dove l'uguaglianza (e quindi la localizzazione minimale in tempo e frequenza) è ottenuta solo dalle gaussiane.

Definizione 7.2. *Lo spettrogramma associato a una TF a finestra è la densità di energia*

$$P_S f(u, \xi) = |Sf(u, \xi)|^2 = \left| \int_{\mathbb{R}} f(t) g(t-u) e^{-i\xi t} dt \right|^2$$

che misura l'energia di f e \hat{f} nell'intorno tempo-frequenza dove è concentrata l'energia di $g_{u,\xi}$.

Esempi di spettrogrammi:

- **Suono puro.** $f(t) = e^{i\xi_0 t} \Rightarrow P_S f(u, \xi) = |\hat{g}(\xi - \xi_0)|^2$ che corrisponde al rettangolo $[\xi_0 - \frac{\sigma_\omega}{2}, \xi_0 + \frac{\sigma_\omega}{2}]$ nel piano tempo-frequenza (cioè una striscia orizzontale di ampiezza σ_ω centrata in ξ_0).
- **Dirac.** $f(t) = \delta(t - u_0) \Rightarrow P_S f(u, \xi) = g^2(u - u_0)$ che corrisponde al rettangolo $[u_0 - \frac{\sigma_t}{2}, u_0 + \frac{\sigma_t}{2}]$ nel piano tempo-frequenza (cioè una striscia verticale di ampiezza σ_t centrata in u_0).
- I **chirps** sono una generalizzazione di queste due situazioni estreme. (Ad esempio quelli lineari corrispondono a strisce oblique comprese tra rette parallele nel piano tempo-frequenza).

Teorema 7.6. *Vale la seguente formula di ricostruzione*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} S f(u, \xi) g(t - u) e^{i\xi t} d\xi du$$

e la conservazione dell'energia

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} |S f(u, \xi)|^2 d\xi du.$$

Riscrittura Possiamo riscrivere la formula di ricostruzione come

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}} \langle f, g_{u,\xi} \rangle g_{u,\xi}(t) d\xi du$$

L'interpretazione dello spettrogramma come densità di energia segue dal fatto che il suo integrale in tempo-frequenza è uguale all'energia del segnale.

Discretizzazione Considerando dei segnali discreti di periodo N , prendiamo $g[n]$ simmetrico e N -periodico di norma unitaria.

Definiamo $g_{m,l}[n] = g[n - m] e^{\frac{i2\pi ln}{N}}$ la cui TF è $\hat{g}_{m,l}[k] = \hat{g}[k - l] e^{\frac{-i2\pi m(k-l)}{N}}$. La TF a finestra è allora

$$S f[m, l] = \langle f, g_{m,l} \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] g[n - m] e^{\frac{-i2\pi ln}{N}}$$

che si calcola con N FFT in tempo $O(N^2 \log_2 N)$.

7.4.1 Frequenza istantanea

Per separare più frequenze istantanee, separiamo le componenti in frequenza grazie a una trasformata di risoluzione sufficiente in frequenza ed in tempo.

Scriviamo un segnale reale f come avente un'ampiezza a ed una fase ϕ :

$$f(t) = a(t) \cos \phi(t) \quad a(t) \geq 0$$

e chiamiamo *frequenza istantanea* $\omega(t) = \phi'(t) \geq 0$.

Attenzione! Esistono differenti valori per $a(t)$ e $\phi(t)$ quindi la frequenza istantanea $\omega(t)$ non è definita in maniera unica!

La parte analitica di f è definita come

$$\hat{f}_a(\omega) = \begin{cases} 2\hat{f}(\omega) & \omega \geq 0 \\ 0 & \omega < 0. \end{cases}$$

Il segnale complesso $f_a(t)$ ammette un prolungamento analitico sul semipiano complesso superiore. A questo punto possiamo scrivere

$$\begin{aligned} f_a(t) &= a(t)e^{i\phi(t)} \\ f(t) &= a(t) \cos \phi(t) \end{aligned}$$

e chiamare $a(t)$ ampiezza analitica di f e $\phi'(t)$ la frequenza analitica istantanea.

L'informazione può essere trasmessa attraverso la sua ampiezza o la sua frequenza istantanea. Parliamo allora di **modulazione di ampiezza** o **modulazione di frequenza**. Quest'ultima è più robusta quando sono presenti rumori bianchi gaussiani. Un messaggio $m(t)$ è inviato attraverso un segnale

$$f(t) = a \cos \phi(t) \quad \text{con } \phi'(t) = \omega_0 + km(t).$$

La larghezza della banda di f è proporzionale a k . Il messaggio è recuperato con una modulazione di frequenza che calcola $\phi'(t)$.

Possiamo controllare l'errore di approssimazione di $Sf(u, \xi)$ per mezzo della frequenza istantanea di f :

Teorema 7.7. *Sia $f(t) = a(t) \cos \phi(t)$. Supponiamo i valori di $a(t)$ e $\phi'(t)$ trascurabili sul supporto $[u - \frac{s}{2}, u + \frac{s}{2}]$ di $g(t - u)$ e supponiamo $\phi'(u) \geq \Delta\omega$. Allora $\forall \xi \geq 0$ vale*

$$Sf(u, \xi) \approx \frac{1}{2}a(u)e^{i(\phi(u) - \xi u)}\hat{g}(\xi - \phi'(u)).$$

Nelle ipotesi del teorema, lo spettrogramma è massimale in $\xi(u) = \phi'(u)$. I punti corrispondenti sono detti *creste*. La frequenza dei punti di cresta dà la frequenza istantanea e possiamo invertire la formula

$$Sf(u, \xi(u)) = \frac{1}{2}a(u)e^{i(\phi(u) - \xi(u)u)}\hat{g}(0)$$

per ricavare l'ampiezza. Tale formula mostra anche che i punti di cresta sono punti in cui la fase è stazionaria: $\frac{\partial \Phi_S(u, \xi)}{\partial u} = \phi'(u) - \xi = 0$.

Frequenze multiple Quando il segnale contiene più linee spettrali di frequenza distinte, la TF a finestra separa le diverse componenti.

Quando invece le linee sono ravvicinate, creano interferenze che distruggono la struttura delle creste.

7.5 Informazione e codifica

La complessità di una successione di simboli può essere misurata dalla taglia minima di una codifica che permette di ricostruirla. La teoria dell'informazione di Shannon mostra che il numero medio di bit per codificare un simbolo dipende dall'entropia del processo aleatorio sottostante.

7.5.1 Successioni tipiche

Sia $A = \{a_k\}_{1 \leq k \leq K}$ un alfabeto e consideriamo una sequenza di simboli di taglia n come i valori delle v.a. X_1, \dots, X_n i.i.d. la cui legge di probabilità è definita da $p(a_k) = \mathbb{P}(X_i = a_k)$. La v.a. $p(X_1, \dots, X_n) = \prod_{k=1}^n p(X_k)$ dà la probabilità di una successione di valori aleatori.

Definizione 7.3. *L'entropia, o incertezza media sui valori presi dalle v.a. X_i è definita da*

$$H = -\mathbb{E}(\log_2(p(X_i))) = -\sum_{k=1}^K p(a_k) \log_2 p(a_k).$$

Osservazione. Si verifica che

$$0 \leq H \leq \log_2 K$$

e che il massimo è raggiunto quando $p(a_k) = \frac{1}{K}$ per ogni $1 \leq k \leq K$; il minimo è 0 quando uno dei simboli ha probabilità 1.

Teorema 7.8. *Se le X_i sono i.i.d. allora*

$$-\frac{1}{n} \log_2 p(X_1, \dots, X_n) \rightarrow H$$

con probabilità 1 quando $n \rightarrow +\infty$.

Ciò ci dice che quasi certamente una sequenza di realizzazioni si trova in un insieme, detto *insieme tipico* T_ϵ^n relativo a $p(x)$:

$$T_\epsilon^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in A^n \mid 2^{-n(H+\epsilon)} \leq p(x_1, \dots, x_n) \leq 2^{-n(H-\epsilon)}\}.$$

Proposizione 7.9. *Per ogni $\epsilon > 0$ vale:*

1. $(x_1, \dots, x_n) \in T_\epsilon^n \Rightarrow H - \epsilon \leq -\frac{1}{n} \log_2 p(x_1, \dots, x_n) \leq H + \epsilon$;
2. $\mathbb{P}((X_1, \dots, X_n) \in T_\epsilon^n) > 1 - \epsilon$ per n grande;
3. $(1 - \epsilon)2^{n(H-\epsilon)} \leq |T_\epsilon^n| \leq 2^{n(H+\epsilon)}$.

Amenità. L'insieme delle successioni tipiche è piccolo, ma è molto probabile che presa una sequenza a caso questa sia tipica!

Codifica. Possiamo codificare attraverso parole binarie più corte le successioni tipiche più probabili, con $\lceil n(H + \epsilon) \rceil + 1$ bit e gli elementi che non appartengono a T_ϵ^n in binario con $\lceil \log_2 K \rceil + 1$ simboli. Il bit aggiuntivo serve a decidere l'appartenenza o meno all'insieme tipico. Notiamo R il numero medio di bit per codificare una sequenza X_1, \dots, X_n .

Teorema 7.10.

$$\exists C \forall \epsilon > 0 \forall n \geq \frac{1}{\epsilon} \quad R \leq H + C\epsilon.$$

Riformulazione. In pratica, per ogni ϵ possiamo trovare una codifica (per n sufficientemente grande) il cui rapporto bit per simbolo sia $R \leq H + \epsilon$.

7.5.2 Codificazione entropica

Sia l_k la lunghezza del codice binario w_k associato ad a_k . Il numero medio di bit necessari alla codifica è

$$R = \sum_{k=1}^K l_k p(a_k).$$

Alberi binari Un codice che soddisfa la condizione di codice prefisso¹⁰ può essere associato a un albero binario, le cui K foglie corrispondono ai simboli a_k dell'alfabeto.

La lunghezza l_k è la profondità della foglia nell'albero.

Ottimizzare un codice prefisso equivale a costruire un albero binario che distribuisce le profondità per minimizzare R .

Lemma 7.11 (Disuguaglianza di Kraft). *Ogni codice prefisso soddisfa*

$$\sum_{k=1}^K 2^{-l_k} \leq 1.$$

Reciprocamente, se $\{l_k\}_{1 \leq k \leq K}$ sono interi positivi che soddisfano la disuguaglianza, allora esiste un codice prefisso di parole binarie $\{w_k\}_{1 \leq k \leq K}$ di lunghezze $\{l_k\}_{1 \leq k \leq K}$.

Teorema 7.12 (Shannon). *Il numero medio di bit di un codice prefisso soddisfa*

$$R \geq H = - \sum_{k=1}^K p(a_k) \log_2 p(a_k).$$

Inoltre esiste un codice prefisso per cui

$$R \leq H + 1.$$

¹⁰le cui parole non sono prefisso di nessuna altra parola del codice.

Codifica a blocchi Possiamo pensare di non codificare ogni simbolo, ma un blocco di simboli alla volta, ciascuno dei quali può essere considerato una v.a. a valori nell'alfabeto A^n .

Il numero medio di bit per simbolo in una codifica a blocchi soddisfa ancora $R \geq H$ ed esiste un codice prefisso a blocchi di taglia n con la proprietà

$$R \leq H + \frac{1}{n}.$$

Ovvero i codici a blocchi utilizzano un numero medio di bit per simbolo che tende all'entropia quando la dimensione n del blocco aumenta.

Huffman L'algoritmo di programmazione dinamica di Huffman costruisce un albero corrispondente a un codice prefisso che minimizza R .

Utilizza l'ordinamento $p(a_k) \leq p(a_{k+1})$ e un raggruppamento dei simboli di probabilità minima.

Tale codifica è più compatta di un codice a taglia fissa ma anche più sensibile al rumore. Un errore in un bit può infatti modificare tutta la successione dei simboli. Bisogna allora utilizzare un codice correttore per identificare gli errori.

7.5.3 Quantizzazione scalare dei segnali

Chiamiamo \tilde{X} l'approssimazione della v.a. reale X . L'obiettivo è di minimizzare $D = \mathbb{E}(|X - \tilde{X}|^2)$.

Una quantizzazione consiste nella decomposizione dell'asse reale in K intervalli di estremi y_k con $y_0 = -\infty$ e $y_K = +\infty$. In seguito associamo ad ogni punto $x \in [y_{k-1}, y_k]$ un valore $Q(x) = a_k$.

Per ottimizzare la quantizzazione dobbiamo scegliere il migliore insieme di intervalli. Per l'operazione inversa occorre scegliere il migliore insieme di $\{a_k\}_k$.

Nel caso in cui i valori a_k siano fissati a priori per minimizzare $|x - Q(x)|$ dobbiamo scegliere $y_k = \frac{a_k + a_{k+1}}{2}$.

Alta risoluzione L'ipotesi di alta risoluzione consiste in poter approssimare $p(x)$ con una costante in ogni intervallo $[y_{k-1}, y_k]$. Detta $\Delta_k = y_k - y_{k-1}$ e $p_k = \mathbb{P}(\tilde{X} = a_k)$, l'ipotesi implica allora che

$$p(x)|_{[y_{k-1}, y_k]} = \frac{p_k}{\Delta_k}.$$

L'errore minimo che si può ottenere è

$$D = \frac{1}{12} \sum_{k=2}^{K-1} p_k \Delta_k^2.$$

Quantizzazione uniforme Si tratta semplicemente del caso particolare $\Delta_k = \Delta$ per ogni $1 \leq k \leq K$. L'errore minimo diventa quindi $D = \frac{\Delta^2}{12}$.

Quantizzazione ottimale L'obiettivo è di minimizzare il numero di bit necessari a codificare \tilde{X} . Definiamo l'entropia differenziale

$$H_d = - \int_{\mathbb{R}} p(x) \log_2 p(x) dx.$$

Ogni quantizzazione ad alta risoluzione ha un'entropia che verifica

$$H \geq H_d - \frac{1}{2} \log_2(12D)$$

ed il minimo è ottenuto nel caso uniforme. Il numero minimo di bit medio $R = H$ è ottenuto per una quantizzazione uniforme e $R = H_d - \frac{1}{2} \log_2(12D)$. L'errore in funzione di R si scrive

$$D(R) = \frac{1}{12} 2^{2H_d} 2^{-2R}.$$

7.6 Tricks to know

- Quando una cosa è difficile nel tempo, passare alle frequenze con una TF.
- $\text{TF}(\text{output}) = \text{TF}(\text{input})\text{TF}(\text{filter})$
- Campionare un segnale è equivalente a una periodizzazione della sua trasformata di Fourier.
- *Digital signal processing is more reliable than analog, because it's less sensitive to the noise when we use discrete time computation, and we can also do more complex computations.*
- Il teorema di campionamento fornisce una "formula di interpolazione con seni cardinali".
- Il teorema di campionamento si applica anche a \hat{f} modificando opportunamente le ipotesi:

Teorema 7.13. *Sia $f(t)$ a supporto in $[-\frac{NT}{2}, \frac{NT}{2}]$. Allora possiamo ricostruire $\hat{f}(\omega)$ a partire da $\hat{f}(\frac{2k\pi}{T})$:*

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}\left(\frac{2k\pi}{T}\right) \text{sinc}\left(\left(\omega - \frac{2k\pi}{T}\right) \frac{NT}{2}\right).$$

Trasformata di Fourier (FT)	$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\omega t} dt$
Trasformata inversa (IFT)	$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega$
Serie di Fourier	$\hat{f}(e^{i\omega}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f[k]e^{-i\omega k}$
Trasformata discreta (DFT)	$\hat{f}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n]e^{-\frac{2i\pi kn}{N}}$
Trasformata discreta inversa (IDFT)	$f[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}[k]e^{\frac{2i\pi kn}{N}}$
Trasformata a finestra (STFT)	$Sf(u, \xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t-u)e^{-i\xi t} dt.$

Tabella 7: Definizioni di Fourier.

8 Riassunti

8.1 Fourier

Il seguente schema lega le operazioni nel dominio del tempo e della frequenza:

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{segnale} & & \text{campionamento} & & \text{periodizzazione} \\
 f(t) & \longrightarrow & f_e[n] = f(nT) & \longrightarrow & f_p[n] = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f_e[n - mN] \\
 \text{FT} & & \text{DTFT } 2\pi\text{-periodica} & & \text{DFT} \\
 \hat{f}(\omega) & \longrightarrow & \hat{f}_e(e^{i\omega}) & \longrightarrow & \hat{f}_p[k]
 \end{array}$$

Legame DFT e FT:

$$\hat{f}_p[k] = \frac{1}{T} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f} \left(\frac{2\pi}{NT} (k - nN) \right)$$

8.2 Sulla convoluzione

1. La convoluzione di due rettangoli è un triangolo;
2. la convoluzione di n rettangoli tende a una gaussiana per $n \rightarrow \infty$;

8.3 Un piccolo dizionario di teoria dei segnali

Italiano	Français	English
passa basso	passe-bas	low pass
passa banda	passe-bande	band pass
risposta impulsiva	réponse impulsionnelle	impulse response
sonoro/sordo	voisé/non voisé	voiced/unvoiced
SSL (stazionario in senso largo)	SSL (stationnaire au sens large)	WSS (weak sense stationary)
TF a finestra	TF à fenêtre	STFT Short Time Fourier Transform

Tabella 8: Un piccolo dizionario trilingue.

Elenco delle figure

1	Campionamento e interpolazione di un segnale	18
2	Aliasing	19
3	Filtro di Wiener - processo gaussiano	26
4	Filtro di Wiener - processo non gaussiano	27
5	Modello per la parola	29
6	Piano tempo-frequenza	32

Elenco delle tabelle

1	Equazione del calore	14
2	Equazione di avvezione	15
3	Esempi di filtri.	16
4	Alcuni filtri.	17
5	Esempi di filtri discreti.	20
6	Esempi di filtro causale e trasformazione zeta.	22
7	Definizioni di Fourier.	39
8	Un piccolo dizionario trilingue.	40

Riferimenti bibliografici

- [1] Stéphane Mallat. *Traitement du signal*. École polytechnique, Département de Mathématiques appliquées, 2018.
- [2] Grégoire Allaire. *Analyse numérique et optimisation: Une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique*. Editions Ecole Polytechnique, 2005.