Distribuzioni

GGC

colabufo@mail.dm.unipi.it

2019

Indice

1 Introduzione

La teoria delle distribuzioni nasce dall'esigenza di considerare soluzioni di equazioni alle derivate parziali in senso sufficentemente generale da non essere nemmeno differenziabili.

La definizione di distribuzione permette di dare una visione ancora diversa alla nozione di funzione. Inizialmente una funzione è una scatola nera che associa ad un punto del dominio un valore reale o complesso; in seguito, nella teoria dell'integrazione di Lebesgue una funzione è in realtà una classe di equivalenza di funzioni uguali quasi ovunque. Qui la vediamo come una forma lineare continua su un certo spazio di funzioni.

L'idea è di identificare alcune applicazioni con degli elementi del loro insieme di partenza. Ciò è giustificato dal fatto che per $2 < p < \infty$ il duale topologico di $L^p([0,1])$ è uno spazio più grande che contiene lo stesso $L^p([0,1])$; inoltre se q è il coniugato di p (nel senso che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) allora abbiamo un isomorfismo isometrico $L^q([0,1]) \simeq L^p([0,1])'$ per $p \in]1, +\infty[$. In particolare più lo spazio $L^p([0,1])$ è piccolo, più il suo duale topologico $L^q([0,1])$ è grande. Allo stesso modo definiamo $\mathcal{D}'((0,1))$ partendo da $C_c^\infty((0,1))$ strettamente contenuto in $L^p([0,1])$ per $p \in]1, +\infty[$. Ciò è ispirato dalla meccanica quantistica, in cui gli osservabili sono le medie di una funzione rispetto al quadrato del modulo della funzione d'onda. Da cui l'idea di sostituire alla nozione intuitiva di funzione il dato delle sue medie.

2 Iniziamo dall'inizio

Definizione Sia $n \geq 1$ un intero e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto. Una distribuzione T su Ω è una forma $\mathbb{R}$-lineare su $C_c^\infty(\Omega)$ a valori reali che verifica la seguente proprietà di continuità:

$$\forall K \subset \Omega \text{ compatto } \exists C_K > 0 \, \exists p_k \in \mathbb{N} \, \forall \psi \in C_c^\infty(\Omega) \text{ supp}(\psi) \subset K$$
$$|\langle T, \psi \rangle| \leq C_k \max_{|\alpha| \leq p_K} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \psi(x)|.$$

Anche non reale Possiamo anche cambiare $\mathbb{R}$ con $\mathbb{C}$ e considerare la forma lineare a valori complessi.

Definizione Se p_K può essere scelto indipendentemente da K, cioè $\exists p \in \mathbb{N} \, \forall K \subset \Omega \; p_k \leq p$ allora diciamo che T è una distribuzione di ordine $\leq p$. L'ordine di una distribuzione è il minimo p per cui T è di ordine $\leq p$.

Notazioni Lo spazio vettoriale (su $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) delle distribuzioni è indicato con $\mathcal{D}'(\Omega)$ e spesso $\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$.

Esempio Ad ogni $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ possiamo associare

$$T_f \colon \psi \mapsto \int_\Omega f(x)\psi(x)dx$$

distribuzione di ordine 0 su Ω.

2.1 Distribuzioni e funzioni

Proposizione 2.1. *L'applicazione lineare*

$$\begin{aligned} i \colon L^1_{loc} &\to \mathcal{D}'(\Omega) \\ f &\mapsto T_f \end{aligned}$$

è iniettiva.

Il che significa che possiamo identificare una funzione localmente integrabile con la distribuzione da lei identificata.

Massa di Dirac Per ogni punto $x_0 \in \Omega$ possiamo associare

$$\langle \delta_{x_0}, \psi \rangle = \psi(x_0)$$

per $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$. Appare evidente che δ_{x_0} è una distribuzione di ordine 0.

Valore principale di $\frac{1}{x}$ Sebbene $x \mapsto \frac{1}{x}$ non sia localmente integrabile, sfruttando la simmetria possiamo definire la distribuzione di ordine 1:

$$\left\langle vp\frac{1}{x}, \psi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\psi(x)}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\psi(x) - \psi(-x)}{x} dx$$

2.2 Convergenza

Definizione Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $(\psi_n)_{n\geq 1}$ una successione di elementi di $C_c^\infty(\Omega)$ e $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$. Allora $\psi_n \to \psi$ in $C_c^\infty(\Omega)$ se e solo se

(a) $\exists K \subset \Omega$ compatto per cui $\forall n \geq 1$ $\mathrm{supp}(\psi_n) \subset K$

(b) $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$ multiindice $\partial^\alpha \psi_n \to \partial^\alpha \psi$ uniformementesu Ω

Proposizione 2.2. *Per ogni $(\psi_n)_{n\geq 1} \subset C_c^\infty(\Omega)$ tale che $\psi_n \to \psi$ vale*

$$\langle T, \psi_n \rangle \to \langle T, \psi \rangle$$

Definizione Una distribuzione T si dice positiva se per ogni $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ positiva, allora $\langle T, \psi \rangle \geq 0$.

Teorema 2.3. *Ogni distribuzione positiva su un aperto di $\mathbb{R}^n$ è di ordine 0.*

Corollario 2.4. *Ogni distribuzione positiva si estende in modo unico ad una misura di Radon positiva su Ω, cioè ad una forma lineare positiva su $C_c(\Omega)$.*

Definizione Una successione di distribuzioni $(T_n)_n$ converge a T se per ogni $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\langle T_n, \psi \rangle \to \langle T, \psi \rangle$$

Osserviamo che ogni successione di funzioni localmente integrabili che converge ad f localmente integrabile converge ad f come distribuzione.

Dipoli La nozione di dipolo, oltre che in fisica, appare nel contesto dell'analisi numerica delle equazioni differenziali. Rimpiazzando la derivata con una differenza finita non si fa altro che approssimare una derivata con un dipolo che converge come distribuzione alla derivata.

Proposizione 2.5. *Sia $(f_n)_{n\geq 1}$ una successione di funzioni misurabili su Ω, non negative quasi ovunque e a supporto supp$(f_n) \subset B(x_0, r_n)$ con $x_0 \in \Omega$ fissato. Supponiamo che $\int_\Omega f_n(x)dx \to 1$. Allora $\lim\limits_{r\to 0^+} f_n \to \delta_{x_0}$.*

Teorema 2.6 (Principio di limitatezza uniforme)**.** *Sia $K \subset \Omega$ un compatto. Sia $(T_n)_n$ una successione di distribuzioni tali che $(\langle T_n, \psi \rangle)_n$ converge per ogni $\psi \in C^\infty(\Omega)$ a supporto in K. Allora*

$$\exists p \geq 0 \; \exists C > 0 \; |\langle T_n, \psi \rangle| \leq C \max_{|\alpha|\leq p} \sup_{x\in K} |\partial^\alpha \psi(x)|$$

per ogni n e $\psi \in C^\infty(\Omega)$ a supporto in K.

Corollario 2.7. *Se $\forall \psi \in C_c^\infty(\Omega)$ la successione $(\langle T_n, \psi \rangle)_n$ converge, allora esiste $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tale che*

$$\forall \psi \in C_c^\infty(\Omega) \lim_{n\to+\infty} \langle T_n, \psi \rangle = \langle T, \psi \rangle$$

ovvero $T_n \to T$.

Proposizione 2.8. *Siano $T_n \to T$ (in $\mathcal{D}'(\Omega)$) e $\psi_n \to \psi$ in $C_c^\infty(\Omega)$. Allora $\langle T_n, \psi_n \rangle \to \langle T, \psi \rangle$.*

3 Operazioni sulle distribuzioni

3.1 Derivazione

Definizione Definiamo la derivata parziale di una distribuzione come

$$\langle \partial_{x_j} T, \psi \rangle = - \langle T, \partial_{x_j} \psi \rangle$$

per ogni $j = 1, \dots, n$ e $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Proposizione 3.1. *Sia $f \in C^1(\Omega)$. Allora $\partial_{x_j} T_f = T_{\partial_{x_j} f}$ per $j = 1, \dots, n$.*

Funzione di Heaviside La funzione $H(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ ha per derivata nel senso delle distribuzioni $H' = \delta_0$.

Proposizione 3.2. *Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e $T \in \mathcal{D}'(I)$ tale che $T' = 0$. Allora T è una distribuzione definita da una funzione constante.*

Lemma 3.3. *Per una distribuzione T, per ogni $j \neq k \in \{1, \dots, n\}$ si ha*

$$\partial_{x_j} \partial_{x_k} T = \partial_{x_k} \partial_{x_j} T$$

Occhio! Il controesempio al lemma di Schwarz:

$$f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

non è un controesempio per le distribuzioni, nel senso che la simmetria delle derivate vale ancora per T_f.

Definizione Per ogni multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ definiamo

$$\langle \partial_x^\alpha T, \psi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial_x^\alpha \psi \rangle$$

per ogni $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Massa di Dirac Le derivate della massa di Dirac sono date da

$$\partial_x^m \delta_{x_0} = \delta_{x_0}^{(m)}$$

dove $\delta_{x_0}^{(m)}$ è la distribuzione di ordine m definita da

$$\langle \delta_{x_0}^{(m)}, \psi \rangle = (-1)^m \langle \delta_{x_0}, \partial_x^m \psi \rangle = (-1)^m \psi^{(m)}(x_0)$$

No problem Ogni distribuzione può essere derivata tante volte quanto si vuole!

Proposizione 3.4. *Sia $T_n \to T$. Allora per ogni multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ $\partial_x^\alpha T_n \to \partial_x^\alpha T$.*

Esempio $(\ln|x|)' = vp\frac{1}{x}$

3.2 Moltiplicazione

Definizione Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto. Per ogni $a \in C^\infty(\Omega)$ e per ogni $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ definiamo $aT \in \mathcal{D}'(\Omega)$ come:

$$\langle aT, \phi \rangle = \langle T, a\phi \rangle$$

per ogni $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Proposizione 3.5. *Se $a \in C^\infty(\Omega)$ e $(T_n)_n$ è una successione di distribuzioni su Ω, con $T_n \to T$, allora $aT_n \to aT$.*

Proposizione 3.6. *Nel prodotto tra una funzione $a \in C^\infty(\Omega)$ e una distribuzione $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ vale la formula di Leibnitz:*

$$\partial^\alpha(aT) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\partial^{\alpha-\beta} a) \partial^\beta T$$

]

3.3 Locale e globale

Definizione Siano $\omega \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperti. Ad ogni distribuzione $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ possiamo associare $T|_\omega \in \mathcal{D}'(\omega)$:

$$\langle T|_\omega, \phi \rangle = \langle T, \Phi \rangle$$

dove $\phi \in C_c^\infty(\omega)$ e Φ è il suo prolungamento a 0 su $\Omega \setminus \omega$.

Proposizione 3.7. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e $(\omega_i)_{i \in I}$ una famiglia di aperti di Ω tali che*

$$\Omega = \cup_{i \in I} \omega_i$$

e sia $(T_i)_{i \in I}$ una famiglia di distribuzioni $T_i \in \mathcal{D}'(\omega_i)$. Supponiamo

$$\forall i, j \in I \ \omega_i \cap \omega_j \neq \varnothing \Rightarrow T_i|_{\omega_i \cap \omega_j} = T_j|_{\omega_i \cap \omega_j}.$$

Allora esiste unica $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tale che $\forall i \in I \ T|_{\omega_i} = T_i$.

Definizione Siano Ω_1 e Ω_2 due aperti di $\mathbb{R}^n$. Sia $\chi \colon \Omega_1 \to \Omega_2$ un $C^\infty-$diffeomorfismo e $T \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$. Possiamo definire $T \circ \chi \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$:

$$\langle T \circ \chi, \phi \rangle = \langle T, \chi_*(\phi) \rangle \quad \phi \in C_c^\infty(\Omega_1)$$

dove per ogni $y \in \Omega_2$

$$\chi_*(\phi)(y) = \phi(\chi^{-1}(y)) |\det(D_\chi(\chi^{-1}(y)))|^{-1}$$

Come al solito Se $f \in L^1_{loc}(\Omega_2)$ allora $T_f \circ \chi = T_{f \circ \chi}$ ovvero il cambiamento di variabili per le distribuzioni coincide con quello solito applicato a funzioni integrabili.

Continuità Si verifica senza sorpresa che se $T_n \to T$ allora $T_n \circ \chi \to T \circ \chi$.

Cambiamento di variabili in una massa di Dirac Applicando la definizione, per $y_0 \in \Omega_2$ e $\chi(x_0) = y_0$ abbiamo:

$$\delta_{y_0} \circ \chi = |\det(D_\chi(x_0))|^{-1} \delta_{x_0}$$

e nel caso in cui $\chi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è semplicemente $\chi \colon x \mapsto \lambda x$ per $\lambda \neq 0$:

$$(\partial^\alpha \delta_0) \circ \chi = |\lambda|^{-(n+|\alpha|)} \partial^\alpha \delta_0$$

per $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Casi semplici Se il diffeomorfismo è $A \in GL_n(\mathbb{R})$ ovvero A è una matrice quadrata invertibile nei casi particolari in cui:

- A è una rotazione o simmetria ortogonale ($A \in O_n(\mathbb{R})$):

$$\langle T \circ A, \phi \rangle = \langle T, \phi \circ A^{-1} \rangle$$

- $A = \lambda I$ è una omotetia:

$$\langle T \circ (\lambda I), \phi \rangle = |\lambda|^{-n} \langle T, \phi \lambda^{-1} \cdot \rangle$$

Se invece operiamo una traslazione $\tau_v \colon x \mapsto x + v$ allora

$$\langle T \circ \tau_v, \phi \rangle = \langle T, \phi \circ \tau_{-v} \rangle$$

3.4 Derivazione e integrazione

Proposizione 3.8. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\phi \in C^\infty(\Omega_x \times \mathbb{R}^n_y)$ a supporto in $K \times \mathbb{R}^n$ con $K \subset \Omega$ compatto. Allora $y \mapsto \langle T, \phi(\cdot, y) \rangle$ è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\partial_y^\alpha \langle T, \phi(\cdot, y) \rangle = \langle T, \partial_y^\alpha \phi(\cdot, y) \rangle .$$

Proposizione 3.9. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\phi \in C^\infty(\Omega_x \times \mathbb{R}^n_y)$. Allora*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle T, \phi(\cdot, y) \rangle \, dy = \left\langle T, \int_{\mathbb{R}^n} \phi(\cdot, y) dy \right\rangle .$$

Problema! Tutte le operazioni non lineari sulle funzioni continue non si generalizzano alle distribuzioni. Non è possibile dare un senso a $F(T)$ se $F \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non affine benché di classe C^∞ e $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

3.5 Formula dei salti

Teorema 3.10. *Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^1 a tratti, con un numero finito di punti di discontinuità di prima specie nei punti $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Allora la derivata di f nel senso delle distribuzioni è data da:*

$$f' = \left(f|_{\mathbb{R}\setminus\{a_1,\ldots,a_n\}}\right)' + \sum_{k=1}^{n} (f(a_k + 0) - f(a_k - 0))\delta_{a_k}$$

$\{f'\}$ Osserviamo che $\{f'\} := \left(f|_{\mathbb{R}\setminus\{a_1,\ldots,a_n\}}\right)'$ non è definita su $\mathbb{R}$ ma solo nei punti dove è continua, ed è dunque una funzione misurabile definita quasi ovunque. Per ipotesi f' è limitata in un intorno dei punti di discontinuità il che rende $\{f'\}$ integrabile e dunque una distribuzione su $\mathbb{R}$.

Definizione Un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è detto *a bordo* di classe C^k in $\mathbb{R}^n$ se:

(a) la frontiera $\partial\Omega$ è una ipersuperficie di classe C^k;

(b) localmente Ω è da un solo lato rispetto a $\partial\Omega$.

La condizione (b) significa che $\forall x_0 \in \Omega\ \exists \omega_0 \subset \mathbb{R}^n$ aperto tale che $x_0 \in \omega_0$ e $\exists \rho_0 \in C^k(\omega_0)$ tale che:

$$\begin{aligned} \forall x \in \omega_0 \quad \nabla\rho_0(x) &\neq 0 \\ \partial\Omega \cap \omega_0 &= \{x \in \omega_0 \mid \rho_0(x) = 0\} \\ \Omega \cap \omega_0 &= \{x \in \omega_0 \mid \rho_0(x) < 0\} \end{aligned}$$

. Poniamo allora il vettore normale unitario in $x \in \partial\Omega \cap \omega_0$ che punta all'esterno di Ω:

$$\nu(x) = \frac{\nabla\rho(x)}{|\nabla\rho(x)|}$$

In questo modo $\Omega \cup \partial\Omega$ è una sottovarietà con bordo di $\mathbb{R}^n$ di dimensione n.

Teorema 3.11. *Vale la formula di Gauss-Green in $\mathcal{D}'$: se Ω è un aperto con bordo di classe C^1 di $\mathbb{R}^n$ allora:*

$$\forall j = 1, \ldots, n \quad \partial_{x_i}(\mathbb{1}_\Omega) = -\nu_j \sigma$$

dove $\nu(x)$ è il vettore unitario normale al bordo $\partial\Omega$ nel punto x che punta verso l'esterno di Ω e $\sigma \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ è la distribuzione definita da

$$\langle \sigma, \phi \rangle = \int_{\partial\Omega} \phi d\sigma$$

dove $d\sigma$ è l'elemento di superficie su $\partial\Omega$.

Teorema 3.12. *Siano Ω un aperto con bordo di classe C^1 di $\mathbb{R}^n$ e $f \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega$ tale che*

1. la restrizione di f a Ω si prolunga in modo C^1 su un intorno aperto di $\overline{\Omega}$;

2. la restrizione di f a $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ si prolunga in modo C^1 su un intorno aperto di $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$.

Allora la funzione f è localmente integrabile su $\mathbb{R}^n$ e

$$\forall j = 1, \dots, n \quad \partial_{x_j} f = \{\partial_{x_j} f\} + [f]_{\partial\Omega} \nu_j \sigma$$

dove

$$\begin{aligned} \{\partial_{x_j} f\}(x) =& \partial_{x_j} f(x) \text{ per } x \in \mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega \\ [f]_{\partial\Omega}(x) =& \lim_{t \to 0^+} (f(x + t\nu(x)) - f(x - t\nu(x))) \text{ per } x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

Esempio Onde di choc e Rankine-Hugoniot.

Riassunto della prossima sezione: il prodotto di convoluzione tra una C_c^∞ ed una distribuzione si estende ad ogni distribuzione su $\mathbb{R}^n$. Per ogni $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto lo spazio $C_c^\infty(\Omega)$ è denso in $\mathcal{D}'(\Omega)$.

3.6 Supporto e convoluzione

Definizione Per $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ definiamo:

$$supp(T) := \cap_{F \in \mathcal{F}(T)} F$$

dove

$$\mathcal{F}(T) := \{F \subset \Omega \mid F \text{ chiuso e } T|_{\Omega \setminus F} = 0\}.$$

Proposizione 3.13. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e $S, T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Allora*

(a) $T|_{\Omega \setminus supp(T)} = 0$;

(b) $\forall \psi \in C_c^\infty(\Omega)$ $supp(\psi) \cap supp(T) = \varnothing \Rightarrow \langle T, \psi \rangle = 0$;

(c) $supp(T + S) \subset supp(T) + supp(S)$;

(d) $\forall a \in C^\infty(\Omega)$ $supp(aT) \subset supp(a) \cap supp(T)$;

(e) $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$ $supp(\partial_x^\alpha T) \subset supp(T)$.

Massa di Dirac $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$ $supp(\partial_x^\alpha \delta_{x_0}) = \{x_0\}$.

Attenzione! Sebbene $\phi = 0$ su $supp(f)$ con $f \in C(\Omega)$ implichi $\phi f = 0$, $\phi = 0$ su $supp(T)$ **non implica** che $\langle T, \phi \rangle = 0$. Sia $\theta \in C^\infty(\mathbb{R})$ tale che $\theta|_{[-1,1]} = 1$ e che $supp(\theta) \subset]-2, 2[$. Prendiamo $\phi(x) = x^2 \theta(x)$, $T = \delta_0''$. Allora

$$\langle T, \phi \rangle = 2 \text{ anche se } \phi(0) = 0$$

a causa del fatto che $\phi = 0$ su $supp(\delta_0'') = \{0\}$ ma non su un intorno aperto del supporto.

Definizione Per un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ notiamo il sottospazio vettoriale

$$\mathcal{E}'(\Omega) : \{T \in \mathcal{D}'(\Omega) \mid \mathit{supp}(T) \text{ compatto in } \Omega\}.$$

Potendo ignorare le funzioni test al di fuori del supporto delle distribuzioni estendiamo la dualità e considerare le distribuzioni a supporto compatto come forme lineari continue sullo spazio delle funzioni C^∞ con la topologia della convergenza uniforme sui compatti delle derivate di ogni ordine.

Proposizione 3.14. *Sia $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$. Per ogni $\phi \in C^\infty(\Omega)$ il valore di $\langle T, \chi\phi\rangle$ è indipendente da $\chi \in C_c^\infty(\Omega)$ che vale $\chi = 1$ su un intorno di supp(T). Dunque è ben definito il valore*

$$\langle T, \phi\rangle := \langle T, \chi\phi\rangle$$

per $\chi \in C_c^\infty(\Omega)$ che valga 1 su un intorno aperto di supp(T).

Proposizione 3.15. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Allora*

(a) ogni distribuzione $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ ha ordine finito;

(b) $\forall T \in \mathcal{E}'(\Omega)\ \exists K \subset \Omega$ compatto $\exists p \in \mathbb{N}\ \exists C > 0$ tali che

$$\forall \phi \in C^\infty(\Omega) \quad |\langle T, \phi\rangle| \leq C \max_{|\alpha|\leq p} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \phi(x)|$$

(c) Se $(\phi_n)_n$ è una successioni di funzioni di $C^\infty(\Omega)$ tale che $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n\ \partial^\alpha \phi_n \to \partial^\alpha \phi$ uniformemente sui compatti di Ω allora

$$\forall T \in \mathcal{E}'(\Omega) \quad \langle T, \phi_n\rangle \to \langle T, \phi\rangle$$

Definizione Possiamo prolungare a 0 una distribuzione a supporto compatto ponendo

$$\langle \dot{T}, \phi\rangle_{\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n), C^\infty(\mathbb{R}^n)} := \langle T, \phi|_\Omega\rangle_{\mathcal{E}'(\Omega), C^\infty(\Omega)}$$

Teorema 3.16. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $x_0 \in \Omega$ e $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ a supporto supp$(T) \subset \{x_0\}$. Allora esiste una successione $(a_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ di numeri reali o complessi tali che*

$$|\alpha| > \textit{ordine di } T \Rightarrow a_\alpha = 0$$

$$T = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \partial^\alpha \delta_{x_0}$$

Notazioni Nel seguito $\widetilde{\phi}(x) = \phi(-x)$ e $\tau_x : y \to x + y$.

Definizione Per ogni $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ definiamo

$$T * \phi(x) = \langle T, \phi(x - \cdot)\rangle = \langle T, (\tau_x)_* \widetilde{\phi}\rangle$$

Proposizione 3.17. *Vale la maggiorazione*

$$\mathit{supp}(T * \phi) \subset \mathit{supp}(T) + \mathit{supp}(\phi)$$

Proposizione 3.18. *Il prodotto di convoluzione* $T * \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *e vale* $\partial_x^\alpha(T * \phi) = (\partial_x^\alpha T) * \phi = T * \partial_x^\alpha \phi$.

Teorema 3.19. *Siano* $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *e* $(\zeta_\epsilon)_{\epsilon>0}$ *una successione regolarizzante. Posto* $T_\epsilon := T * \zeta_\epsilon$ *allora* $\forall \epsilon > 0$ $T_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *e* $T_\epsilon \to T$.

Teorema 3.20 (Densità di $C_c^\infty(\Omega)$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$)**.** *Siano* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *aperto e* $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. *Allora esiste una successione* $(T_n)_n$ *di funzioni* $C_c^\infty(\Omega)$ *tale che* $T_n \to T$.

Osservazione

- La convoluzione con una funzione C^∞ trasforma una disribuzione in una funzione di classe C^∞;
- La convoluzione "trasforma" la convergenza delle distribuzioni in convergenza uniforme.

3.7 Prodotto tensoriale

Definizione Siano $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^m$ e $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ aperti. Siano $S \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$ e $T \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$. Definiamo una distribuzione $S \otimes T$ sull'aperto $\Omega_1 \times \Omega_2 \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$:

$$\langle S \otimes T, \phi \rangle = \langle S, \langle T, \phi(x_1, \cdot) \rangle \rangle$$

per ogni $\phi \in C_c^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Proposizione 3.21. *Siano* $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^m$ *e* $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ *aperti. Siano* $S \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$ *e* $T \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$. *Vale l'uguaglianza:*

$$\langle S \otimes T, \phi \rangle = \langle S, \langle T, \phi(x_1, \cdot) \rangle \rangle = \langle T, \langle S, \phi(\cdot, x_2) \rangle \rangle$$

per ogni $\phi \in C_c^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

4 Mantra

4.1 Fourier

Proprietà della trasformazione di Fourier per le funzioni.

1. $\mathcal{F}\phi(\xi) = \int e^{-i\xi\cdot x}\phi(x)dx$
2. $\partial_{\xi_i}\mathcal{F}\phi(\xi) = \mathcal{F}(-ix_i\phi)(\xi)$
3. $\mathcal{F}(\partial_{x_i}\phi)(\xi) = i\xi_i\mathcal{F}\phi(\xi)$
4. $\mathcal{F}(\tau_{a*}\phi)(\xi) = e^{-i\xi a}\mathcal{F}\phi(\xi)$
5. $\mathcal{F}(e^{iax}\phi)(\xi) = \tau_{a*}\mathcal{F}\phi(\xi) = \mathcal{F}\phi(\xi - a)$
6. $\langle f, g\rangle_{L^2} = \frac{1}{(2\pi)^n}\langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g\rangle_{L^2}$

Proprietà della trasformazione di Fourier per le distribuzioni.

1. $\langle \mathcal{F}T, \phi\rangle = \langle T, \mathcal{F}\phi\rangle$
2. $\mathcal{F}(\partial_{x_k}T) = i\xi_k\mathcal{F}T$
3. $\mathcal{F}(x_kT) = i\partial_{\xi_k}\mathcal{F}T$
4. $\mathcal{F}(T\tau_a) = e^{ia\xi}\mathcal{F}T$
5. $\mathcal{F}(e^{-iax}T) = (\mathcal{F}T)\circ\tau_a$

Identità utilissime.

1. $\mathcal{F}^{-1}T = \frac{1}{2\pi}\widetilde{\mathcal{F}T}$
2. $\mathcal{F}\mathcal{F}T = (2\pi)^n\widetilde{T}$
3. $\mathcal{F}(T * S) = \mathcal{F}T\mathcal{F}S$

Uguaglianze pratiche.

1. $\mathcal{F}\delta_0 = 1$
2. $\mathcal{F}\delta_a = e^{-i\xi a}$
3. $\mathcal{F}(\partial^\alpha\delta_a) = (i\xi)^\alpha e^{-i\xi a}$
4. $\mathcal{F}(\partial^\alpha\delta_0) = (i\xi)^\alpha$
5. $\mathcal{F}1 = (2\pi)^n\delta_0$
6. $\mathcal{F}x^\alpha = (2\pi)^n i^{|\alpha|}\partial^\alpha\delta_0$

Gaussiane.

1. $\mathcal{F}\left(\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det A}}e^{-\frac{1}{2}\langle A^{-1}x, x\rangle}\right) = e^{-\frac{1}{2}\langle A\xi, \xi\rangle}$

4.2 Funzioni e spazi di funzioni

1. $C_c * L^1_{loc}$ è continua;
2. $C_c^\infty * L^1_{loc}$ è C^∞;
3. $C_c^m * L^1_{loc}$ è C^m;
4. $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ è denso in $C_c(\mathbb{R}^n)$
5. $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ è denso in $L^p(\mathbb{R}^n)$ per $p < \infty$;
6. $C_c^\infty(\Omega)$ è denso in $L^p(\Omega)$ per $p < \infty$;

5 Esercizi e utili

5.1 Funzioni C^∞

Esercizio 1. *Sia $n \geq 1$ ed $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Allora $x \mapsto \frac{f(x)}{x^n}$ si prolunga in una funzione $C^\infty(\mathbb{R})$ se e solo se $\forall k = 0, \dots, n-1 f^{(k)}(0) = 0$.*

Esercizio 2. *Ogni $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ si decompone come differenza di due funzioni $C^\infty(\mathbb{R})$ positive: $f = f_1 - f_2$. Ogni $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ si decompone come differenza di due funzioni $C_c^\infty(\mathbb{R})$ positive: $f = f_1 - f_2$.*

Esercizio 3. *I chiusi di $\mathbb{R}^n$ che sono supporto di funzioni $C^\infty(\mathbb{R})$ sono caratterizzati da:*

$$F = supp(f) \iff F = \overline{\mathring{F}}$$

Esercizio 4 (Teorema di Borel)**.** *Sia $(a_n)_n$ una successione di numeri reali. Allora esiste una funzione $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ tale che $f^{(n)} = a_n$.*

Esercizio 5 (Parti finite di Hadamard)**.** *Sia $\alpha < -1$ non intero ($\alpha \notin \mathbb{Z}$). Allora per ogni funzione $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ esiste un'unica decomposizione*

$$\int_\varepsilon^\infty x^\alpha \varphi(x) dx = P_\varphi^\alpha(\varepsilon) + R_\varphi^\alpha(\varepsilon)$$

dove $P_\varphi^\alpha(\varepsilon)$ è una combinazione lineare di potenze strettamente negative di ε e $R_\varphi^\alpha(\varepsilon)$ ammette limite per $\varepsilon \to 0$. Inoltre

$$\langle pf(x_+^\alpha), \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} R_\varphi^\alpha(\varepsilon)$$

(pf = parte finita) definisce una distribuzione su $\mathbb{R}$.

Esercizio 6. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f \in C^\infty(\Omega)$ e $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Allora*

$$fT = 0 \Rightarrow supp(T) \subset \{x \mid f(x) = 0\}$$

Se f ha degli zeri isolati $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ di ordine rispettivamente $n_1, n_2, \dots$ allora

$$T = \sum_i \sum_{k_i < n_i} c_{k_i} \delta_{\alpha_i}^{(k)}$$

.

5.2 Tabelle utili

Equazione	Soluzione
$xT = 1$	$T = vp\frac{1}{x} + c\delta_0$
$xT = pf(x_+^\alpha)$	$T = pf(x_+^{\alpha-1}) + c\delta_0$
$xT = \delta_0$	$T = -\delta_0' + c\delta_0$
$xT = vp\frac{1}{x}$	$T = -vp\frac{1}{x}' + c\delta_0$

Tabella 1: Soluzione di equazioni $xT = S$

Equazione	Soluzione
$\sin xT = 0$	$T = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\delta_{n\pi}$
$x^3 \sin xT = 0$	$T = \sum_{k\leq 3} c_k\delta_0^{(k)} + \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} c_n\delta_{n\pi}$
$P(x)T = 0$	$T = \sum_i \sum_{k_i<n_i} c_{k_i}\delta_{\alpha_i}^{(k)}$
$e^{-1/x^2}T = 0$	$T = \sum_{finita} c_k\delta_0^{(k)}$

Tabella 2: Soluzione di equazioni $fT = 0$

Successione	Limite
$n(\delta_{1/n} - \delta_{-1/n})$	$-2\delta_0'$
$n^2(\delta_{1/n} + \delta_{-1/n} - 2\delta_0)$	δ_0''
$n^3(\delta_{1/n} - \delta_{-1/n} - 2\delta_0')$	diverge
$(\delta_0 - \frac{1}{n}\delta_{1/n})''$	δ_0''

Tabella 3: Limiti