Il problema di Kadinson-Singer

GGC
colabufo@mail.dm.unipi.it

2018

Indice

1 Introduction

Nel 1959 Richard Kadinson e Isadore Singer enunciano una congettura nella teoria degli operatori in spazi di Hilbert. Nel loro articolo mostrarono un caso ma lasciarono aperto il secondo. Nei successivi 50 anni questa congettura si è rilevata legata a diversi altri problemi in differenti aree della matematica, attraverso analisi complessa, teoria dei grafi, processing dei segnali e infine in geometria. È stata infine provata nel 2013 da Adam Marcus, Daniel Spielman e Nikhil Srivastava.

Una formulazione dell'enunciato è : Ogni stato puro su $D(\ell^2)$, l'algebra degli operatori diagonali sullo spazio di Hilbert $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$ ammette un'unica estensione ad uno stato puro su $B(\ell^2)$, algebra degli operatori limitati su ℓ^2. Tuttavia tale problema ammette una miriade di formulazioni equivalenti, di cui alcune sorprendentemente elementari.

La congettura ha anche ripercussioni applicative: se il vettore x è rappresenta un segnale, utilizzando i frames possiamo ricostruire x partendo da una serie di misure ridondanti. Allora ci si può domandare quali dati sono persi nella trasmissione del segnale e se possiamo ricostruire x a partire da un sottoinsieme del frame. La congettura (ormai teorema) di Kadison–Singer permette di affermare di sì. Ogni frame può essere partizionato in frame più piccoli con limitazioni uniformi sia sul numero di frames che sulla perdità di informazione.

La nascita di tale congettura risiede nella meccanica quantistica, nella quale il comportamento di un sitema è analizzato a partire dalla misura di alcune quantità osservabili, che matematicamente non sono altro che operatori autoaggiunti $A \in B(H)$. Uno stato si interpreta allora come una distribuzione di probabilità sullo spazio delle quantità osservabili. Fissata una base ortonormale dello spazio di Hilbert gli osservabili corrispondenti agli operatori diagonali divengono privilegiati. L'idea è che se sotto un certo stato si sa determinare la distribuzione di probabilità degli osservabili diagonali, allora si può determinare la distribuzione di probabilità di tutti gli osservabili.

Questo lavoro è ispirato ai lavori di [1], e [2] e [3].

2 Definizioni

Il quadro in cui si presenta il problema di Kadinson-Singer è la teoria delle $\mathbb{C}^*$-algebre.

Definizione 2.1. *Sia A un'algebra. Una involuzione è un antiomomorfismo antilineare $*\colon A \to A$ che mappa $a \mapsto *(a) = a^*$ tale che per ogni $a, b \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$:*

$$(\lambda a + b)^* = \bar{\lambda} a^* + b^*$$
$$(ab)^* = b^* a^*$$

Definizione 2.2. *Un'algebra di Banach su campo complesso con una involuzione tale che $\|x^* x\| = \|x\|^2$ è detta $\mathbb{C}^*-$algebra.*

Definizione 2.3. *Un elemento T di una $\mathbb{C}^*-$algebra $A \subset B(H)$ è detto positivo se $\forall x \in H; \langle Tx, x\rangle \geq 0$.*

Osserviamo per inciso che un elemento positivo si può sempre scrivere come $T = aa^*$ per $a \in A$.

Definizione 2.4. *Una forma lineare φ su una $\mathbb{C}^*-$algebra A è detta positiva se $\forall T \in A$ positivo $\varphi(T) \geq 0$.*

Una tale forma lineare è necessariamente continua e la sua norma $\|\varphi\| = \varphi(1_A)$.

Definizione 2.5. *Uno stato è un'applicazione lineare $\omega\colon A \to \mathbb{C}$ che soddisfa*

$$\omega(1_A) = 1$$
$$\forall a \in A \quad \omega(a^* a) \geq 0$$
$$\|\omega\| = 1$$

Tale concetto fu introdotto nel caso particolare in cui A è $B(H)$, la $\mathbb{C}^*$-algebra unitaria degli operatori limitati sullo spazio di Hilbert H, da John von Neumann, ispiratosi alla meccanica quantistica.

Poniamo $S(A)$ l'insieme degli stati di A. É chiaro che questo è un insieme convesso. Chiamiamo i punti estremali di tale insieme **stati puri**:

Definizione 2.6. *$\omega \in S(A)$ è uno stato puro se e solo se $\forall t \in (0,1)$ e $\omega', \omega" \in S(A)$ la decomposizione $\omega = t\omega' + (1-t)\omega"$ è banale, cioè $\omega' = \omega" = \omega$.*

Esempio Dato un vettore unitario $v \in H$ possiamo banalmente definire il corrispettivo "stato vettoriale" ponendo $\omega_v(a) = \langle av, v\rangle$.

L'esempio di $M_n(\mathbb{C})$ Per chiarire facciamo un esempio in dimensione finita. Consideriamo l'algebra delle matrici a coefficienti complessi $M_n(\mathbb{C})$ con l'involuzione data dalla coniugazione hermitiana.

Definizione 2.7. *Una matrice di densità è una matrice* $\rho \in M_n(\mathbb{C})$ *di autovalori* $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ *non negativi e di somma* 1*. Equivalentemente, è una matrice semidefinita positiva di traccia unitaria.*

Grazie al teorema di rappresentazione di Riesz possiamo far corrispondere ad ogni stato ω una matrice di densità:

$$\omega(a) = tr(\rho a)$$

In questo modo gli stati puri corrispondono alle proiezioni su un sottospazio di dimensione 1, notiamo $|\psi\rangle\langle\psi|$ per $\psi \in \mathbb{C}^n$ unitario:

$$\omega(a) = \langle\psi, a\psi\rangle$$

L'esempio di $D_n(\mathbb{C})$ Guardiamo ora la $\mathbb{C}^*$-algebra delle matrici diagonali $D_n(\mathbb{C})$. Gli elementi positivi sono precisamente le matrici aventi elementi reali non negativi. Cerchiamo di comprendere come sono fatti gli stati. Dalla linearità di

$$\omega\colon D_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$$

otteniamo che $\omega(a) = \sum_{i=1}^n p_i a_{ii}$. La positività implica poi che $\forall i\ p_i \geq 0$ e poiché ω deve fare 1 sull'identità: $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Ciò equivale al fatto che

$$p\colon \{1,\dots,n\} \to [0,1] p(i) \mapsto \qquad p_i$$

sia una distribuzione di probabilità. La funzione che associa $\omega \mapsto p$ è chiaramente una bigezione tra l'insieme degli stati $S(D_n(\mathbb{C}))$ e l'insieme delle distribuzioni di probabilità su $\{1,\dots,n\}$. In più preserva la struttura convessa. L'insieme degli stati puri corrisponde dunque alle distribuzioni di probabilità che associano $p_i = 1$ per un certo indice $i \in \{1,\dots,n\}$ e per ogni $j \neq i$ $p_j = 0$. Il che significa che gli stati puri su $D_n(\mathbb{C})$ sono esattamente n, e della forma

$$\omega_i(a) = a_{ii}$$

Gli esempi in dimensione $n = 2$ Nel caso specifico di $n = 2$ possiamo parametrizzare le matrici di densità su $\mathbb{C}^2$ mediante la sfera unitaria

$$B^3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

tramite

$$\rho\colon B^3 \to S(M_2(\mathbb{C}))$$
$$(x,y,z) \mapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+z & x+iy \\ x-iy & 1-z \end{pmatrix}$$

Si verifica facilmente che ρ è un isomorfismo affine (cioè bigezione che conserva la struttura convessa). Allora gli stati puri, essendo i punti estremali di B^3 non sono altro che la sfera

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

Le matrici di densità corrispondenti verificano $\rho^2 = \rho$, dunque (avendo traccia unitaria ed essendo autoaggiunte) sono proiezioni di $\mathbb{C}^2$ su una retta.

Nel caso delle matrici diagonali otteniamo un isomorfismo affine tra $S(D_2(\mathbb{C}))$ e il segmento $[0, 1]$ e gli stati puri sono i due punti $\omega_i(a) = a_{ii}$ $i = 1, 2$.

2.1 Proprietà degli stati

Proposizione 2.1. *Sia A una $\mathbb{C}^*$-algebra e φ una forma lineare su A tale che $\varphi(1_A) = 1$ e $\forall a \geq 0$ $\varphi(a) \geq 0$.*
Allora $\forall a \in A$ $|\varphi(a)|^2 \leq \varphi(a^* a)$.

Dimostrazione. A meno di moltiplicare a per un fattore $e^{i\theta}$ possiamo supporre che $\varphi(a) \geq 0$. Per ogni $t \in \mathbb{R}$ abbiamo $(t1_A + a)(t1_A + a^*) \geq 0$ dunque per ipotesi $\varphi((t1_A + a)(t1_A + a^*)) \geq 0$. Svilppando per linearità e sfruttando il fatto che $\varphi(1_A) = 1$ otteniamo:

$$t^2 + 2\varphi(a)t + \varphi(aa^*) \geq 0$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$. Il che impone la condizione sul discriminante:

$$\varphi(a)^2 - \varphi(aa^*) \leq 0$$

che dà la tesi. □

Tale proposizione implica una caratterizzazione degli stati.

Corollario 2.2. *Sia A una $\mathbb{C}^*$-algebra e φ una forma lineare su A. Sono equivalenti:*

(i) $\varphi(1_A) = 1$ *e* $\varphi \geq 0$*;*

(ii) $\varphi(1_A) = 1$ *e* $\|\varphi\| = 1$*;*

(iii) φ *è uno stato.*

Dimostrazione. $[(i) \Rightarrow (ii)]$ Il risultato della proposizione $\forall a \geq 0$ $\varphi(a) \geq 0$ implica in particolare che

$$\|\varphi\| = \sup_{\|aa^*\|=1} \varphi(aa^*)$$

Osserviamo ora che

$$\|a^* a\| = \|aa^*\| = \|a\| \|a^*\| = \|a\|^2$$

e che

$$\langle w - aa^*(w), w\rangle = \|w\| - \|a^*(w)\| \geq \|w\| - \|a^*\| \|w\| \geq 0$$

ovvero che $1_A - aa^* \geq 0$ da cui $\varphi(1_A - aa^*) \geq 0$ dunque $\varphi(aa^*) \leq 1$. Allora per definizione di sup otteniamo $\|\varphi\| \leq 1$. □

Veniamo finalmente alla definizione della congettura.

Definizione 2.8. *Sia H uno spazio di Hilbert e sia $B(H)$ la $\mathbb{C}^*$-algebra degli operatori limitati dove l'involuzione è data dall'aggiunto. Sia $A \subset B(H)$ una $\mathbb{C}^*$-algebra commutativa unitaria. Allora A ha la proprietà di Kadinson-Singer (KS) se e solo se ogni stato puro di A si estende in modo unico ad uno stato di $B(H)$.*

Osservazione La definizione è giustificata dal fatto che in meccanica quantistica i risultati di una misura sono interpretati nel linguaggio della fisica classica, il che in un certo senso sta a significare che tale risultato definisce uno stato puro sulla sottoalgebra commutativa.

Evidente ma importante Osserviamo che è evidente che ogni stato su $B(H)$ si può restringere ad uno stato su A.
Inoltre si prova che ogni stato su A si estende a $B(H)$: è il teorema 3.3 di *Hahn-Banach*. Il problema è dunque l'unicità dell'estensione.

Riformulazione Utilizzando la convessità si vede facilmente che uno stato puro non può estendersi in modo unico se non ad uno stato puro. Il che ci porta a riformulare la **proprietà di Kadinson-Singer** (KS):

Definizione 2.9. *A ha la proprietà (KS) se e solo se ogni stato puro su A si estende in modo unico ad uno stato puro su $B(H)$.*

Dimostriamo rapidamente quanto affermato per la riformulazione.

Dimostrazione. Sia ω uno stato puro su A. Prolunghiamolo ad $\widetilde{\omega}$ su $B(H)$. Se per assurdo esistesse una decomposizione non banale $\widetilde{\omega} = \lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\varphi_2$ con φ_1, φ_2 stati su $B(H)$ allora potremmo restringere $\widetilde{\omega}$ a $\psi = \lambda\varphi_1|_A + (1-\lambda)\varphi_2|_A = \omega$ su A. Ma dato che ω è puro per ipotesi $\varphi_1|_A = \varphi_2|_A = \omega$ e per unicità dell'estensione $\varphi_1 = \varphi_2 = \widetilde{\omega}$ che è dunque puro. □

Ritorniamo all'esempio delle matrici. Abbiamo il seguente teorema:

Teorema 2.3. *Per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'algebra delle matrici diagonali $D_n(\mathbb{C}) \subset M_n(\mathbb{C})$ ha la proprietà (KS).*

Dimostrazione. Sia ω_i - per $i \in \{1, \dots, n\}$ arbitrario - uno stato puro su $D_n(\mathbb{C})$. Sia e_i l'$i-$esimo vettore della base canonica di $\mathbb{C}^n$. Il funzionale

$$\begin{aligned} \mu\colon\ M_n(\mathbb{C}) &\to \quad \mathbb{C} \\ a &\mapsto \mu(a) = \langle e_i, ae_i \rangle = a_{ii} \end{aligned}$$

è uno stato puro di $M_n(\mathbb{C})$, estensione di ω_i.
Proviamo ora l'unicità. Se $\mu'\colon M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ è un'altra estensione di ω_i allora

$$\exists \psi \in \mathbb{C}^n \text{unitario} \quad \mu'(a) = \langle \psi, a\psi \rangle$$

Inoltre

$$|\langle\psi, e_i\rangle|^2 = \mu'(|e_i\rangle\langle e_i|) = \omega(|e_i\rangle\langle e_i|) = 1$$

cioè $\psi = ze_i$ per un certo $z \in \mathbb{C}$ di modulo 1. Dunque per ogni $a \in M_n(\mathbb{C})$:

$$\begin{aligned}\mu'(a) =& \langle\psi, a\psi\rangle \\ =& |z|^2 \langle e_i, ae_i\rangle \\ =& \mu(a)\end{aligned}$$

il che significa che $\mu' = \mu$ e l'estensione di ω_i è unica. □

Da questo teorema discende un interessante corollario. Diamo prima una definizione.

Definizione 2.10. *Una $\mathbb{C}^*$-algebra unitaria $A \subset B(H)$ è detta massimale se non c'è nessun'altra $\mathbb{C}^*$-algebra $B \subset B(H)$ che contiene propriamente A.*

Corollario 2.4. *Sia H uno spazio di Hilbert di dimensione finita. Supponiamo $A \subset B(H)$ una $\mathbb{C}^*$-algebra unitaria massimale. Allora A ha la proprietà (KS).*

Dimostrazione. Sia $a \in A$. Allora anche $a^* \in A$ e $aa^* = a^*a$, dunque a è diagonalizzabile in una base ortogonale. Poiché ciò mostra che tutti gli elementi di A sono diagonalizzabili e commutano tra loro, esiste una base ortogonale di matrici P tali che P^*AP è un sottoinsieme di matrici diagonali. Ma allora $P^*AP = D_n(\mathbb{C})$. □

Vediamo un'altro esempio più generale.

Lemma 2.5. *Sia A una $\mathbb{C}^*$-algebra, φ uno stato su A e p un proiettore ortogonale tale che $\varphi(p) = 1$. Allora $\forall a \in A$ $\varphi(ap) = \varphi(a) = \varphi(pa)$.*

Dimostrazione. La tesi è equivalente a mostrare che $\varphi(a(1_A - p)) = 0$. Grazie alla Proposizione 2.1 sappiamo che $|\varphi(a(1_A - p))|^2 \leq \varphi((1_A - p)a^*a(1_A - p))$. Consideriamo la forma lineare $\varphi' \colon b \mapsto \varphi((1_A - p)b(1_A - p))$. Questa è positiva e si annulla su 1_A, perciò $\|\varphi'\| = 0 \Rightarrow \varphi' = 0 \Rightarrow \varphi(a(1_A - p)) = 0$. □

3 Il Teorema di Hahn-Banach

Definizione 3.1. *Sia E uno spazio vettoriale reale. Sia $C \subset E$ un convesso contenente l'origine. Si definisce gauge del convesso C l'applicazione*

$$\begin{aligned} p_C \colon E \to & \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} \\ x \mapsto & \inf \left\{ t \geq 0 \mid \frac{x}{t} \in C \right\} \end{aligned}$$

(con la convenzione che $\inf \varnothing = +\infty$*).*

Si verifica senza difficoltà che un gauge verifica le proprietà di subadittività ed omogeneità:

1. $\forall x, y \; p_C(x+y) \leq p_C(x) + p_C(y)$
2. $\forall s > 0 \; p_C(sx) = s p_C(x)$

e che inoltre si ha l'inclusione $\{x \mid p_C(x) < 1\} \subseteq C \subseteq \{x \mid p_C(x) \leq 1\}$.

Viceversa, per un gauge $p \colon E \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ (subadditivo ed omogeneo) l'insieme $C = \{x \mid p(x) \leq 1\}$ è un convesso che contiene l'origine e $p = p_C$.

Il gauge e la norma Osserviamo che $p = \|\cdot\|$ se e solo se C è un convesso simmetrico ($x \in C \iff -x \in C$) ed è tale che ogni retta vettoriale lo interseca in un intervallo di parte interna non vuota.

Ricordiamo l'enunciato del Lemma di Zorn.

Lemma 3.1 (Zorn)**.** *Sia $(X, \leq)$ un insieme non vuoto e parzialmente ordinato tale che ogni sottoinsieme totalmente ordinato Y ammette un maggiorante in X. Allora X ha un elemento massimale.*

Lemma 3.2 (Passo base di Hahn-Banach)**.** *Sia E uno spazio vettoriale munito di un gauge p. Sia $F \subseteq E$ un sottospazio vettoriale e φ una forma lineare su F che verifichi $\forall y \in F \varphi(y) \leq p(y)$.*
Supponiamo che $E = F \oplus \mathbb{R}z$.
Allora esiste una forma lineare ψ su E che estende φ e tale che $\psi(x) \leq p(x)$ per ogni $x \in E$.

Dimostrazione. Possiamo scrivere ogni vettore $x = y + tz$. Se $\alpha = \psi(z)$ allora abbiam definito $\psi(x) = \psi(y) + t\alpha$. Vediamo che condizioni deve verificare un tale α.
Innanzitutto $\varphi(y) + t\alpha \leq \varphi(y + tz)$ il che implica:

$$\begin{aligned} t > 0 &\iff \alpha \leq \inf \left\{ \frac{p(y+tz) - \varphi(y)}{t} \mid t > 0, y \in F \right\} =: b \\ t < 0 &\iff \alpha \geq \sup \left\{ \frac{\varphi(y) - p(y - sz)}{s} \mid s > 0, y \in F \right\} =: a \end{aligned}$$

Per omogeneità di p e linearità di φ possiamo riscrivere

$$a = \sup\left\{\frac{p(y+tz)-\varphi(y)}{t} \mid t>0, y\in F\right\}$$
$$b = \inf\left\{\frac{\varphi(y)-p(y-sz)}{s} \mid s>0, y\in F\right\}$$

Dunque per poter scegliere α occorre $a \leq b$. (Osserviamo che utilizziamo in questo passaggio l'assioma della scelta.) Dunque la condizione si riscrive:

$$\begin{aligned} a \leq b \iff & \varphi(y) - p(y-z) \leq p(y'+z) - \varphi(y') \\ & \varphi(y) + \varphi(y') \leq p(y'+z) + p(y-z) \\ & \varphi(y+y') \leq p(y'+z) + p(y-z) \end{aligned}$$

Ora notiamo che

$$\begin{aligned} \varphi(y+y') =& \varphi(y-z+y'+z) \\ \leq & p(y-z+z+y') \\ \leq & p(y-z) + p(y'+z) \end{aligned}$$

□

Teorema 3.3. *(Hahn-Banach) Sia E uno spazio vettoriale munito di un gauge p. Sia $F \subseteq E$ un sottospazio vettoriale e φ una forma lineare su F che verifichi $\forall y \in F \varphi(y) \leq p(y)$.*
Allora esiste una forma lineare ψ su E che estende φ e tale che $\psi(x) \leq p(x)$ per ogni $x \in E$.

Dimostrazione. Avendo provato il lemma 3.2, se lo spazio fosse di dimensione finita, potremmo semplicemente procedere per induzione. Nel caso generale utilizziamo il lemma di Zorn 3.1.
Consideriamo

$$X = \{(F', \varphi') \mid F \subseteq F' \subseteq E \text{sottospazio vettoriale, } \varphi'|_F = \varphi \ \varphi' \leq p\}$$

che è chiaramente non vuoto e parzialmente ordinato da:

$$(F', \varphi') \leq (F", \varphi") \iff F' \subseteq F"\text{e}\varphi"|_{F'} = \varphi'$$

Ora, se $Y \subset X$ è una catena, un suo maggiorante è dato da

$$(\overline{F}, \overline{\varphi}) = \left(\cup_{(F',\varphi')\in Y} F', \overline{\varphi}\right)$$

dove la definizione di $\overline{\varphi}$ è quella che ci si aspetta: se $z \in \overline{F}$ allora $\exists F'$ $z \in F'$ in cui $(F', \varphi') \in Y$. Dunque basta porre $\overline{\varphi}(z) = \varphi'(z)$. Si verifica facilmente che la definizione è ben posta, essendo gli insiemi in Y inclusi uno nell'altro. In conclusione per Zorn esiste un elemento $(F_m, \varphi_m) \in X$ massimale. Notiamo infine che $F_m = E$ necessariamente, altrimenti potremmo riutilizzare il lemma 3.2 ed estendere ancora, contraddicendo la massimalità. □

Osserviamo che nel caso particolare in cui $p = \|\cdot\|$, per simmetria abbiamo $|\varphi(y)| \leq p(y)$ e il teorema permette di affermare che ogni forma lineare su F di norma 1 si estende ad una forma lineare di norma 1.

Interpretazione geometrica del teorema di Hahn-Banach Associamo alla forma lineare ψ:

- l'iperpiano vettoriale $E_\psi = \text{Ker } \psi$ e
- l'iperpiano affine $E_\psi^1 = \{x \mid \psi(x) = 1\}$

e il gauge p è associato al convesso $\{C_p = \{x \mid p(x) \leq 1\}$. Allora la disuguaglianza $\psi(x) \leq p(x)$ corrisponde all'inclusione $C_p \subseteq \{x \mid \psi(x) \leq 1\}$ ovvero E_ψ^1 lascia il convesso tutto dalla stessa parte dello spazio.

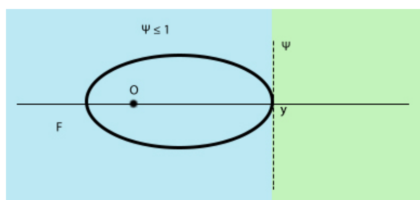

Figura 1: In $\mathbb{R}^2$ se φ è definita su F e $\varphi(y) = 1$

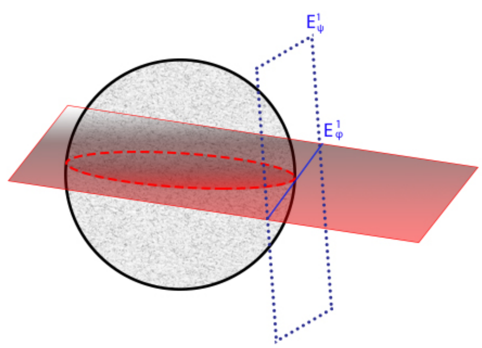

Figura 2: In $\mathbb{R}^3$ se φ è definita sul piano in rosso e $\varphi = 1$ sulla retta in blu

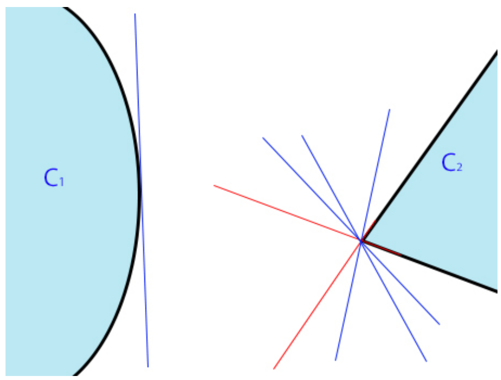

Figura 3: A seconda della natura del convesso l'estensione può essere unica (a sinistra) o meno (a destra)

4 Congetture equivalenti

4.1 La congettura di Feichtinger

In questa sezione mostriamo l'equivalenza della congettura di Kadison-Singer, con un'altra congettura, enunciata in un ambito differente: la congettura di Feichtinger in teoria dei *frames*.

Definizione 4.1. *Sia H uno spazio di Hilbert, e sia $(f_i)_{i\in I}$ una successione (finita o infinita). (f_i) è detta successione di Bessel se*

$$\exists B < +\infty \; \forall f \in H \quad \sum_{i\in I} |\langle f, f_i\rangle|^2 \le B \|f\|^2$$

La miglior costante possibile è detta costante di Bessel.

Definizione 4.2. *Una successione $(f_i)_{i\in I}$ in uno spazio di Hilbert H si dice frame di H se*

$$\exists A > 0 \; \exists B < +\infty \; \forall f \in H \quad A\|f\|^2 \le \sum_{i\in I} |\langle f, f_i\rangle|^2 \le B \|f\|^2$$

Definizione 4.3. *Una successione $(f_i)_{i\in I}$ in uno spazio di Hilbert H si dice di Riesz se*

$$\exists c > 0 \; \exists C < +\infty \; \forall (a_i)_{i\in I} \subseteq \mathbb{C} \text{ s.f.} \quad c\sum_{i\in I} |a_i|^2 \le \left\| \sum_{i\in I} a_i f_i \right\|^2 \le C \sum_{i\in I} |a_i|^2$$

(le successioni $(a_i)_{i\in I}$ sono a supporto finito).

Carrellata di esempi

- Una successione ortonormale è di Riesz.
- Una unione finita di successioni ortonormali è di Bessel.
- Una unione finita di basi ortonormali di H è un frame di H.

Proposizione 4.1. *Sia $(f_i)_{i\in I}$ una successione di elementi di H.*

1. *(f_i) è di Bessel se e solo se $\exists! S\colon \ell^2(I) \to H$ operatore limitato $S\colon e_i \mapsto f_i$ per ogni $i \in I$. In questo caso la costante di Bessel è $\|S\|^2$. Tale operatore è detto operatore di sintesi.*
2. *(f_i) è di Riesz se e solo se è di Bessel con operatore di sintesi iniettivo a immagine chiusa.*

Dimostrazione.

1. Supponiamo (f_i) di Bessel con costante di Bessel B:

$$\forall f \in H \quad \sum_{i\in I} |\langle f, f_i\rangle|^2 \le B \|f\|^2$$

Definiamo l'operatore di analisi

$$\begin{aligned} A\colon H &\to \ell^2(I) \\ f &\mapsto (\langle f, f_i\rangle)_{i\in I} \end{aligned}$$

che è limitato, con $\|A\|^2 \leq B$. Per definizione

$$\forall i \in I\ \forall f \in H \quad \langle f, A^* e_i\rangle = \langle Af, e_i\rangle = \langle f, f_i\rangle$$

E dunque possiamo definire $S := A^*$ che verifica $Se_i = f_i$ per ogni $i \in I$. Viceversa supponiamo che esista un tale operatore $S\colon \ell^2(I) \to H$. Allora per ogni $f \in H$

$$\sum_{i\in I} |\langle f, f_i\rangle|^2 = \sum_{i\in I} |\langle S^* f, e_i\rangle|^2 = \|S^* f\|^2 \leq \|S^*\|^2 \|f\|^2$$

cioè (f_i) è di Bessel con costante $B \leq \|S^*\|^2 = \|S\|^2$. Dal calcolo precedenza risulta in conclusione che se (f_i) è di Bessel e S è il suo operatore di Sintesi, allora la costante di Bessel è $B = \|S\|^2$.

2. Se (f_i) è di Riesz l'operatore

$$\begin{aligned} S\colon \ell^2(I) &\to H \\ a = (a_i)_i &\mapsto \sum_{i\in I} a_i f_i \end{aligned}$$

è chiaramente iniettivo e ad immagine chiusa grazie alla proposizione 4.2. Viceversa se S è iniettivo ad immagine chiusa, abbiamo le due disuguaglianze della definizione di successione di Riesz, una dalla proposizione 4.2 e l'altra dalla continuità dell'operatore.

□

Proposizione 4.2. *Siano V, W spazi di Banach e sia $A\colon \to W$. Allora A è iniettivo a immagine chiusa se e solo se $\exists c > 0\ \|Ax\| \geq c\|x\|$.*

Dimostrazione. Se vale la limitazione sulla norma, possiamo utilizzare il fatto che una successione di Cauchy converge sempre in uno spazio di Banach:

$$\|x_m - x_n\| \leq \frac{1}{c}\|Ax_m - Ax_n\|$$

Viceversa se A è iniettivo a immagine chiusa, per il teorema della mappa aperta abbiamo che $A\colon V \to A(V)$ è una bigezione aperta, dunque $A^{-1}\colon A(V) \to V$ è continua e cioè $\forall v \in V\ \ \|A^{-1}(Av)\| = \|v\| \leq c\|Av\|$ per una certa costante $c > 0$. □

L'enunciato della **congettura di Feichtinger** è il seguente:

(F) Ogni successione di Bessel normalizzata in uno spazio di Hilbert è unione finita di successioni di Riesz.

Reciprocamente Il risultato reciproco di (F) è evidente: un'unione finita di successioni di Riesz è un'unione finita di successioni di Bessel ed è dunque una successione di Bessel.

4.2 La congettura di Bourgain-Tzafriri

Parliamo ora di un risultato apparentemente lontano dalla congettura (KS).

Notiamo $[d] := \{1, \dots, d\}$ e per $I \subseteq [d]$ chiamiamo E_I il sottospazio di $\mathbb{C}^d$ generato dai vettori $\{e_i \mid i \in I\}$ della base canonica di $\mathbb{C}^d$.

Teorema 4.3. *Esistono due costanti $c > 0$ e $A > +\infty$ tali che per ogni operatore $S \in B(\mathbb{C}^d)$ con $d \geq 1$ per cui $\|Se_i\| = 1$ $\forall i = 1, \dots, d$ esiste $I \subseteq [d]$ di cardinalità $|I| \geq \frac{c}{\|S\|^2} d$ per cui l'operatore $S_{|E_I}$ è invertibile sulla sua immagine e $\left\|(S_{|E_I})^{-1}\right\| \leq A$. Ovvero $\forall x \in E_I$ $\|Sx\| \geq \frac{1}{A}\|x\|$.*

Tale teorema ci dice che ogni matrice S di taglia d con colonne di norma 1 è invertibile su un sottospazio di dimensione proporzionale a d generato da alcuni vettori della base canonica. La costante di proporzionalita non dipende che da $\|S\|$ e abbiamo anche una stima assoluta sulla norma dell'inversa. Dal teorema (di cui non diamo la prova perché troppo lunga e laborosa) deduciamo che per ogni operatore $S \in B(\mathbb{C}^d)$ con $d \geq 1$ e tale che $\|Se_i\| = 1$ possiamo trovare una partizione $(I_1, \dots, I_r)$ di $[d]$ con $r \leq 1 + C(\|S\|) \log d$ per cui $S_{|E_{I_k}}$ è invertibile con norma $\left\|(S_{|E_{I_k}})^{-1}\right\| \leq A$ per $k = 1, \dots, r$.

Viene naturale chiedersi se il numero r di elementi della partizione può essere indipendente dalla dimensione d dello spazio. Questa affermazione è precisamente la congettura di **Bourgain-Tzafriri**:

(BT) $\forall M > 0$ $\exists r = r(M) \in \mathbb{N}$ tale che per ogni operatore $S \in B(\mathbb{C}^d)$ $d \geq 1$, $\|S\| \leq M$ $\|Se_i\| = 1 \forall i = 1, \dots, d$ possiamo trovare una partizione $(I_1, \dots, I_r)$ di $[d]$ tale che $\left\|(S_{|E_{I_k}})^{-1}\right\| \leq A$ per $k = 1, \dots, r$ con A costante universale.

Una versione in dimensione infinita di (BT) è :

$(BTf)_\infty$ Per ogni operatore $S \in B(\ell^2)$ $\|Se_i\| = 1 \forall i \in \mathbb{N}$ possiamo trovare una partizione $(I_1, \dots, I_r)$ di $\mathbb{N}$ tale che gli operatori $S_{|E_{I_k}}$ sono invertibili sulla loro immagine.

Osserviamo che ovviamente (BT)$\Rightarrow$ $(BTf)_\infty$ ma è possibile provare la loro equivalenza. Inoltre abbiamo:

Proposizione 4.4. *Le congetture (BT) e $(BTf)_\infty$ sono equivalenti a (F).*

Dimostrazione. Se $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ è una successione di Bessel in $H = \ell^2(\mathbb{N})$ il cui operatore di sintesi è $S \colon \ell^2 \to \ell^2$ con $Se_i = f_i$ per ogni $I \subseteq \mathbb{N}$ la restrizione a E_I è invertibile sull'immagine se e solo se $(f_i)_{i \in I}$ è di Riesz. Infatti l'operatore $S_{|E_I}$ si identifica all'operatore di sintesi associato a $(f_i)_{i \in I}$ e una successione di Bessel è di Riesz se e solo se l'operatore di sintesi associato è un isomorfismo con la sua immagine (proposizione 4.1). $\square$

4.3 Congettura di "pavage"

Fissiamo un po' di notazioni. Per $I \subseteq \mathbb{N}$ notiamo P_I la proiezione ortogonale di ℓ^2 sul sottospazio chiuso generato dai vettori $E_I = \{e_n \mid n \in I\}$.

Definizione 4.4. *Sia $T \in B(\ell^2)$ e $I \subseteq \mathbb{N}$. La compressione di T al sottospazio E_I è l'operatore $P_I T P_I$.*

Notiamo per $T \in B(\ell^2)$: $D(T)$ l'operatore diagonale $D(T)e_n = \langle Te_n, e_n\rangle$ $n \in \mathbb{N}$.

Ricordiamo che dal capitolo sugli ultrafiltri (**??**) sappiamo che per ogni ultrafiltro $\mathcal{U}$

$$\Phi_{\mathcal{U}}(T) = \varphi_{\mathcal{U}}(D(T)).$$

Definizione 4.5. *Siano $\mathcal{U}$ un ultrafiltro e $T \in B(\ell^2)$. Diciamo che T è compressibile modulo $\mathcal{U}$ se $\forall \varepsilon > 0\ \exists I \in \mathcal{U}\ \|P_I(T - D(T))P_I\| \leq \varepsilon$.*

Lemma 4.5. *Sia $\psi \colon B(\ell^2) \to \mathbb{C}$, D l'insieme degli operatori diagonali, $\mathcal{H} := \{T \in B(\ell^2) \mid T = T^*\}$ e $P := \{A \in \mathcal{H} \mid -1 \leq A \leq 1\}$ convesso. Allora sono equivalenti:*

(i) $\forall A \in P \cap D \oplus \mathbb{R}T\ \psi(A) \leq 1$ *e* $\psi(1) = 1$

(ii) $\forall A \geq 0\ A \in D \oplus \mathbb{R}T\ \psi(A) \geq 0$ *e* $\psi(1) = 1$

Dimostrazione. $[(i) \Rightarrow (ii)]$ Sia $A \geq 0$ in $D \oplus \mathbb{R}T$. Allora $\frac{A}{\|A\|} \in P$ e anche $1 - \frac{A}{\|A\|} \in P \cap (D \oplus \mathbb{R}T)$. Allora $\psi\left(1 - \frac{A}{\|A\|}\right) \leq 1 \Rightarrow \psi(A) \geq 0$.
$[(ii) \Rightarrow (i)]$ Sia $A \in P \cap (D \oplus \mathbb{R}T)$ allora $1 - A \geq 0$ e $\psi(1 - A) \geq 0$ da cui $\psi(A) \leq 1$. □

Teorema 4.6. *Sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro su $\mathbb{N}$ e sia $\varphi_{\mathcal{U}}$ lo stato puro associato su $\mathcal{D}(\ell^2)$. Allora $\varphi_{\mathcal{U}}$ ammette un unico prolungamento ad uno stato su $B(\ell^2)$ se e solo se $\forall T \in B(\ell^2)$ T è compressibile modulo $\mathcal{U}$.*

Dimostrazione. Cominciamo a provare che la compressibilità implica l'unicità. Come abbiamo detto un'estensione banale esiste sempre. Sia ψ un'altra estensione di $\varphi_{\mathcal{U}}$. Per definizione se $I \in \mathcal{U}$ allora $\varphi_{\mathcal{U}}(P_I) = 1$ e utilizzando il lemma 2.5, essendo ψ uno stato su $B(\ell^2)$ che prolunga $\varphi_{\mathcal{U}}$ allora

$$\forall T \in B(\ell^2)\ \forall I \in \mathcal{U} \quad \psi(P_I(T - D(T))P_I) = \psi(T - D(T))$$

e se T è compressibile modulo $\mathcal{U}$ ne deduciamo che $\psi(T - D(T)) = 0$ per l'arbitrarietà di ε e dunque:

$$\psi(T) = \psi(D(T)) = \varphi_{\mathcal{U}}(D(T)) = \Phi_{\mathcal{U}}(T)$$

cioè l'unicità dell'estensione.
Supponiamo ora che $\varphi_{\mathcal{U}}$ ammetta un'unica estensione ad uno stato su $B(\ell^2)$.

Questa non può essere altro che $\Phi_{\mathcal{U}}$. Innanzitutto osserviamo che a meno di riscrivere

$$T = \frac{T+T^*}{2} + i\frac{T-T^*}{2i}$$

possiamo supporre T autoaggiunto. Infatti se l'enunciato è vero per un operatore autoaggiunto per la diseguaglianza triangolare è vero per un qualsiasi operatore. Inoltre a meno di sostituire T con $T - D(T)$ possiamo supporre l'operatore a diagonale nulla. Sia ora $\mathcal{H} := \{T \in B(\ell^2) \mid T = T^*\}$. Possiamo definire un ordine su $\mathcal{H}$ ponendo $T \geq 0 \iff T = AA^*$ per $A \in B(\ell^2)$ e $T_1 \geq T_2 \iff T_1 - T_2 \geq 0$. Estendiamo $\varphi_{\mathcal{U}}$ su $D \cap \mathbb{R}T$ mantenendo la positività. Dire che $\psi(A) \geq 0$ su $D \oplus \mathbb{R}T$ equivale a scegliere $\psi(T)$ tale che

$$\begin{aligned} \psi(D+T) \geq 0 \quad &\text{per} \quad D \geq -T \\ \psi(D-T) \geq 0 \quad &\text{per} \quad D \geq T \end{aligned}$$

e le due condizioni equivalgono a

$$\begin{aligned} \psi(-D) \leq \psi(T) \quad &\text{per} \quad -D \leq T \\ \psi(D) \geq 0 \quad &\text{per} \quad D \geq T \end{aligned}$$

quindi è sufficiente scegliere $\psi(T) = \alpha$ tale che

$$a = \sup\{\varphi_{\mathcal{U}}(D) \mid D \leq T\} \leq \psi(T) \leq \inf\{\varphi_{\mathcal{U}}(D) \mid D \geq T\} = b$$

Una scelta di $\alpha \in [a,b]$ definisce un'estensione ψ_α di $\varphi_{\mathcal{U}}$ a $D \oplus \mathbb{R}T$. Ma allora per Hahn-Banach 3.3 possiamo estendere ψ_α ad uno stato su $\mathcal{H}$. Decomponendo in seguito in $\Re + i\Im$ l'estensione vale su $B(\ell^2)$. Per unicità dell'estensione abbiamo però $\psi_\alpha = \psi'_\alpha = \Phi_{\mathcal{U}}$ dunque $[a,b] = \{a\} = \{b\}$ e $\psi_\alpha(T) = \Psi_{\mathcal{U}}(T)$. Abbiamo supposto $\Psi_{\mathcal{U}}(T) = 0$ poiché $D(T) = 0$ e per definizione di a, b esiste $D \geq T$ $\varphi_{\mathcal{U}}(D) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ ed esiste $D' \leq T$ $\varphi(D') \geq -\frac{\varepsilon}{2}$. Per definizione di $\varphi_{\mathcal{U}}(D) = \lim_{\mathcal{U}} \langle De_n, e_n \rangle$ abbiamo:

$$I = \{n \in \mathbb{N} \mid -\frac{\varepsilon}{2} \leq \langle D'e_n, e_n \rangle \leq \langle De_n, e_n \rangle \leq \frac{\varepsilon}{2}\} \in \mathcal{U}$$

Sia P_I la proiezione ortogonale su E_I:

$$\|P_I(D - D')P_I\| \leq \varepsilon$$

ma poiché $D' \leq T \leq D$ allora $\forall v |\langle P_I T P_I v, v \rangle| \leq \varepsilon$ ed essendo $T = T^*$

$$\|P_I T P_I\| \leq \varepsilon$$

$\square$

Definizione 4.6. *Un operatore $T \in B(\ell^2)$ è "pavabile" se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una partizione finita $(I_1, \ldots, I_r)$ di $\mathbb{N}$ tale che*

$$\forall k = 1, \ldots, r \quad \|P_{I_k}(T - D(T))P_{I_k}\| \leq \varepsilon$$

Osservazione Possiamo vedere un operatore "pavabile" come un operatore che ammetta una decomposizione matriciale a blocchi

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & * & * \\ * & \ddots & * \\ * & * & T_r \end{pmatrix}$$

dove ogni operatore T_i è quasi diagonale.

Lemma 4.7. *Sia (P) una proprietà sui sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ ereditaria: se $J \subseteq \mathbb{N}$ soddisfa (P) allora ogni $I \subseteq J$ soddisfa (P). Allora sono equivalenti:*

(i) ogni ultrafiltro ha un elemento che possiede la proprietà (P);

(ii) esiste una partizione finita di $\mathbb{N}$ in cui ogni insieme ha la proprietà (P).

Dimostrazione. $(ii) \Rightarrow (i)$ Se $I_1, \dots, I_r \subseteq \mathbb{N}$ e $\cup_{i=1}^r I_i \in \mathcal{U}$ allora $\exists k \in \{1, \dots, r\}$ $I_k \in \mathcal{U}$.
$(i) \Rightarrow (ii)$ Sia $\beta\mathbb{N}$ lo spazio di tutti gli ultrafiltri su $\mathbb{N}$ munito della topologia prodotto, generata dalla famiglia $(\beta_I := \{\mathcal{U} \ni I\})_{I \subseteq \mathbb{N}}$. Tale spazio è compatto dunque il ricoprimento $\beta\mathbb{N} \subseteq \cup_I \beta_I$ ammette un sottoricoprimento finito $\beta\mathbb{N} \subseteq \cup_{i=1}^n \beta_{I_i} \subseteq \beta_{\cup_1^n I_i}$ che dà una partizione di $\mathbb{N}$ come richiesto. □

Proposizione 4.8. *La proprietà (KS) è vera se e solo se ogni operatore $T \in B(\ell^2)$ è "pavabile".*

Dimostrazione. Sia $T \in B(\ell^2)$ e sia $\varepsilon > 0$. Applicando il lemmma 4.7 alla proprietà (P_ε):

$$\forall I \subseteq \mathbb{N}\ (P_\varepsilon)(I) \iff \|P_I T P_I\| \leq \varepsilon$$

e facciamo variare ε. Allora otteniamo che l'operatore T è "pavabile" (cioè (ii) del lemma 4.7)), se e solo se è compressibile modulo ogni ultrafiltro (la parte (i) del lemma 4.7). □

Possiamo enunciare allora un ulteriore congettura, che indichiamo con (A):

(A) Ogni operatore su ℓ^2 è "pavabile".

Tale enunciato è equivalente a (KS) per la proposizione 4.8. Notiamo come la natura di (KS) sia completamente scomparsa, in quanto l'enunciato di (A) non comprende né ultrafiltri né stati.

Osservazione Un operatore T è "pavabile" se e solo se lo è $T - D(T)$. Quindi è sufficiente provare (A) per gli operatori a diagonale nulla.

4.4 "pavage" in dimensione finita

Definizione 4.7. *Siano $\varepsilon > 0$ e $r \in \mathbb{N}$. Un operatore $T \in B(\mathbb{C}^d)$ è detto $\varepsilon-$"pavabile" in r pezzi se esiste una partizione $(I_1, \dots, I_r)$ di $[d] = \{1, \dots, d\}$ tale che*

$$\forall k = 1, \dots, r \quad \|P_{I_k} T P_{I_k}\| \leq \varepsilon$$

Possiamo allora dare una versione finito-dimensionale di (A):

$(A)_{<\infty}$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists r \in \mathbb{N}\ \forall d \in \mathbb{N}\ \forall T \in B(\mathbb{C}^d)\ \ \|T\| \leq 1\ D(T) = 0$ è $\varepsilon-$"pavabile" in r pezzi.

Osservazione Il punto cruciale è che l'intero r è *indipendente* dalla dimensione d dello spazio. L'enunciato $(A)_{<\infty}$ è conosciuto come *congettura di "pavage" di Anderson*: gli operatori su $\mathbb{C}^d$ sono uniformemente "pavabile".

Lemma 4.9. *Sia (P) una proprietà finitamente determinata sugli interi: per ogni $I \subseteq \mathbb{N}$ $\ (P(I)) \iff \forall J \subseteq I$ finito $(P(J))$. Se ogni sottoinsieme $J \subseteq \mathbb{N}$ può essere partizionato in r parti aventi la proprietà (P) allora $\mathbb{N}$ può essere partizionato in r parti aventi la proprietà (P).*

Dimostrazione. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ consideriamo $[n] := \{1, \dots, n\}$ che per ipotesi ammette una *colorazione* c_n che è *buona*, nel senso che ogni elemento della partizione di $[n]$ possiede la proprietà (P). Sia $K_n = \{c \in \{1, \dots, r\}^{\mathbb{N}} \mid c|_{[n]} unabuonacolorazionesu[n]\}$. Poiché per ogni n il compatto $K_n \neq \varnothing$ e $K_n \subseteq K_{n+1}$ allora l'intersezione $\cap_n K_n \neq \varnothing$ e un suo elemento è una *buona colorazione* su $\mathbb{N}$. □

Proposizione 4.10. *Gli enunciati (A) e $(A)_{<\infty}$ sono equivalenti.*

Dimostrazione. Iniziamo a montrare l'implicazione più facile: (A) $\Rightarrow (A)_{<\infty}$. Supponiamo per assurdo che

$$\begin{gathered}\exists \varepsilon > 0\ \forall r \in \mathbb{N}\ \exists d_r \in \mathbb{N}\ \exists T_r \in B(\mathbb{C}^d) \\ \forall (I_1, \dots, I_r) \text{ partizione di } [d_r]\ \exists k \in [r]\ \ \|P_{I_k} T_r P_{I_k}\| > \varepsilon\end{gathered}$$

ovvero che per un certo ε possiamo trovare per ogni intero r un operatore che non sia $\varepsilon-$"pavabile" in r pezzi. Consideriamo l'operatore

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & & \\ & T_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

su $\ell^2 \simeq \bigoplus_r \mathbb{C}^{d_r}$ dove T_i è l'operatore che esiste per ipotesi agente sul sottospazio $\mathbb{C}^{d_i}$. Se T fosse "pavabile" esisterebbe una partizione di $\mathbb{N}$ data da $I_1, \dots, I_r$ la cui restrizione a $[d]$ data da $(J_1, \dots, J_r)$ sarebbe tale che per ogni $k \in [r]$:

$$\|P_{I_k} T P_{I_k}\| \geq \|P_{J_k} P_{I_k} T P_{I_k} P_{J_k}\| = \|P_{J_k} T P_{J_k}\| = \|P_{J_k} T_r P_{J_k}\| > \varepsilon$$

che è una contraddizione. Dunque T non è "pavabile" e abbiamo mostrato la prima implicazione. Viceversa supponiamo $(A)_{<\infty}$. Sia $T \in B(\ell^2)$ con $\|T\| \leq 1$ e $D(T) = 0$. Consideriamo per $\varepsilon > 0$ fissato la proprietà (P_ε)

$$\forall I \subseteq \mathbb{N} \quad (P_\varepsilon)(I) \iff \|P_I T P_I\| \leq \varepsilon$$

Verifichiamo che tale proprietà è *finimente determinata*: ovviamente se per $I \subseteq \mathbb{N} \quad (P(I))$ ogni sottoinsieme finito $J \subseteq I$ ha la stessa proprietà. Viceversa per $I \subseteq \mathbb{N}$ poniamo $\widetilde{T} := P_I T P_I$ e notiamo che:

$$\begin{aligned}
\left\| P_{\mathbb{N}} \widetilde{T} P_{\mathbb{N}} \right\| &= \left\| \widetilde{T} \right\| \\
&= \sup_{\|v\|=1} |\widetilde{T} v| \\
&= \sup_{\|v\|=\|w\|=1} \langle \widetilde{T} v, w \rangle \\
&= \sup_J \sup_{\substack{\|v\|=\|w\|=1 \\ supp(v) \subseteq J \\ supp(w) \subseteq J}} \langle \widetilde{T} v, w \rangle \\
&= \left\| P_J \widetilde{T} P_J \right\| \\
&= \|P_I T P_I\| \leq \qquad \varepsilon
\end{aligned}$$

dove la terza uguaglianza è per densità e il resto segue dalle definizioni di norma dalle proprietà delle proiezioni ortogonali. Allora possiamo applicare il Lemma di Rado 4.9 alla proprietà (P_ε), ed avendo per ipotesi $(A)_{<\infty}$ ne deduciamo (A).

$\square$

4.5 La congettura di Akemann - Anderson

Un'altra congettura che vedremo essere equivalente riguarda uno "pseudo-pavage" per le proiezioni ortogonale a diagonale piccola.

Fissato $\delta \in (0,1)$ enunciamo:

AA(δ) $\exists r \in \mathbb{N}\ \exists \eta > 0\ \forall d \in \mathbb{N}\ \forall P$ proiezione ortogonale su $\mathbb{C}^d$ con $\|D(P)\| \leq \delta$ possiamo trovare una partizione $(I_1, \dots, I_r)$ di $[d]$ tale per cui $\forall k \in [r]\ \ \|P_{I_k} P P_{I_k}\| \leq 1 - \eta$.

Lemma 4.11. *Sia $T \in B(\mathbb{C}^d)$ autoaggiunto a diagonale $D(T) = 0$. Allora se vale $AA(\frac{1}{2})$, T è $(1-\eta)\,\|T\|$-"pavable" in r^2 pezzi.*

Dimostrazione. Possiamo supporre per omogeneità che $\|T\| \leq 1$. Definiamo su $\mathbb{C}^{2d} = \mathbb{C}^d \oplus \mathbb{C}^d$ l'operatore

$$S = \begin{pmatrix} T & \sqrt{1-T^2} \\ \sqrt{1-T^2} & -T \end{pmatrix}.$$

che è ben definito per l'ipotesi sulla norma di T. S è evidentemente autoaggiunto e $S^2 = 1$ cioè è una simmetria ortogonale. Possiamo definire allora gli operatori $P^{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm S)$ che sono delle proiezioni ortogonali a diagonale $D(P^{\pm}) = \frac{1}{2}1$ dato che $D(S) = D(T) = 0$. Applicando l'ipotesi AA($\frac{1}{2}$) alle proiezioni otteniamo due partizioni $(I_1^+, \dots, I_r^+)$ e $(I_1^-, \dots, I_r^-)$ per cui vale

$$\forall k \in [r] \quad \left\| P_{I_k^{\pm}} P^{\pm} P_{I_k^{\pm}} \right\| \leq 1 - \eta$$

Ora la proiezione su $\mathbb{C}^d$ ci dà: $P_{[d]} P^{\pm} P_{[d]} = \frac{1}{2}(1 \pm T)$ e dunque

$$\forall k \in [r] \quad \left\| P_{I_k^{\pm} \cap [d]} P^{\pm} P_{I_k^{\pm} \cap [d]} \right\| = \left\| P_{I_k^{\pm} \cap [d]} \frac{1 \pm T}{2} P_{I_k^{\pm} \cap [d]} \right\| \leq 1 - \eta$$

e considerando la partizione data da $(J_i)_{i \in [r^2]} \simeq (I_i^+ \cap I_{i'}^- \cap [d])_{i,i' \in [r]}$:

$$\forall k \in [r^2] \quad \left\| P_{J_k} \frac{1 \pm T}{2} P_{J_k} \right\| \leq 1 - \eta$$

Ora, essendo T autoaggiunto di norma $\|T\| \leq 1$ abbiamo che

$$-1 \leq T \leq 1 \Rightarrow \frac{T-1}{2} \leq T \leq \frac{T+1}{2}$$

per cui

$$\forall k \in [r^2] P_{J_k} \frac{T-1}{2} P_{J_k} \leq P_{J_k} T P_{J_k} \leq P_{J_k} \frac{1+T}{2} P_{J_k}$$

e passando alla norma

$$\forall k \in [r^2]\ \|P_{J_k} T P_{J_k}\| \leq \max\left(\left\| P_{J_k} \frac{T-1}{2} P_{J_k} \right\|, \left\| P_{J_k} \frac{1+T}{2} P_{J_k} \right\| \right) \leq 1 - \eta$$

cioè T è $(1-\eta)-$"pavable" in r^2 pezzi. $\square$

Proposizione 4.12. *L'enunciato $AA(\frac{1}{2})$ è equivalente a $(A)_{<\infty}$ e dunque a (KS).*

Dimostrazione. Supponiamo $(A)_{<\infty}$ e mostriamo che $\mathrm{AA}(\delta)$ vale per ogni $\delta \in (0,1)$. Fissato dunque $\delta \in (0,1)$ sia $T \in B(\mathbb{C}^d)$ con norma $\|T\| \leq 1$ e di diagonale piccola $\|D(T)\| \leq \delta$. Non facciamo qui l'ipotesi che T sia una proiezione. Sia $\varepsilon > 0$ tale che $\delta + \varepsilon < 1$ e poniamo $\eta := \delta + \varepsilon$. Avendo supposto $(A)_{<\infty}$ possiamo trovare $r = r(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ e una partizione $(I_1, \ldots, I_r)$ di $[d]$ per cui per ogni $k = 1, \ldots, r$ vale $\|P_{I_k}(T - D(T))P_{I_k}\| \leq \varepsilon$. Allora abbiamo

$$\|P_{I_k} T P_{I_k}\| \leq \varepsilon + \|P_{I_k} D(T) P_{I_k}\| \leq \varepsilon + \delta = 1 - \eta$$

per ogni $k = 1, \ldots, r$ e ciò prova $\mathrm{AA}(\delta)$. Supponiamo adesso $\mathrm{AA}(\frac{1}{2})$ soddisfatta con $r \in \mathbb{N}$ e $\eta > 0$. Al solito possiamo ridurci a provare $(A)_{<\infty}$ per operatori autoaggiunti a diagonale nulla su $\mathbb{C}^d$. Applichiamo il lemma 4.11 e iterando il ragionamento fatto nella sua dimostrazione otteniamo la tesi. Se $T \in B(\mathbb{C}^d)$ con $D(T) = 0$ e $\|T\| \leq 1$ ponendo $s := r^2$ e $\alpha := (1 - \eta)$ troviamo una partizione $(I_1, \ldots, I_s)$ per cui $\forall l \in [s]$ $\|P_{I_l} T P_{I_l}\| \leq \alpha$. Ora riapplicando il lemma a ciascuno degli operatori $P_{I_l} T P_{I_l}$ otteniamo che T è α^2-"pavable" in s^2 pezzi. Procedendo in questo modo otteniamo la "pavabilità" uniforme e dunque $(A)_{<\infty}$. □

Enunciamo ora una versione infinito dimensionale di $\mathrm{AA}(\delta)$:

$\mathbf{AA}(\delta)_\infty$ Per ogni proiezione $P \in B(\ell^2)$ che verifichi $\|D(P)\| \leq \delta$ esiste una partizione finita $(I_1, \ldots, I_r)$ di $\mathbb{N}$ per cui $\forall k = 1, \ldots, r$ $\|P_{I_k} P P_{I_k}\| < 1$

Senza troppe sorprese abbiamo che

Proposizione 4.13. *Per ogni $\delta \in (0,1)$ gli enunciati $AA(\delta)$ e $AA(\delta)_\infty$ sono equivalenti.*

Dimostrazione. Il fatto che $\mathrm{AA}(\delta)_\infty$ implichi $\mathrm{AA}(\delta)$ si dimostra allo stesso modo della prima parte della proposizione 4.10. Supponiamo per assurdo che

$$\forall r \in \mathbb{N}\, \forall \eta > 0\, \exists d \in \mathbb{N}\, \exists P_d \;\; \|D(P_d)\| \leq \delta$$
$$\forall (I_1, \ldots, I_r) \textit{ partizione di } [d] \exists k \in [d]; \|P_{I_k} P_d P_{I_k}\| > 1 - \eta$$

Ora se chiamiamo l'operatore

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & & \\ & P_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

su $\ell^2 \simeq \bigoplus_r \mathbb{C}^{d_r}$. Se esistella una partizione di $\mathbb{N}$ data da $I_1, \ldots, I_r$ che soddisfa le ipotesi di $\mathrm{AA}(\delta)$ per P possiamo considerare la sua restrizione a $[d]$ data da $(J_1, \ldots, J_r)$ tale che per ogni $k \in [r]$:

$$\|P_{I_k} P P_{I_k}\| \geq \|P_{J_k} P_{I_k} P P_{I_k} P_{J_k}\| = \|P_{J_k} P P_{J_k}\| = \|P_{J_k} P_d P_{J_k}\| > 1 - \eta$$

che è una contraddizione perché implica $\|P_{I_k} P P_{I_k}\| \geq 1$. Dunque P non rispetta $\mathrm{AA}(\delta)$ e abbiamo mostrato la prima implicazione. *** □

Possiamo ora dimostrare l'equivalenza tra (KS) e (F). Per farlo mostriamo che (A) $\Rightarrow$ (F) $\Rightarrow$ AA$(\delta)_\infty$ per ogni $\delta \in (0,1)$.

Proposizione 4.14. *(A) implica (F).*

Dimostrazione. Se ogni operatore su ℓ^2 è "pavable" fissiamo una successione di Bessel normalizzata $(f_i)_{i\in I}$ in uno spazio di Hilbert separabile H. Senza perdita di generalità possiamo allora supporre $I = \mathbb{N}$. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e mostriamo che (f_i) è riunione finita di $\varepsilon-$successioni di Riesz, ovvero di successioni di Riesz con costanti $c \geq 1-\varepsilon$ e $C \leq 1+\varepsilon$. Sia $S\colon \ell^2(\mathbb{N}) \to H$ l'operatore di sintesi associato alla successione (f_i) e poniamo $R := S^*S$, operatore di frame associato a (f_i). Per ogni indice $i \in \mathbb{N}$ vale:

$$\langle Re_i, e_i\rangle = \|Se_i\|^2 = \|f_i\|^2 = 1$$

cioè $D(R) = 1$. Per ipotesi (A) possiamo trovare una partizione $(I_1, \ldots, I_r)$ di $\mathbb{N}$ per la quale $\forall k \in [r]\ \ \|P_{I_k}(R-1)P_{I_k}\| \leq \varepsilon$ cioè

$$\forall k \in [r] \quad \|P_{I_k}RP_{I_k} - P_{I_k}\| \leq \varepsilon$$

Inoltre per ogni successione $(a_i)_{i\in I_k} \subseteq \mathbb{C}$ a supporto finito e per ogni $k \in [r]$ abbiamo:

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i\in I_k} a_i f_i\right\|^2 &= \langle SP_{I_k}\left(\sum_{i\in I_k} a_i e_i\right), SP_{I_k}\left(\sum_{i\in I_k} a_i e_i\right)\rangle \\ &= \langle P_{I_k}RP_{I_k}\left(\sum_{i\in I_k} a_i e_i\right), \sum_{i\in I_k} a_i e_i\rangle \\ &= \langle (P_{I_k}RP_{I_k} - P_{I_k})\left(\sum_{i\in I_k} a_i e_i\right), \sum_{i\in I_k} a_i e_i\rangle + \langle \sum_{i\in I_k} a_i e_i, \sum_{i\in I_k} a_i e_i\rangle\end{aligned}$$

e ne deduciamo quindi:

$$(1-\varepsilon)\left\|\sum_{i\in I_k} a_i e_i\right\|^2 \leq \left\|\sum_{i\in I_k} a_i e_i\right\|^2 \leq (1+\varepsilon)\left\|\sum_{i\in I_k} a_i e_i\right\|^2$$

cioè che ogni successione $(f_i)_{i\in I_k}$ è una $\varepsilon-$successione di Riesz per ogni $k \in \{1, \ldots, r\}$. $\square$

Proposizione 4.15. *(F) implica $AA(\delta)_\infty$ per ogni $\delta \in (0,1)$.*

Dimostrazione. Supponiamo (F) e fissiamo $\delta \in (0,1)$. Sia $P \in B(\ell^2)$ una proiezione con $\|D(P)\| \leq \delta$. Cerchiamo una partizione $(I_1, \ldots, I_r)$ di $\mathbb{N}$ che verifichi $\forall k \in [r]\ \ \|P_{I_k}PP_{I_k}\| < 1$. Per definizione

$$\begin{aligned}\|D(P)\| &= \sup_{i\in\mathbb{N}} \langle Pe_i, e_i\rangle \\ &= \sup_{i\in\mathbb{N}} \|Pe_i\|^2\end{aligned}$$

e i vettori $f_i := (1-P)e_i$ verificano

$$\begin{aligned}\|f_i\|^2 =& \langle e_i - Pe_i, e_i - Pe_i\rangle \\ =& 1 - 2\langle Pe_i, e_i\rangle + \langle Pe_i, Pe_i\rangle \\ =& 1 - 2\langle Pe_i, e_i\rangle + \langle P^2 e_i, e_i\rangle \\ =& 1 - 2\langle Pe_i, e_i\rangle + \langle Pe_i, e_i\rangle \\ =& 1 - \langle Pe_i, e_i\rangle \\ \geq& 1 - \delta\end{aligned}$$

il che implica $\inf_i \|f_i\| > 0$. Inoltre (f_i) è una successione di Bessel perché l'operatore $S := 1 - P$ è continuo. Dunque per ipotesi (F) possiamo trovare una partizione $(I_1, \ldots, I_r)$ di $\mathbb{N}$ per la quale ogni sottosuccessione $(f_i)_{i \in I_k}$ sia di Reisz. Allora esiste una costante $c > 0$ per cui, per ogni $k \in [r]$ e per ogni successione $(a_i)_{i \in I_k} \subseteq \mathbb{C}$ a supporto finito

$$\left\| \sum_{i \in I_k} a_i (1-P) e_i \right\|^2 \geq c \sum_{i \in I_k} |a_i|^2 = c \left\| \sum_{i \in I_k} a_i e_i \right\|^2$$

da cui si deduce che, per ortogonalità

$$\begin{aligned}\left\| P\left(\sum_{i \in I_k} a_i e_i \right) \right\|^2 =& \left\| \sum_{i \in I_k} a_i e_i \right\|^2 - \left\| (1-P)\left(\sum_{i \in I_k} a_i e_i \right) \right\|^2 \\ \leq& (1-c) \left\| \sum_{i \in I_k} a_i e_i \right\|^2\end{aligned}$$

cioè che $\forall x = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i e_i \in \ell^2$ vale

$$\|PP_{I_k} x\|^2 \leq (1-c) \|P_{I_k} x\|^2 \leq (1-c) \|x\|^2$$

e che dunque la norma dell'operatore $\|PP_{I_k}\| \leq (1-c)$. Notando che $\|P_{I_k} P P_{I_k}\| = \|(PP_{I_k})^* (PP_{I_k})\| = \|PP_{I_k}\|^2$ otteniamo che per ogni $k \in [r]$ $\|P_{I_k} P P_{I_k}\| \leq 1 - c < 1$.

□

Corollario 4.16. *(KS) è equivalente a (F).*

Dimostrazione. Basta osservare che:

- per la proposizione 4.8 (KS) $\iff$ (A)
- per le proposizioni precedenti (A) $\Rightarrow$ (F) $\Rightarrow$ $AA(\delta)_\infty$
- $AA(\delta)_\infty \Rightarrow$ (A) (essendo equivalenti grazie alla catena di proposizioni 4.10, 4.12, 4.13).

□

4.6 La congettura di Weaver

Chiudiamo con un'ultima riformulazione del problema.

Definizione 4.8. *Una successione $(f_i)_i$ in uno spazio di Hilbert H è detto un C-tight frame se*

$$\exists C > 0 \, \forall f \in H \quad \sum_{i \in I} |\langle f, f_i \rangle|^2 = C \, \|f\|^2 .$$

Esempio Se $C \in \mathbb{N}$ allora una riunione di C basi ortonormali è un C-tight frame.

Osservazione Se P è una proiezione ortogonale di $\mathbb{C}^d$ e si pone $f_i = \sqrt{C} P e_i$ allora abbiamo costruito una successione $(f_i)_{i \in [d]}$ che è un C-tight frame su $H := P(\mathbb{C}^d)$. Infatti $\forall f \in H$

$$\begin{aligned} \sum_{i \in [d]} |\langle f, fi \rangle|^2 =& C \sum_{i \in [d]} |\langle f, P e_i \rangle|^2 \\ =& C \sum_{i \in [d]} |\langle P f, e_i \rangle|^2 \\ =& C \, \|P f\|^2 \\ =& C \, \|f\|^2 . \end{aligned}$$

Lemma 4.17. *Ogni C-tight frame di uno spazio di Hilbert H è isometrico ad un frame della forma dell'osservazione (4.6): esiste $J \colon H \to \mathbb{C}^d$ isometria tale che $\forall i \in [d] \; J f_i = \sqrt{C} P e_i$ dove P è la proiezione ortogonale su JH.*

Dimostrazione. Sia $(f_i)_{i \in [d]}$ un C-tight frame di H. Innanzitutto notiamo che possiamo ridurci al caso in cui $H = Span(\{f_1, \ldots, f_d\})$. Infatti se $g \in H \cap Span(\{f_1, \ldots, f_d\})^{\perp}$ allora $\forall i \in [d] \;\; \langle g, f_i \rangle = 0$ che per definizione di C-tight frame implica $\|g\| = 0$ e dunque $g = 0$. Inoltre, a meno di porre $f_i' = f_i / \sqrt{C}$ possiamo supporre la costante $C = 1$. A questo punto utilizziamo l'operatore di analisi associato $J \colon f \mapsto (\langle f, f_i \rangle)_{i \in [d]}$ e consideriamo P il proiettore con matrice associata $(P)_{ij} = (\langle f_i, f_j \rangle)_{ij}$. Il fatto che $P = P^*$ è evidente. Mostriamo che $P^2 = P$, il che è equivalente a mostrare l'uguaglianza

$$\forall m, n \quad \sum_{i \in [d]} \langle f_m, f_i \rangle \, \overline{\langle f_n, f_i \rangle} = \langle f_m, f_n \rangle .$$

La successione (f_i) è un C-tight frame e dunque

$$\sum_{i\in[d]} |\langle f_m + f_n, f_i\rangle|^2 = \|f_m + f_n\|^2$$

$$\sum_{i\in[d]} |\langle f_m, f_i\rangle|^2 + \sum_{i\in[d]} |\langle f_n, f_i\rangle|^2 +$$

$$\sum_{i\in[d]} \langle f_m, f_i\rangle \overline{\langle f_n, f_i\rangle} + \sum_{i\in[d]} \langle f_n, f_i\rangle \overline{\langle f_m, f_i\rangle} = \|f_m\|^2 + \|f_n\|^2 + \langle f_m, f_n\rangle + \langle f_n, f_m\rangle$$

$$\sum_{i\in[d]} \langle f_m, f_i\rangle \overline{\langle f_n, f_i\rangle} + \sum_{i\in[d]} \langle f_n, f_i\rangle \overline{\langle f_m, f_i\rangle} = \langle f_m, f_n\rangle + \langle f_n, f_m\rangle$$

e ripetendo lo stesso ragionamento con la successione (if_i) e mettendo insieme le due uguaglianze otteniamo la tesi. $\square$

W(C) Notiamo, per $C > 0$, W(C) il seguente enunciato:

$$\exists r \in \mathbb{N}\ \exists \eta > 0\ \forall (f_i) \text{ C-tight frame finito}$$
$$\forall i\ \ \|f_i\| \leq 1\ (f_i) = \cup_{j=1}^{r} (g_j)$$
$$(g_i) \text{ di Bessel di costante } \leq (1-\eta)C$$

Lemma 4.18. *Se $(f_i)_{i\in[d]}$ è un C-tight frame di H isometrico a $(\sqrt{C}Pe_i) \subseteq \mathbb{C}^d$ allora $\|D(P)\| \leq \frac{1}{C}\max_i \|f_i\|^2$ e per ogni sottoinsieme $I \subseteq [d]$ la costante di Bessel di $(f_i)_{i\in I}$ è $C\,\|P_I P P_I\|$.*

Dimostrazione. Se $J\colon H \to \mathbb{C}^d$ è l'isometria che $Jf_i = \sqrt{C}Pe_i$ per $i \in [d]$ allora per definizione:

$$\begin{aligned}\|D(P)\| &= \max_i \langle Pe_i, e_i\rangle \\ &= \max_i \|Pe_i\|^2 \\ &= \frac{1}{C}\max_{i\in[d]} \|f_i\|^2 .\end{aligned}$$

Inoltre sia $I \subseteq [d]$. Poiché $\forall i \in I\ f_i = \sqrt{C}PP_Ie_i$, l'operatore di sintesi associato alla successione $(Jf_i)_i$ è $S := \sqrt{C}PP_I$ che ha norma $\|S\|^2 = C\,\|PP_I\|^2 = C\,\|P_IPP_I\|^2$ che dà la costante di Bessel per la successione (Jf_i) che è la stessa per la successione (f_i). $\square$

Proposizione 4.19. *$\forall C > 1$ W(C) è equivalente ad $AA(\frac{1}{C})$ con gli stessi r e η.*

Dimostrazione. Riscriviamo gli enunciati uno di seguito all'altro ed applichiamo il lemma (4.18).

AA($\frac{1}{C}$) $\exists r \in \mathbb{N}\ \exists \eta > 0\ \forall d \in \mathbb{N}\ \forall P$ proiezione ortogonale su $\mathbb{C}^d$ con $\|D(P)\| \leq \frac{1}{C}$ possiamo trovare una partizione $(I_1, \ldots, I_r)$ di $[d]$ tale per cui
$\forall k \in [r]\ \ \|P_{I_k}PP_{I_k}\| \leq 1 - \eta$.

W(C) $\exists r \in \mathbb{N}\ \exists \eta > 0\ \forall (f_i)$ C-tight frame finito $\forall i\ \|f_i\| \leq 1\ (f_i) = \cup_{j=1}^{r}(g_j)$ dove ogni (g_i) è una successione di Bessel con costante $\leq (1-\eta)C$.

Se (f_i) è un C-tight frame finito con $\|f_i\| \leq 1$, grazie al lemma (4.18) la diagonale della proiezione corrispondente $\|D(P)\| \leq \frac{1}{C}$ e per ipotesi di AA($\frac{1}{C}$) esiste una partizione di $[d]$ che ci dà esattamente il modo di trovare le successioni di Bessel. La disuguaglianza finale dà la limitazione sulla costante. Viceversa se P è una proiezione ortogonale con $\|D(P)\| \leq \frac{1}{C}$, consideriamo il C-frame corrispondente $f_i = \sqrt{C}Pe_i$ con $\|f_i\| = \sqrt{C}\,\|Pe_i\| \leq 1$ e l'ipotesi W(C) ci dice che possiamo scrivere (f_i) come unione di successioni di Bessel che ci danno la partizione di $[d]$ e la limitazione sulle costanti dà la disuguaglianza $\forall k \in [r]\ \|P_{I_k}PP_{I_k}\| \leq 1-\eta$. $\square$

W(C) e (KS) Osserviamo che grazie alla proposizione precedente (KS) è vero se e solo se $\forall C > 1$ W(C) lo è.

A questo punto possiamo chiudere il caso (KS) mostrando che W(C) è verificato.

Ricordiamo che se H è uno spazio di Hilbert e $v \in H \setminus \{0\}$ l'operatore di rango 1

$$(v \otimes v)\colon x \to \langle x, v\rangle\, v$$

è autoaggiunto e se $\|v\| = 1$ si riduce alla proiezione ortogonale su $\mathbb{C}v$.

Osservazione immediata Una successione finita $(f_i)_{i\in I}$ in uno spazio di Hilbert H è un C-tight frame se e solo se

$$\sum_{i\in I} f_i \otimes f_i = C\mathbb{1}$$

poiché $\forall x \in H$:

$$\left\langle \left(\sum_{i\in I} f_i \otimes f_i\right) x, x \right\rangle = \sum_{i\in I} \langle x, f_i\rangle \langle f_i, x\rangle = \sum_{i\in I} |\langle x, f_i\rangle|^2$$

Possiamo ora mostrare il teorema decisivo:

Teorema 4.20. *Sia $(v_i)_{i\in I}$ una successione finita di vettori aleatori indipendenti su $\mathbb{C}^d$, ognuno dei quali non prende che un numero finito di valori e sia $\varepsilon > 0$. Supponiamo verificati*

(i) $\forall i \in I\ \mathbb{E}(\|v_i\|^2) \leq \varepsilon$;

(ii) $\mathbb{E}\left(\sum_{i\in I} v_i \otimes v_i\right) = \mathbb{1}$.

Allora con probabilità positiva vale

$$\left\| \sum_{i\in I} v_i(\omega) \otimes v_i(\omega) \right\| \leq (1+\sqrt{\varepsilon})^2.$$

Corollario 4.21. *$\forall C > 1$ W(C) è vero. Per conseguenza (KS) e tutte le sue versioni equivalenti sono vere.*

Dimostrazione. Fissiamo $C > 1$ e $(f_i)_{i \in I} \subseteq \mathbb{C}^d$ un C-tight frame con $\|f_i\| \leq 1$. Ricordiamo che allora (osservazione (4.6))

$$\sum_{i \in I} f_i \otimes f_i = C\mathbb{1}$$

e dobbiamo trovare una partizione $(I_1, \dots, I_r)$ di I in modo che ogni successione $(f_i)_{i \in I_k}$ abbia una costante di Bessel al più uguale a $(1-\eta)C$; $r \in \mathbb{N}$ e $\eta > 0$ dipendono esclusivamente da C. Fissato $r \geq 2$ prendiamo una successione $(k_i)_{i \in I}$ di variabili aleatorie i.i.d. su $\{1, \dots, r\}$ con

$$\forall k \in \{1, \dots, r\} \quad P(k_i = k) = \frac{1}{r}$$

Definiamo allora i vettori aleatori v_i su $\mathbb{C}^{rd} = \mathbb{C}^d \oplus \dots \oplus \mathbb{C}^d$:

$$v_i(\omega) = \sqrt{\frac{r}{C}}(0 \oplus \dots f_i \oplus \dots 0)$$

dove f_i è al posto $k_i(\omega)$. I vettori aleatori v_i sono indipendenti e ciascuno di essi prende esattamente r valori. Essendo $\|f_i\| \leq 1$ allora $\mathbb{E}(\|v_i\|^2) = \mathbb{E}(\frac{r}{c}\|f_i\|^2) \leq \frac{r}{c}$ per ogni $i \in I$. Ora $\mathbb{E}\left(\sum_{i \in I} v_i \otimes v_i\right) = \mathbb{1}$ infatti:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\sum_{i \in I} v_i \otimes v_i\right) &= \sum_{i \in I} \mathbb{E}\left(v_i \otimes v_i\right) \\
&= \sum_{i \in I} \frac{1}{r}\frac{r}{C} \begin{pmatrix} f_i \otimes f_i & & \\ & \ddots & \\ & & f_i \otimes f_i \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{C} C\mathbb{1} \\
&= \mathbb{1}
\end{aligned}$$

Allora possiamo applicare il teorema (4.20) e ottenere che esiste almeno un $\omega \in \Omega$ tale che

$$\left\| \sum_{i \in I} v_i(\omega) \otimes v_i(\omega) \right\| \leq \left(1 + \sqrt{\frac{r}{C}}\right)^2$$

A questo punto poniamo $\mathbf{v_i} := v_i(\omega)$ e $\mathbf{k_i} := k_i(\omega)$ e definiamo una partizione $(I_1, \dots, I_r)$ di I definita da

$$\forall k = 1, \dots, r \quad I_k := \{i \in I \mid \mathbf{k_i} = k\}.$$

Allora per definizione

$$\sum_{i \in I} \mathbf{v_i} \otimes \mathbf{v_i} = \frac{r}{C}\left(\sum_{i \in I_1} f_i \otimes f_i\right) \oplus \dots \left(\sum_{i \in I_r} f_i \otimes f_i\right)$$

quindi prendendo la norma

$$\left\|\sum_{i\in I}\mathbf{v_i}\otimes\mathbf{v_i}\right\| = \frac{r}{C}\max_{k\in[r]}\left(\left\|\sum_{i\in I_k} f_i\otimes f_i\right\|\right)$$

e dalla disuguaglianza $\left\|\sum_{i\in I}\mathbf{v_i}\otimes\mathbf{v_i}\right\| \leq \left(1+\sqrt{\frac{r}{C}}\right)^2$ segue che:

$$\forall k\in[r] \quad \left\|\sum_{i\in I_k} f_i\otimes f_i\right\| \leq \left(1+\sqrt{\frac{r}{C}}\right)^2$$

Grazie all'osservazione (4.6) sappiamo allora che ogni successione $(f_i)_{i\in I_k}$ è di Bessel con costante di Bessel inferiore a

$$B(r,C) := \frac{C}{r}\left(1+\sqrt{\frac{r}{C}}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{r}}+\frac{1}{\sqrt{C}}\right)^2 C-$$

per cui possiamo scegliere r abbastanza grande da scrivere $B(r,C) = (1-\eta)C$. Ciò conclude la dimostrazione. $\square$

5 La soluzione del problema

5.1 Polinomi reali stabili

D'ora in avanti notiamo $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$ il semipiano complesso superiore.

Definizione 5.1. *Un polinomio in d variabili $z_1, \ldots, z_d$ si dice reale stabile se è a coefficienti reali e non ha alcuna radice in $\mathbb{H}^d \subset \mathbb{C}^d$.*

Osservazione Un polinomio in una variabile è reale stabile se e solo se è a coefficienti reali ed ha solo radici reali.

Costruiamo ora una classe di polinomi reali stabili.

Lemma 5.1. *Siano $A_1, \ldots, A_d$ matrici in $M_m(\mathbb{C})$ semidefinite positive di rango 1. Allora il polinomio $q(z, z_1, \ldots, z_d) = \det(z\mathbb{1}_m + \sum_{i=1}^d z_i A_i)$ è reale stabile.*

Dimostrazione. Utilizziamo il fatto che $A_i = A_i^*$ per ottenere che

$$\begin{aligned}\overline{q(z, z_1, \ldots, z_d)} =& \det(\overline{z}\mathbb{1}_m + \sum_{i=1}^d \overline{z_i} A_i^*) \\ =& q(\overline{z}, \overline{z_1}, \ldots, \overline{z_d})\end{aligned}$$

che implica che q è a coefficienti reali. Supponiamo ora per assurdo che esista $(z, z_1, \ldots, z_d) \in \mathbb{H}^{d+1}$ in cui $q(z, z_1, \ldots, z_d) = 0$. Possiamo trovare allora un vettore non nullo $\zeta \in \ell_m^2$ nel nucleo di $M := z\mathbb{1}_m + \sum_{i=1}^d z_i A_i)$. Consideriamo allora

$$\begin{aligned}\langle M\zeta, \zeta\rangle =& z \left\|\zeta\right\|^2 + \sum_{i=1}^d z_i \langle A_i\zeta, \zeta\rangle \\ =& 0\end{aligned}$$

che è una combinazione lineare nulla di $z, z_1, \ldots, z_d$ a coefficienti positivi non tutti nulli. Prendiamo ora la parte immaginaria e otteniamo una contraddizione e la tesi del lemma. □

Ricordiamo un teorema di analisi complessa:

Teorema 5.2. *Sia (f_k) una successione di funzioni olomorfe su un aperto connesso $G \subseteq \mathbb{C}$ che converge $f_k \to f \not\equiv 0$ uniformemente sui compatti di G. Allora se f ha uno zero di ordine m in $z_0 \in G$*

$$\forall \rho > 0 \; \exists k_0 \; \forall k \geq k_0 \exists z_1, \ldots z_m \in \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \rho\} \; \forall i \; f_k(z_i) = 0$$

e gli zeri di f_k tendono a z_0 quando $k \to \infty$.

Proposizione 5.3. *Sia $p(z_1, \ldots, z_d)$ un polinomio reale stabile, con $d > 1$. Allora $\forall t \in \mathbb{R}$ il polinomio a $d-1$ variabili $p(z_1, \ldots, z_{d-1}, t)$ è reale stabile o identicamente nullo.*

Dimostrazione. ** □

Proposizione 5.4. *Sia $p(z_1, \dots, z_d)$ un polinomio reale stabile. Allora $\forall t \in \mathbb{R}$ il polinomio $(1 - t\partial_d)p(z_1, \dots, z_d)$ è reale stabile.*

Dimostrazione. Dato che per $t = 0$ è ovvio, supponiamo $t \neq 0$. Ragioniamo per assurdo supponendo che $(1 + t\partial_d)p$ abbia uno zero in $\mathbb{H}^d$. Per ipotesi il polinomio $q(z) = p(z_1, \dots, z_{d-1}, z)$ non ha zeri in $\mathbb{H}$ e dunque in particolare $q(z_d) \neq 0$. Scriviamo la fattorizzazione di q:

$$q(z) = c\prod_{i=1}^{n}(z - w_i) \quad \Im(w_i) \leq 0$$

e osserviamo che

$$\begin{aligned} 0 = (1 + t\partial_d)p(z_1, \dots, z_d) =& (q + tq')(z_d) \\ =& q(z_d)(1 + t\frac{q'(z_d)}{q(z_d)}) \end{aligned}$$

da cui, prendendo la derivata logaritmica di q:

$$\begin{aligned} 0 = 1 + t\frac{q'(z_d)}{q(z_d)} =& 1 + t\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{z_d - w_i} \\ =& 1 + t\sum_{i=1}^{n}\frac{\overline{z_d - w_i}}{|z_d - w_i|^2} \end{aligned}$$

e se prendiamo la parte immaginaria:

$$0 = t\sum_{i=1}^{n}\frac{\Im(z_d) - \Im(w_i)}{|z_d - w_i|^2}$$

che è una contraddizione perché $t \neq 0$ e $\Im(w_i) \leq 0 < \Im(z_d)$ per $i = 1, \dots, d$. □

Indichiamo con $ZM(p)$ il più grande zero del polinomio p.

Lemma 5.5. *Siano $p(z)$ e $q(z)$ due polinomi di una variabile dello stesso grado con coefficiente direttivo uguale a 1. Supponiamo che $\forall t \in [0, 1]$ il polinomio $(1 - t)p + tq$ sia reale stabile. Allora $ZM((1 - t)p + tq) \in [ZM(p), ZM(q)]$.*

Dimostrazione. Innanzitutto possiamo ben supporre $0 < t < 1$ e $ZM(p) \leq ZM(q)$. Mostriamo che $ZM((1-t)p+tq) \leq ZM(q)$. Se $x > ZM(q)$ allora $p(x) > 0$ e $q(x) > 0$ per ipotesi sul coefficiente direttivo, dunque $((1 - t)p + tq)(x) > 0$ e $x > ZM((1 - t)p + tq)$. Ora mostriamo che $q(ZM(p)) \leq 0$, in questo modo $((1 - t)p + tq)(ZM(p)) \leq$ e per connessione (teorema dei valori intermedi) otteniamo che $ZM(p) \leq ZM((1 - t)p + tq)$. Supponiamo per assurdo che $q(ZM(p)) > 0$ e dunque esiste $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo per cui se $ZM(p) < x < ZM(p) + \varepsilon$ allora $q(x) > 0$. Sia $N\colon [0, 1] \to \mathbb{N}$ la funzione che conta il numero di zeri con molteplicità di $(1-t)p+tq$. Nell'intervallo $[ZM(p)+\varepsilon, ZM(q)]$ la funzione N è costante. Infatti per $x < ZM(p)+\varepsilon$ o $x > ZM(q)$, il polinomio $((1-t)p+tq)(x) > 0$ *** Ciò dà l'assurdo poiché $N(0) = 0$ essendo p strettamente positivo a destra di $ZM(p)$ e $N(1) \geq 2$ poiché essendo positivo in $ZM(p)+\varepsilon$, il polinomio q ha almeno 2 zeri nell'intervallo considerato (deve annullarsi e ritornare positivo). $\square$

5.2 Polinomi caratteristici misti

Definizione 5.2. *Siano $A_1, \ldots, A_d \in M_m(\mathbb{C})$. Il polinomio caratteristico misto della famiglia $\{A_1, \ldots, A_d\}$ è:*

$$\mu[A_1, \ldots, A_d](z) = \left(\prod_{i=1}^{d}(1-\partial_i)\right) \det\left(z\mathbb{1}_m + \sum_{i=1}^{d} z_i A_i\right)|_{z_1=\cdots=z_d=0}.$$

Osservazione Se $A_1, \ldots, A_d \in M_m(\mathbb{C})$ sono definite positive, dai lemmi e dalle proposizioni risulta che $\mu[A_1, \ldots, A_d](z)$ è reale stabile, cioè ha tutte radici reali.

Lemma 5.6. *Siano $A_1, \ldots, A_d \in M_m(\mathbb{C})$ matrici di rango 1 e sia $A = \sum_{i=1}^{d} A_i$. Allora*

$$p_A(z) = \mu[A_1, \ldots, A_d](z).$$

Possiamo ora enunciare due teoremi che ci permettono di concludere.

Teorema 5.7. *Siano $A_1, \ldots, A_d$ variabili aleatorie indipendenti a valori nell'insieme delle matrici di rango 1 semidefinite positive di $M_m(\mathbb{C})$. Poniamo $A := \sum_{i=1}^{d} A_i$ e supponiamo che*

(i) $\mathbb{E}(A) = \mathbb{1}_m$;

(ii) $\forall i = 1, \ldots, d \;\; \mathbb{E}(\|A_i\|) \leq \varepsilon$.

Allora, posta $\widetilde{z}$ la più grande radice reale di $\mathbb{E}(p_A)$, vale $\widetilde{z} \leq (1+\sqrt{\varepsilon})^2$.

Teorema 5.8. *Siano $A_1, \ldots, A_d$ variabili aleatorie indipendenti a valori nell'insieme delle matrici di rango 1 semidefinite positive di $M_m(\mathbb{C})$. Poniamo $A := \sum_{i=1}^{d} A_i$ e supponiamo che ognuna delle A_i prende solo un numero finito di valori. Allora posta $\widetilde{z}$ la più grande radice reale di $\mathbb{E}(p_A)$, vale - per almeno una realizzazione delle A_i - $\|A\| \leq \widetilde{z}$.*

Osservazione chiave I teoremi (5.7) e (5.8) implicano il teorema (4.20) e dunque la prova di (KS). Infatti i vettori aleatori v_i del teorema (4.20) che prendono un numero finito di valori producono gli operatori autoaggiunti di rango 1 $v_i \otimes v_i$ che non sono altro che le A_i dei teoremi (5.7) e (5.8). Se le ipotesi di questi ultimi sono soddisfatte, allora lo sono quelle del teorema (4.20) con A che corrisponde a $\sum_{i\in I} v_i \otimes v_i$. Allora

$$\|A\| \leq \widetilde{z} \leq (1+\sqrt{\varepsilon})^2$$

non è altro che
$$\left\| \sum_{i \in I} v_i(\omega) \otimes v_i(\omega) \right\| \leq (1 + \sqrt{\varepsilon})^2.$$

Riferimenti bibliografici

[1] Klaas Landsman e Marco Stevens. "The Kadison-Singer conjecture". In: *Nieuw Archief voor Wiskunde* 17.1 (2016), pp. 41–46. ISSN: 0028-9825.

[2] É. Matheron. "Le Problème de Kadison-Singer". In: *Gazette des Mathématiciens* 145.1 (2015), pp. 27–39. ISSN: 0224-8999.

[3] Alain VALETTE. "Le probleme de Kadison-Singer". In: *Séminaire Bourbaki* (2014), p. 66.