



GG-MATHIVERSE

Sistemi Dinamici

GGC

giuseppe.colabufo.2016@polytechnique.org

2017



Indice

1	Introduzione	2
2	Definizioni	3
2.1	Partiamo dall'inizio	3
2.2	Cascata di definizioni	4
2.3	Osservazioni \pm ovvie	9
3	HLL	12
3.1	Legendre e Lagrange	15
3.2	In pratica	16
3.3	Coordinate	18
4	Forma canonica di Jordan	21
4.1	Jordan	21
4.2	Esponenziale di Jordan	21
4.3	Forma matriciale dei complessi	22
5	Teoremi per la risoluzione	23
5.1	Art attack	26
6	Esemplificazioni in dimensione 2	29
7	Esempi ((in)utili) a caso	31
7.1	Modelli economici	33
8	Heu! Euler	36
9	Altra roba (che serve?)	39
9.1	Le coordinate polari	39
10	Fare gli esercizi	41

<i>1 INTRODUZIONE</i>	2
11 Caos	46
11.1 Horseshoe	47
12 Controllo	51
12.1 Feedback	51

1 Introduzione

Le sezioni 1-10 sono principalmente basate sul corso di *Sistemi dinamici* del prof. Andrea Milani (secondo anno all'UniPi). Il resto è un ampliamento tratto da altri corsi sul controllo e l'automatica.

2 Definizioni

2.1 Partiamo dall'inizio

Definizione 2.1. Un sistema dinamico *continuo* in un aperto $W \subseteq \mathbb{R}^n$ è una equazione differenziale ordinaria autonoma

$$\frac{dX}{dt} = F(X)$$

essendo $F: W \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione C^1 .

Definizione 2.2. Un sistema dinamico *discreto* in un aperto $W \subseteq \mathbb{R}^n$ è un diffeomorfismo $f: W \rightarrow W$.

Definizione 2.3. Un'orbita è una funzione $\mathbb{Z} \rightarrow W$ che soddisfa $\forall k \in \mathbb{Z} X_{k+1} = f(X_k)$.

Osservazione 1. Si ha che $\forall X_0 \in W$ esiste un'orbita definita da $X_k = f^k(X_0)$ e nelle ipotesi fatte questa è anche unica per ogni condizione iniziale (se esiste).

Definizione 2.4. Un sistema dinamico è lineare se il campo vettoriale che lo definisce lo è. Ossia se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ed $X \in \mathbb{R}^n$ il SD è della forma $\dot{X} = AX$.

Esercizio 1. Indovinate cos'è un SD non lineare.

Oss. 2: Momento pigrizia. D'ora in avanti:

- Sistema dinamico continuo = SDC;
- Sistema dinamico discreto = SDD;
- Sistema dinamico lineare = SDL; ...
- quel che si può abbreviare si abbrevia.

Definizione 2.5. Una soluzione $X(t)$ di un sistema dinamico è una curva che soddisfa l'equazione per valori di t in un certo intervallo.

Definizione 2.6. Il flusso integrale (di un SDC) è la famiglia di applicazioni a un parametro definita da:

$$\Phi^t: X_0 \mapsto X(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Osservazione 3. In generale il flusso integrale può non essere definito per ogni $t \in \mathbb{R}$ o per ogni condizione iniziale, poiché l'intervallo su cui la soluzione è definita dipende dalla condizione iniziale. Fissato t , Φ^t è continua e differenziabile dove definita. Inoltre la soluzione non cessa di essere definita ad un tempo finito a meno che non tenda alla frontiera di W .

Definizione 2.7. Una soluzione $X(t)$ è un'orbita periodica se esiste un $T \neq 0$ per cui $\forall t \in \mathbb{R} X(t+T) = X(t)$.

Definizione 2.8. Un integrale primo E (di un SDC) è una funzione differenziabile su W per cui $E(X(t)) = E(X(0)) = E(X_0)$ per ogni condizione iniziale. Per un SDD E è differenziabile e tale che $E(X_k) = E(X_0)$.

Definizione 2.9. Un SDC in \mathbb{R}^2 è conservativo se il suo flusso integrale è una trasformazione del piano in sè che conserva l'area e l'orientazione. Per un SDD analogamente la mappa che lo definisce deve conservare l'area.

2.2 Cascata di definizioni



Sia $W \subseteq \mathbb{R}^n$ e $F: W \rightarrow \mathbb{R}^n$ che definisce il sistema dinamico $\dot{X} = F(X)$ con la condizione iniziale $X(0) = X_0$. Allora :

- X_0 è un punto di equilibrio se $F(X_0) = 0$.
 → l'orbita è $X(t) = X_0$.
 → la soluzione è unica.
- Y è punto limite se $\lim_{t \rightarrow +\infty} X(t) = Y$.
- Y è punto attrattivo se $\exists U \ni Y \ U \subseteq W : \forall X_0 \in U \ \lim_{t \rightarrow +\infty} X(t) = Y$
 → o equivalentemente $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi^t(X_0) = Y$.
- Y è stabile se $\forall U \ni Y \ \exists V \ni Y \ U, V \subseteq W, : \forall X_0 \in V \ \forall t \geq 0 \Phi^t(X_0) \in U$.
- Y è asintoticamente stabile se è stabile ed attrattivo.
- Y è instabile se è non stabile
 → e quindi $\exists U \ni Y \ \forall V \ni Y \ \exists X_0 \in V \ \exists t \geq 0 \Phi^t(X_0) \notin U$.

Nel caso di un SDD si può definire

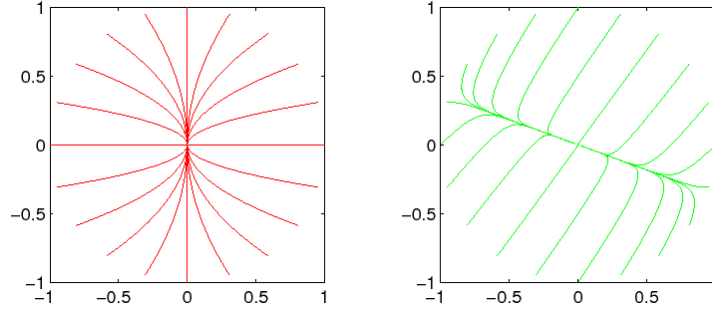


Figura 1: Nodo in forma canonica e non

Definizione 2.10. $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mappa stabile in X_0 se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall k \in \mathbb{N} |X - X_0| \leq \delta \Rightarrow |F^k(X) - F^k(X_0)| \leq \varepsilon.$$

Instabile altrimenti. Se invece oltre ad essere stabile, esiste un intorno $U \ni X_0$ per cui $\forall X \in U \lim_{k \rightarrow +\infty} |F^k(X) - F^k(X_0)| = 0$, la mappa è asintoticamente stabile.

Vediamo di che tipo possono essere i punti di equilibrio (in \mathbb{R}^2 guardando la matrice del linearizzato):

- ⋈ NODO: 2 autovalori reali concordi;
- ⌒ SELLA: 2 autovalori reali discordi;
- ⊙ CENTRO: 2 autovalori con parte reale nulla (immaginari puri);
- * FUOCO: 2 autovalori complessi con parte reale non nulla;

(Il segno degli autovalori determina il comportamento da sorgente o da pozzo del punto).

Definizione 2.11. Un punto di equilibrio per un SDC è iperbolico se la matrice del linearizzato non ha autovalori con parte reale nulla.

Di seguito riporto le figure per la rappresentazione (nel caso di dimensione 2) in forma canonica.

Definizione 2.12. Il bacino di attrazione per un punto di equilibrio Y è l'insieme $U = \{X_0 \in W \mid \lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi^t(X_0) = Y\}$.

Definizione 2.13. Dato un SDC con punto di equilibrio S , sviluppando con Taylor in S si ottiene il *linearizzato* in cui la funzione F è approssimata dalla sua matrice jacobiana A .

Le parti reali degli autovalori di A si dicono esponenti di Lyapounov.

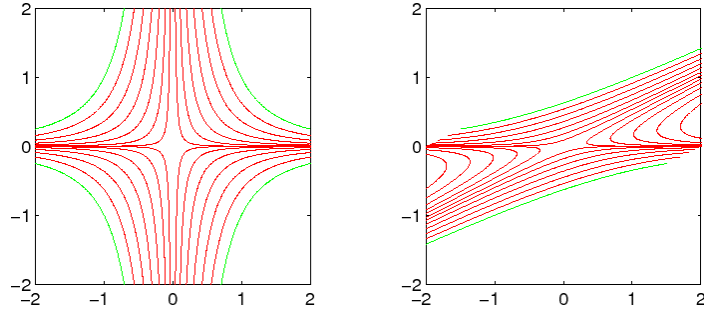


Figura 2: Sella in forma canonica e non

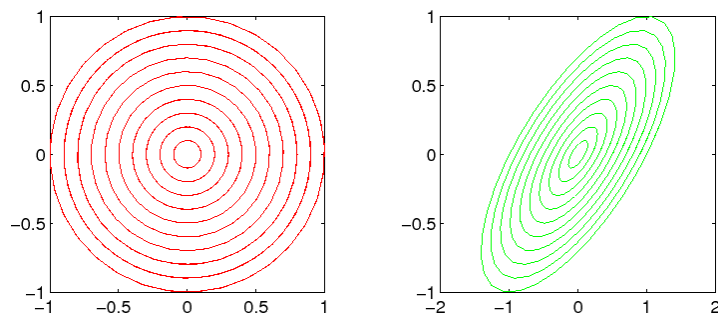


Figura 3: Centro in forma canonica e non

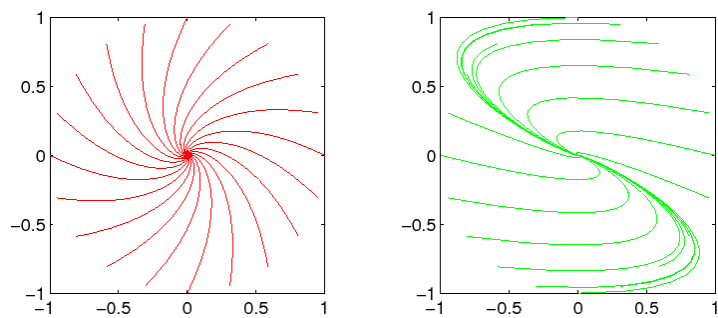


Figura 4: Fuoco in forma canonica e non

Definizione 2.14. Un punto di equilibrio è un **pozzo** (*sorgente*) se tutti gli esponenti di Lyapounov del sistema linearizzato sono negativi (*positivi*).

Definizione 2.15. Dato un SDDL con punto di equilibrio S i moduli degli autovalori si dicono moltiplicatori di Lyapounov. La soluzione $S = 0$ è asintoticamente stabile se e solo se questi sono tutti < 1 .



Figura 5: Pozzo

Definizione 2.16. Se $\Phi^t(X)$ è il flusso integrale di $F(X)$, la derivata totale è la derivata in $t = 0$ della funzione ottenuta fissando la condizione iniziale:

$$\left. \frac{dV(\Phi^t(X))}{dt} \right|_{t=0} = \nabla V(X) \cdot F(X)$$

Definizione 2.17. Una funzione di Lyapounov per il punto di equilibrio S è una funzione di classe C^1 in un intorno U di S che soddisfa:

- $\dot{V}(X) \leq 0 \forall X \in U$.
- $V(S) = 0, V(X) > 0 \forall X \in U, X \neq S$.

Definizione 2.18. Per un sistema dinamico discreto, se il linearizzato nel punto fisso ha:

- due autovalori complessi di modulo 1, il punto è **ellittico**
- due autovalori reali, di moduli uno maggiore ed uno minore di 1, si parla di un punto fisso **iperbolico**.

Definizione 2.19. Un insieme P è invariante per il flusso integrale se le soluzioni con condizione iniziale in P esistono e sono contenute in P per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Definizione 2.20. Un sistema newtoniano a un grado di libertà è un'equazione del tipo:

$$\ddot{x} = f(x)$$

con f di classe C^1 .

Osservazione 4. La trasformazione in sistema dinamico si ottiene ponendo $y = \dot{x}$. I punti di equilibrio sono della forma $(\bar{x}, 0)$ dove $f(\bar{x}) = 0$.

Definizione 2.21. Un sistema dinamico gradiente è un SDC della forma $\dot{X} = F(X) = -\nabla U(X)$, dove $U \in C^2(W)$. La funzione $U(X)$ si dice potenziale del campo conservativo $F(X)$.

Oss. 5: Simili ma non uguali. Il potenziale dei sistemi gradienti è quello di un campo vettoriale opposto alle velocità. L'opposto dell'energia potenziale nei sistemi newtoniani è quello di un campo vettoriale che esprime l'accelerazione.

Definizione 2.22. Una curva eccezionale è tale per cui il suo supporto ha delle soluzioni che hanno limite diverso, oppure arrivano allo stesso limite con tangenti differenti rispetto a soluzioni con condizioni iniziali in un sistema fondamentali di intorno della curva.

Definizione 2.23. Una separatrice è una curva differenziabile in \mathbb{R}^2 tale che:

- a) le soluzioni con condizione iniziale sulla curva hanno tutte lo stesso limite per $t \rightarrow +\infty$ (o per $t \rightarrow -\infty$);
- b) per ogni punto sulla curva c'è un intorno in cui i punti fuori dalla curva non hanno lo stesso limite per $t \rightarrow +\infty$ (o per $t \rightarrow -\infty$).
- c) ogni soluzione con condizione iniziale sulla curva resta sempre sulla curva, ovvero la curva è un insieme invariante.

Definizione 2.24. L'insieme ω -limite dell'orbita è l'insieme dei valori limite di $X(t)$ per $t \rightarrow +\infty$. L'insieme α -limite dell'orbita è l'insieme dei valori limite di $X(t)$ per $t \rightarrow -\infty$.

Osservazione 6. Per un'orbita periodica l'insieme ω -limite coincide con quello α -limite. Se questo è un insieme limite per una diversa orbita si dice ciclo limite.

Definizione 2.25. Una sezione locale è una curva C^1 definita su un intervallo reale tale che in ogni punto $\frac{dq}{ds}$ è indipendente dal campo vettoriale F .

Osservazione 7. Una sezione locale attraversa trasversalmente tutte le soluzioni del SD che incontra.

Definizione 2.26. Lo spazio delle configurazioni è l'insieme in cui può muoversi il vettore di stato.

Definizione 2.27. Una **variabile angolo** è una variabile che parametrizza una S^1 .

2.3 Osservazioni \pm ovvie

Osservazione 8. Un sistema non autonomo si riconduce ad un sistema autonomo per omogeneizzazione:

$$\begin{cases} \dot{X} &= F(X, t) \\ X(t_0) &= X_0 \end{cases}$$

diventa

$$Y = \begin{bmatrix} t \\ X \end{bmatrix} \quad \dot{Y} = \begin{bmatrix} 1 \\ F(X) \end{bmatrix} \quad Y(0) = \begin{bmatrix} t_0 \\ X_0 \end{bmatrix}$$

Osservazione 9. Date tutte le orbite si può ricostruire il sistema dinamico. Trovarle non è banale.

Osservazione 10. Un sistema dinamico continuo si può discretizzare costruendo una successione di valori di t . Il modo più semplice è fissare un passo h e considerare $t_k = kh$ e $X_k = X(t_k)$. La cosa più carina è approssimare un sistema continuo tramite uno discreto.

Osservazione 11. Il cambiamento di base commuta con l'esponenziale.

Osservazione 12. Un punto limite/attrattivo/stabile è necessariamente di equilibrio. Un punto attrattivo può non essere stabile.

Osservazione 13. Se c'è un teorema sul pozzo ce n'è uno sulla sorgente identico a cui si scambiano segni e/o versi delle disuguaglianze.

Osservazione 14. In \mathbb{R}^2 i punti di equilibrio iperbolici sono solo: pozzi, sorgenti e selle in base al numero di esponenti di Lyapounov positivi.

Osservazione 15. Un punto di equilibrio iperbolico o è un pozzo o è instabile. In \mathbb{R}^2 è ovvio ma vale anche in \mathbb{R}^n .

Osservazione 16. Un sistema newtoniano a un grado di libertà ammette sempre un integrale primo.

Osservazione 17. Se gli esponenti di Lyapounov in un punto di equilibrio di un sistema non lineare sono tutti diversi da zero le proprietà di stabilità del punto di equilibrio del sistema non lineare sono le stesse del sistema linearizzato.

Osservazione 18. Se i moltiplicatori di Lyapounov per un SDDL sono tutti ≤ 1 non è detto che l'origine sia asintoticamente stabile: se gli autovalori

di modulo 1 hanno molteplicità geometrica > 1 nelle soluzioni ci sono componenti a crescita polinomiale.

Osservazione 19. Gli esponenti di Lyapounov sono i logaritmi naturali dei moltiplicatori del sistema discretizzato. Cioè se $\dot{X} = AX$ ha esponente di Lyapounov $\chi = \Re(\lambda)$ allora il discretizzato $X_{k+1} = BX_k = \exp(Ah)X_k$ ha moltiplicatori $\mu = \exp(\Re(\lambda)h)$. E dunque $\chi = \log \mu$.

Osservazione 20. Vale un analogo teorema del pozzo (e sorgente) nonlineare discreto.

Osservazione 21. In un sistema dissipativo a un grado di libertà i punti di equilibrio sono gli stessi di quello con dissipazione nulla. Inoltre i punti instabili restano tali, quelli stabili diventano asintoticamente stabili.

Osservazione 22. I punti di equilibrio per un sistema newtoniano con dissipazione sono i punti stazionari di $V(x)$ e una funzione di Lyapounov è l'energia, che non è più un integrale primo (ma è non crescente sulle orbite).

Osservazione 23. In un sistema gradiente il campo è ortogonale in ogni punto alle superfici di livello di U e si annulla solo nei suoi punti stazionari (che sono quindi di equilibrio per il SD).

Osservazione 24. Essendo $\dot{U}(X) = -|\nabla U(X)|^2 \leq 0$ dove l'uguaglianza vale solo nei punti di equilibrio, allora la funzione $U(X) - U(S)$ è una funzione di Lyapounov stretta per S (minimo di U e asintoticamente stabile).

Osservazione 25. Un sistema dissipativo $\ddot{x} = f(x) - \gamma\dot{x}$ si comporta per γ piccolo quasi come un sistema newtoniano conservativo (vabbè...) e per γ molto grande quasi come un sistema gradiente (già più interessante...)

Osservazione 26. La matrice del SD linearizzato di un SD gradiente è data da $A = -H_U$. Essendo pertanto simmetrica i suoi autovalori sono tutti reali e coincidono con gli esponenti di Lyapounov nel punto stazionario. Allora se il punto è un minimo ($H > 0$) l'equilibrio è un pozzo, se è un massimo ($H < 0$) una sorgente, altrimenti è una sella (il punto ha un bacino ma non è nella parte interna del suo bacino).

Osservazione 27. Le separatrici fungono da frontiera dei bacini di attrazione di ciascun punto di equilibrio asintoticamente stabile.

Osservazione 28. Se un'orbita $X(t)$ resta sempre dentro un compatto, tutte le successioni $X(t_n)$ hanno sottosuccessioni convergenti. L'insieme dei valori limite non cambia se si sceglie una diversa condizione iniziale lungo la stessa traiettoria ($Y(t - t_0) = X(t)$).

Osservazione 29. Per ogni punto che non è di equilibrio passa almeno una sezione locale. Esiste un intorno della sezione S in cui ogni soluzione che passa nell'intorno incrocia S .

Oss. 30: Curve di livello Hamiltoniane. Se l'Hamiltoniano ha la forma $H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$ dove $V(q) \in C^1(a, b) \subset \bar{\mathbb{R}}$, ci sono due casi:

- Se $\lim_{q \rightarrow a} V(q) = \lim_{q \rightarrow b} V(q) = +\infty$ allora tutti gli insiemi di livello di $H(p, q)$ sono compatti e quindi orbite periodiche o orbite i cui insiemi limite sono i punti stazionari di H .
- Se $\lim_{q \rightarrow a} V(q) = L$ e $\lim_{q \rightarrow b} V(q) = M$ allora gli insiemi di livello $H(p, q) = \text{cost} < \min\{L, M\}$ sono compatti (o vuoti), mentre $H = L$ ed $H = M$ sono curve eccezionali.

3 HLL

Definizione 3.1. Una funzione $H(p, q)$ definisce le equazioni di Hamilton che danno il SDC:

$$\begin{cases} \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \\ \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \end{cases}$$

hamiltoniano a un grado di libertà (spazio delle configurazioni di dimensione 1, spazio delle fasi di dimensione 2).

Osservazione 1. L'hamiltoniana stessa è un integrale primo.

Osservazione 2. Il campo vettoriale $\nabla H(p, q)$ è ortogonale in ogni punto al campo delle equazioni di Hamilton. (\dot{p}, \dot{q}) si ottiene da ∇H con una rotazione di $\pi/2$.

Oss. 3: Parentesi di Poisson. Una parentesi di Poisson è un'operazione



Figura 6: Un poisson

binaria definita da

$$\{u, v\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q_i} - \frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} \right)$$

con $u(p, q)$ e $v(p, q)$ funzioni di $2n$ variabili. Valgono le proprietà:

- $\{H, cost\} = 0$
- $\{H, H\} = 0$
- $\{H, G\} = -\{G, H\}$
- $\{a, \{b, c\}\} + \{c, \{a, b\}\} + \{b, \{c, a\}\} = 0$ (*identità di Jacobi*)

Oss. 4: Hamilton e Poisson. Il sistema si riscrive come:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = J \nabla H(p, q)$$

e $\dot{H} = (\nabla H)^T J \nabla H = \{H, H\}$. (J è una matrice antisimmetrica quindi definisce una forma quadratica nulla). In generale:

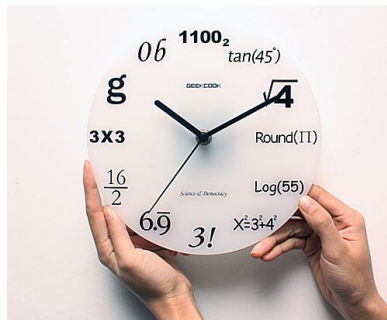
$$\{G, H\} = (\nabla G)^T J \nabla H = \dot{G} = \frac{d}{dt} G(\Phi_H^t(p, q)) \Big|_{t=0}$$

Oss. 5: Hamilton e Newton. I sistemi hamiltoniani sono una generalizzazione di quelli newtoniani. Inoltre tra i due c'è un cambio di orientazione: le variabili passano da (posizione, velocità) a (momento, posizione).

Oss. 6: Da sapere.

- La soluzione di un sistema hamiltoniano si può esprimere mediante quadrature e funzioni implicite.
- Le curve di livello regolari, semplici e chiuse di H corrispondono ad orbite periodiche.

Oss. 7: Trovare la legge oraria. Caso newtoniano: $H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$.



1. Si considera la curva di livello $H(p, q) = E$
2. è implicitamente definita $p = p(q) = \pm \sqrt{2m(E - V(q))}$
3. poiché $p = m\dot{q}$ si ricava

$$t_2 - t_1 = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{q_1}^{q_2} \frac{dq}{\sqrt{E - V(q)}}$$

4. se $t = t(q)$ è monotona si può invertire e ricavare $q = q(t)$;

5. si può spezzare l'integrale dove q cambia segno in modo da ottenere la monotonia.

Oss. 8: Trovare il periodo. Un punto di equilibrio per un SH è un punto stazionario per H . Nel caso $H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$ il punto è della forma $(0, q^*)$ con $V'(q^*) = 0$.

1. Se la curva di livello non contiene punti di equilibrio:

- nei punti in cui la curva attraversa l'asse $p = 0$ si ha $\dot{p} \neq 0$;
- guardiamo l'intervallo tra due intersezioni in cui $E = V(q_1) = V(q_2)$ e $V(q) < E$ per $q \in (q_1, q_2)$
- esistono due curve simmetriche che definiscono la traiettoria (insieme dei punti percorsi dall'orbita con condizione iniziale $(0, q_1)$).
- ogni soluzione è un'orbita periodica perché un punto ω -limite dovrebbe essere di equilibrio ma non ce ne sono nel chiuso $H = E$.
- il periodo è dato (per simmetria) da

$$T = \sqrt{2m} \int_{q_1}^{q_2} \frac{dq}{\sqrt{E - V(q)}}$$

- l'integrale è improprio in entrambi gli estremi, ma sviluppando, se $V'(q_1) \neq 0 \neq V'(q_2)$ risulta convergente.

2. Se la curva di livello contiene punti di equilibrio questo può essere limite per $t \rightarrow \pm\infty$

Osservazione 9. Il procedimento per il calcolo della legge oraria si generalizza ad Hamiltoniane qualsiasi (non newtoniane): se in un punto $\frac{\partial H}{\partial p}(p_0, q_0) \neq 0$ allora per il teorema delle funzioni implicite localmente $p = p(q)$ in modo che $H(p(q), q) = H(p_0, q_0)$ e si può ricavare

$$t(q) = \int_{q_0}^q \frac{1}{\frac{\partial H}{\partial p}(p(s), s)} ds$$

e invertire per trovare $q(t)$ (e di conseguenza $p(t) = p(q(t))$). Come prima, se in un punto $\frac{\partial H}{\partial p}(p, q) = 0$ allora l'integrale si spezza in due. Questo è necessario per il calcolo del periodo: su un'orbita periodica $q(t)$ ha sempre (almeno) un punto di massimo e uno di minimo (e quindi $\dot{q} = 0$).

Osservazione 10. Ad un massimo o minimo locale di H corrisponde un equilibrio stabile. Ad una sella una sella.

3.1 Legendre e Lagrange

Definizione 3.2. Trasformazione di Legendre:

$$(p, q) \mapsto (q, \dot{q})$$

Se si suppone H strettamente convessa come funzione di p a q fisso, si ha invertibilità globale. Generalizza la trasformazione da newtoniano ad hamiltoniano per relazioni non lineari tra p e \dot{q} .

Definizione 3.3 (Lagrangiana). Geometricamente è l'opposto dell'intercetta della retta tangente al grafico di H .

Oss. 11: Trasformata di Legendre.

$$L(q, \dot{q}) = p\dot{q} - H(p, q)|_{p=p(q, \dot{q})}$$

e la relazione è invertibile per la condizione di convessità.

Definizione 3.4 (Equazione di Lagrange).

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

esprime dinamiche equivalenti al sistema hamiltoniano nei due sistemi di coordinate, nel senso che la trasformazione di coordinate (un diffeomorfismo) manda le soluzioni dell'una nelle soluzioni dell'altra. La dinamica di un sistema si riferisce alle soluzioni, senza aver bisogno di precisare il sistema di coordinate in cui sono espresse.

Osservazione 12. La condizione di non annullamento di $\frac{d^2L}{d\dot{q}^2}$ che permette di ricavare un SD dall'equazione di Lagrange, corrisponde alla condizione di convessità di H come funzione di p .

Teorema 3.1 (Cambio di coordinate). Sia $x = x(q)$ un cambiamento di coordinate di classe C^2 con $\frac{dx}{dq} \neq 0$ tale che la lagrangiana $L(q, \dot{q})$ diventi $\mathcal{L}(x, \dot{x})$ e che valga $L(q, \dot{q}) = \mathcal{L}(x(q), \dot{x}(q, \dot{q}))$. Allora le equazioni di Lagrange esprimono dinamiche equivalenti nei due sistemi di coordinate, cioè

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \iff \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$$

Il che equivale a dire che il diagramma

$$\begin{array}{ccc} (q_0, \dot{q}_0) & \xrightarrow{\phi} & (x_0, \dot{x}_0) \\ \downarrow \Phi_L^t & & \downarrow \Phi_{\mathcal{L}}^t \\ (q, \dot{q}) & \xrightarrow{g} & \mathcal{L} \\ & \searrow L & \swarrow \mathcal{L} \\ & \mathbb{R} & \end{array}$$

commuta e le lagrangiane si corrispondono per valore.

3.2 In pratica

Definizione 3.5. Un corpo puntiforme è un corpo per il quale l'energia cinetica è della forma

$$T = \frac{m}{2} \left| \frac{dX}{dq} \right|^2 \dot{q}^2$$

cioè fornita dal solo movimento del centro di massa (ogni contributo dovuto ai moti di rotazione è trascurabile).

Oss. 13: Vincoli lisci. Da un sistema newtoniano a più gradi di libertà in cui compaiono vincoli si può ricavare un sistema hamiltoniano ad un grado di libertà.

Oss. 14: Remind:. Un vincolo è liscio se è senza attrito e parallelo alla velocità. Dato un corpo puntiforme di massa m vincolato sulla curva $X(q)$ di classe C^2 , supponiamo le forze esterne dotate di energia potenziale $W(X)$ e che l'energia potenziale ristretta alla curva sia $V(q) = W(X(q))$; supponiamo anche che le componenti delle forze normali alla curva siano annullate dalle reazioni del vincolo. Le equazioni di Newton contengono un termine per esprimere le reazioni vincolari:

$$m\ddot{X} = -\nabla W + R$$

e l'equazione di Lagrange dice che l'accelerazione del punto è compensata dalla forza del potenziale:

$$(m\ddot{X} + \nabla W) \cdot \frac{dX}{dq} = 0$$

ed è dunque equivalente assumendo $R \cdot \frac{dX}{dq} = 0$.

Vincoli "espliciti" Se il vincolo è il grafico della funzione $y = f(x)$ di classe C^2 :

$$T(x, \dot{x}) = \frac{m}{2} (1 + f'(x)^2) \dot{x}^2$$

e la lagrangiana è

$$L(x, \dot{x}) = T(x, \dot{x}) - mgf(x)$$

mentre l'Hamiltoniana:

$$H(p, x) = \frac{p^2}{2m(1 + f'(x)^2)} + mgf(x)$$

Usando il parametro arco, $y = h(s)$ si ottiene

$$L(s, \dot{s}) = \frac{m\dot{s}^2}{2} - mgh(s)$$

ma non è detto sia semplice calcolare esplicitamente $s(x)$.

Oss. 15: Momenti di inerzia. Se un corpo è libero di ruotare attorno ad un asse con direzione fissa, possiede energia cinetica di rotazione data da $\frac{I\dot{\theta}^2}{2}$. Il momento di inerzia I è della forma αmR^2 : per esempio $\alpha = 2/5$ per la sfera e $\alpha = 1/2$ per il cilindro.

Oss. 16: Scelta del sistema di riferimento. Nei sistemi rotanti, in cui la rotazione è mantenuta da un motore esterno, non c'è conservazione dell'energia (la potenza del motore è proprio \dot{E}).

Ci sono due modi di scegliere il sistema di riferimento:

1. Sistema inerziale:

- L'energia cinetica sarà la somma di una forma quadratica omogenea in \dot{q} e di una funzione di grado 0 in q .
- Il coefficiente di \dot{q}^2 è positivo se la curva (che ruota attorno all'asse) è regolare.
- L'energia potenziale è tale che la sua composizione con la parametrizzazione del vincolo non dipende dal tempo.
- La lagrangiana $L = T - V = T_2 + T_0 - V$ è indipendente dal tempo.
- Il moto lungo il vincolo rispetta le equazioni di Newton, le reazioni vincolari e il motore compensano lo sbilanciamento.
- L'Hamiltoniana è $H = T_2 - T_0 + V$.
- L'Hamiltoniana è un integrale primo per l'equazione di Lagrange **ma non** è l'energia:

$$E = H + 2T_0 \quad \dot{E} = 2\dot{T}_0 \neq 0$$

2. Sistema solidale con la rotazione:

- L'energia cinetica è solo la forma quadratica T_2 omogenea in \dot{q} .
- La lagrangiana $L = T - V = T_2 + T_0 - V$ è indipendente dal tempo.
- L'Hamiltoniana è $H = T_2 - T_0 + V$.
- Il termine $-T_0$ è l'energia potenziale associata alla forza centrifuga.

3.3 Coordinate

Definizione 3.6. Se per ogni Hamiltoniana $H(p, q)$ il cambiamento di coordinate Ψ preserva la forma della dinamica e l'Hamiltoniana immagine $K(w, z)$ è tale che $H(p, q) = K(w(p, q), z(p, q))$ allora Ψ si dice trasformazione canonica.

Cioè deve commutare il diagramma:

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbb{R} & \\
 H \nearrow & & \nwarrow K \\
 (p, q) & \xrightarrow{\Psi} & (w, z) \\
 \Phi_H^t \downarrow & & \downarrow \Phi_K^t \\
 (p(t), q(t)) & \xrightarrow{\Psi} & (w(t), z(t))
 \end{array}$$

Teorema 3.2. Sia Ψ cambiamento di coordinate diffeomorfismo con matrice jacobiana A . Allora Ψ è canonica se e solo se $\det A = 1$.

Oss. 17: Con Poisson. $(p, q) \mapsto (w(p, q), z(p, q))$ è canonica se e solo se $\{z, w\} = 1$.

Oss. 18: Flusso integrale canonico. Fissato t il flusso Φ^t è un'equivalenza tra le dinamiche ed è conservativo. Allora per ogni t nell'intervallo di definizione Φ^t è una trasformazione canonica.

Coordinate polari canoniche Imponendo la condizione sul determinante jacobiano si ottiene:

$$p = \sqrt{2I} \cos \theta \quad q = \sqrt{2I} \sin \theta$$

Supponendo $H(p, q)$ con insiemi di livello tutti compatti formati da una sola curva regolare, semplice e chiusa (*poca roba insomma...*) ognuna di queste è un'orbita periodica.

Definizione 3.7 (Librazione). Se p e q sono periodiche con stesso periodo:

$$\begin{cases} p(t+P) = p(t) \\ q(t+P) = q(t) \end{cases}$$

l'orbita è detta di tipo **librazione**.

Oss. 19: Oss.. Tanto per dire qualcosa... La curva racchiude necessariamente (almeno) un punto di equilibrio. L'insieme di curve corrispondenti a livelli vicini è diffeomorfo al disco puntato.

Definizione 3.8 (Circolazione). Se q è una variabile angolo, e si ha:

$$\begin{cases} p(t+P) = p(t) \\ q(t+P) = q(t) + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

cioè l'orbita periodica si avvolge sul cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$ senza essere il bordo di un compatto e si dice di tipo **circolazione**.

Oss. 20: Oss. Nel caso q sia una variabile angolo, l'orbita periodica può essere anche di librazione.

Definizione 3.9. (con molta fantasia...)

- Una variabile che ha le dimensioni di un'energia per un tempo è detta **variabile azione**.
- Una variabile si dice **angolo** se parametrizza una S^1 .
- Una coppia di coordinate in cui la prima sia azione e la seconda angolo, in modo che l'hamiltoniana dipende solo dalla prima, si dice coppia di variabili **azione-angolo**.
- ∅ Il cambiamento di coordinate in (I, θ) manda un aperto nel piano delle fasi costituito da sole orbite periodiche nel rettangolo $[I_1, I_2] \times [0, 2\pi]$.
- ∅ I è costante su ogni orbita periodica.
- ∅ Il cambiamento di coordinate si suppone C^2 e tale da essere una trasformazione canonica.
- ∅ I è un integrale primo $\iff \dot{I} = \frac{\partial K}{\partial \theta} = 0 \iff H(p, q) = K(I)$.
- ∅ Il flusso integrale è dato solo da scorrimenti:

$$\begin{cases} I(t) = I_0 \\ \theta(t) = \omega(I_0)t + \theta_0 \end{cases} \quad \text{essendo } \omega(I_0) = \frac{\partial K}{\partial I}(I_0) \text{ la frequenza propria.}$$

- ∅ La traiettoria di una curva nel piano (p, q) fa da bordo a un insieme D trasformato dal cambiamento nell'insieme F nel piano (I, θ) con la stessa area.
- ∅ Calcolando le aree con GG¹ si ricava $I = \frac{\text{area}(D)}{2\pi}$.
- ∅ I è definita a meno di una costante.

¹Gauss-Green

Esempio Se $H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$ si può scrivere la variabile azione in funzione dell'energia (calcolata integrando):

$$I(E) = \frac{2 \int_{q_1}^{q_2} \sqrt{2m(E - V(q))} dq}{2\pi} = \frac{1}{\pi} \int_{q_1}^{q_2} \sqrt{2m(E - V(q))} dq$$

La soluzione si ottiene invertendo $I(E)$ in modo che $E = K(I)$ ha per derivata la frequenza $\omega(I)$ e il periodo è $P(I) = \frac{2\pi}{\omega(I)}$.

4 Forma canonica di Jordan

4.1 Jordan

Diamo per scontato le dimostrazioni e la conoscenza dell'esistenza della forma di Jordan (complesso e reale) di una matrice quadrata. Giusto per non creare confusione esplicitiamo le convenzioni (probabilmente sono al contrario di come il resto del mondo le conosce, ma così piacciono agli *sleeping pebbles*).

1. Se B è la matrice del cambiamento di base dalla base canonica a quella di Jordan, allora B^{-1} è quella che contiene i vettori (per colonna) della nuova base e $BAB^{-1} = D$
2. La forma canonica di una matrice nilpotente è diagonale a blocchi; ogni blocco contiene eventualmente 1 nella *sottodiagonale*.

4.2 Esponenziale di Jordan

Se D è il blocco di Jordan di ordine p :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

allora

$$\exp(Dt) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ t & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{t^2}{2} & t & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} & \frac{t^{p-2}}{(p-2)!} & \cdots & t & 1 \end{pmatrix}$$

e l'esponenziale di una matrice diagonale a blocchi di Jordan è la matrice diagonale a blocchi esponenziali.

Se siamo interessati alla potenza di un blocco di Jordan, questa si scrive come:

$$J_k(\lambda)^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \cdots & \cdots & \binom{n}{k-1}\lambda^{n-k+1} \\ & \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \cdots & \cdots & \binom{n}{k-2}\lambda^{n-k+2} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} \\ & & & & & \lambda^n \end{pmatrix}^T$$

dove k è la taglia del blocco.²

²perdonate la trasposta, è troppo più bello scrivere sopra la diagonale.

4.3 Forma matriciale dei complessi

Si trova un isomorfismo tra l'algebra dei numeri complessi e quella delle matrici generata da I e J dove

$$1 \leftrightarrow I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad i \leftrightarrow J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

In questo modo se $z = a + ib$, allora $|z| = \sqrt{\det z}$. La cosa carina è che le matrici di questa forma commutano tra loro ed essendo definite dalla prima colonna possiamo calcolare il prodotto di due come prodotto matrice vettore: la rappresentazione vettoriale sfrutta l'isomorfismo con \mathbb{R}^2 .

Introducendo la matrice di rotazione (di un angolo θ in verso antiorario)

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

allora J corrisponde a $R_{\pi/2}$ (com'è giusto che sia). Allora possiamo scrivere ogni numero complesso $z = r \cos \theta + i \sin \theta$ in forma matriciale come rR_θ . Il coniugio corrisponde alla trasposizione della matrice e l'inverso si calcola $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

5 Teoremi per la risoluzione

Teorema 5.1. *Se A è diagonalizzabile, tutte le orbite del SDL $\dot{X} = AX$ si scrivono come combinazione lineare di $\exp(\lambda_i t)$ essendo λ_i gli autovalori di A .*

Ricordando che:

Definizione 5.1. Una matrice è semisemplice se è diagonalizzabile in senso complesso.

si ha che:

Teorema 5.2. *Se A è semisemplice, le orbite del sistema dinamico $\dot{X} = AX$ si possono esprimere come combinazione lineare di $\exp(a_j t) \cos(b_j t)$ e $\exp(a_j t) \sin(b_j t)$, essendo gli autovalori di A della forma $a_j + ib_j$.*

Più in generale allora:

Teorema 5.3. *Per ogni matrice A quadrata $n \times n$ le orbite del SDCL $\dot{X} = AX$ si scrivono come combinazione lineare di*

$$e^{\lambda t}, e^{at} \cos(bt), e^{at} \sin(bt), e^{\lambda t} P(t), e^{at} \cos(bt) P(t), e^{at} \sin(bt) P(t)$$

dove i polinomi hanno grado $<$ della molteplicità algebrica dell'autovalore (λ o $a + ib$).

Teorema 5.4. *Per ogni matrice A $n \times n$ le soluzioni del SDDL $X_{k+1} = AX_k$ hanno componenti che si esprimono come combinazione lineare di*

$$\lambda^k, \lambda^k P(k) \Re(z^k) \Im(z^k) \Re(z^k) P(k) \Im(z^k) P(k)$$

dove λ è autovalore reale, z complesso e i polinomi hanno grado minore della molteplicità algebrica.

Teorema 5.5. *Ogni matrice quadrata reale (complessa) si decompone in modo unico come somma di una matrice semisemplice e di una nilpotente reali (complesse) che commutano tra loro.*

Teorema 5.6 (Pozzo lineare). *L'origine è un pozzo se e solo se*

$$\exists k > 0 \exists b > 0 \forall t > 0 \forall X_0 |\exp(tA)X_0| \leq k e^{-tb} |X_0|$$

Osservazione 1. L'origine è asintoticamente stabile se è un pozzo. Se esiste un esponente di Lyapounov positivo allora è instabile.

Teorema 5.7 (Norma adattata). Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che per ogni autovalore λ di A vale $\alpha < \Re(\lambda) < \beta$. Allora esiste una norma indotta dal prodotto scalare standard nella base V di \mathbb{R}^n per cui $\alpha \|Y\|^2 \leq \langle AY, Y \rangle \leq \beta \|Y\|^2$.

Teorema 5.8 (Pozzo non lineare). Se S è un pozzo per il SD $\dot{X} = AX$ linearizzato di $\dot{X} = F(X)$ ed esiste $c > 0$ per cui $\forall \lambda$ autovalore di A $\Re(\lambda) < -c$ allora $\exists U \subseteq W$ intorno di S in cui:

- il flusso integrale $\Phi^t(X)$ è definito $\forall X \in U \forall t \geq 0$;
- $\exists B > 0 \forall X \in U \forall t \geq 0$ si ha $|\Phi^t(X) - S| \leq B e^{-ct} |X - S|$.

Osservazione 2. In particolare il flusso tende ad S partendo da ogni condizione iniziale in U e quindi S è asintoticamente stabile.

Teorema 5.9. Se S è un punto di equilibrio che possiede una funzione di Lyapounov in un intorno U , allora è stabile.

Teorema 5.10 (Funzione di Lyapounov decrescente). Sia $V(X)$ una funzione di Lyapounov per il punto di equilibrio S (per un SDC) e sia P un compatto positivamente invariante, intorno di S . Se V è strettamente decrescente su P , allora S è asintoticamente stabile e P contenuto nel suo bacino di attrazione.

Teorema 5.11. In un sistema newtoniano, se il potenziale ha un minimo locale forte in x_0 , allora il punto $(x_0, 0)$ è di equilibrio stabile ma non asintoticamente.

Osservazione 3. Se il minimo è non degenere (cioè $V''(x_0) > 0$), allora il linearizzato è di tipo centro.

Teorema 5.12 (Punti limite di un SD gradiente). Se $X(t)$ è una soluzione che si mantiene dentro un compatto e i punti di equilibrio di U sono un insieme discreto, allora esiste il $\lim_{t \rightarrow +\infty} X(t)$ ed è un punto stazionario di U .

Teorema 5.13. *Una sella non lineare ha sempre delle soluzioni che tendono all'equilibrio per $t \rightarrow \pm\infty$. Le immagini delle soluzioni sono due insiemi localmente chiusi nell'intorno del punto di equilibrio e la loro frontiera è data da curve eccezionali.*

Teorema 5.14. *Una sella non lineare ha due separatrici:*

- *una stabile che è l'insieme delle condizioni iniziali per cui il punto di equilibrio è limite per $t \rightarrow +\infty$; questa è tangente nel punto di equilibrio all'autospazio dell'autovalore negativo del linearizzato.*
- *una instabile che è l'insieme delle condizioni iniziali per cui il punto di equilibrio è limite per $t \rightarrow -\infty$; tangente nel punto all'autospazio relativo all'autovalore positivo del linearizzato.*

Teorema 5.15. *Ogni sella non lineare ha un intorno U in cui esiste un omeomorfismo k con un intorno V della sella lineare in modo che le soluzioni dei due SD sono coniugate, ovvero commuta il diagramma:*

$$\begin{array}{ccc} X_0 \in U & \xrightarrow{k} & Y_0 \in V \\ \Phi^t(X_0) \downarrow & & \downarrow \Psi^t(Y_0) \\ X(t) & \xrightarrow{k} & Y(t) \end{array}$$

Teorema 5.16. *Se L è un insieme limite della soluzione $\Phi^t(X_0)$ allora è chiuso, la sua intersezione con W è un insieme invariante e se $X(t)$ è un'orbita contenuta in un compatto positivamente invariante, allora L è connesso.*

Teorema 5.17 (Poincaré-Bendixon). *In \mathbb{R}^2 gli insiemi limite compatti e non vuoti o contengono punti di equilibrio o sono orbite periodiche.*

Teorema 5.18 (Punto fisso). *Se C è una curva chiusa corrispondente alla traiettoria di un SD in \mathbb{R}^2 , all'interno di C esiste almeno un punto di equilibrio o un'altra orbita periodica.*

Teorema 5.19 (Liouville). *Se $H(p, q)$ è di classe C^2 , allora $\Phi^t(p_0, q_0)$ conserva l'area (il determinante del suo jacobiano è 1).*

Teorema 5.20 (Curve di livello dell'Hamiltoniana). *Sia $H(p, q)$ una hamiltoniana di classe $C^2(W)$, con $W \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto.*

1. Se una componente connessa dell'insieme di livello $H = E$ è non vuota, compatta e non contiene punti stazionari, allora coincide con la traiettoria di un'orbita periodica.
2. Se contiene punti stazionari isolati, ogni componente connessa ottenuta togliendo questi punti è una traiettoria.
3. nel secondo caso, la soluzione o esce da ogni compatto in W o ha come limite uno dei punti stazionari.

5.1 Art attack

Per disegnare le curve di livello e successivamente le orbite delle soluzioni, si può procedere in questo modo:



1. Si disegna il grafico del potenziale $V(x)$;
2. ad ogni minimo corrisponde un punto di minimo dell'energia, che è un punto di equilibrio stabile per il SD;
 - le curve di livello corrispondenti a valori immediatamente superiori si chiudono attorno al minimo;
3. ad ogni massimo corrisponde un punto stazionario che è sella per l'energia;
4. se il potenziale ha un punto stazionario degenere:
 - espandendo $E(x, y)$ con Taylor si ottiene $E(x, y) = V(x_0) + \frac{1}{2}y^2 - \frac{(x-x_0)^m}{m!}f^{(m-1)}(x_0) + \dots$
 - se m è pari le curve di livello sono due con tangenti orizzontali;
 - se m è dispari c'è una cuspidè;
 - si ottengono due archi di curva simmetrici rispetto all'asse x il cui andamento rispecchia quello del potenziale;

Oss. 4: Diagrammi di biforcazione. Se J è un parametro reale tale che in base al suo valore cambi il numero di punti di equilibrio o che questi siano $q = q(J)$ e cambino al variare del parametro la loro stabilità.

Definizione 5.2. Un diagramma di biforcazione è un grafico nel piano (J, q) che rappresenta il valore delle configurazioni di equilibrio in corrispondenza di J .

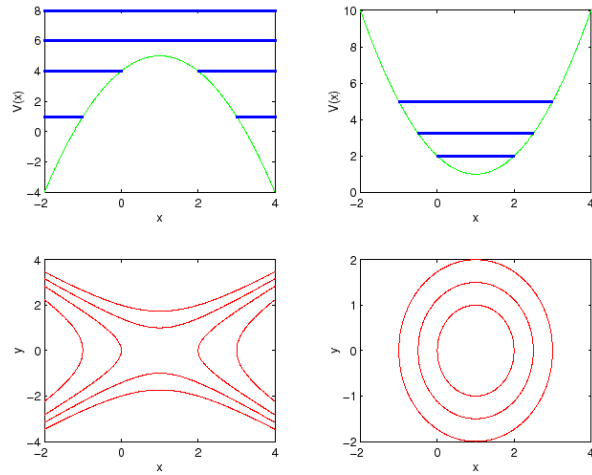


Figura 7: Massimo e minimo non degeneri

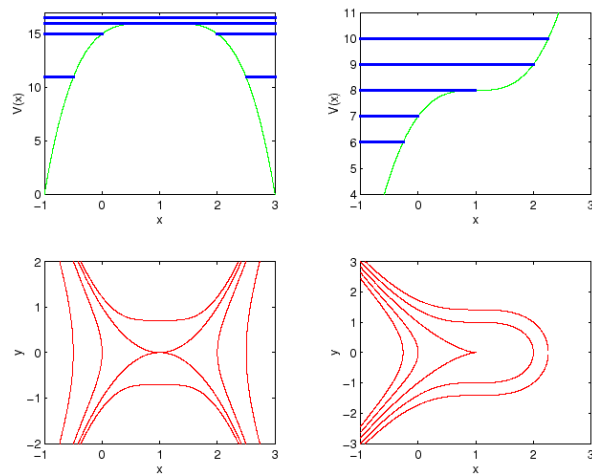


Figura 8: Massimo degenere e flesso a tangente orizzontale

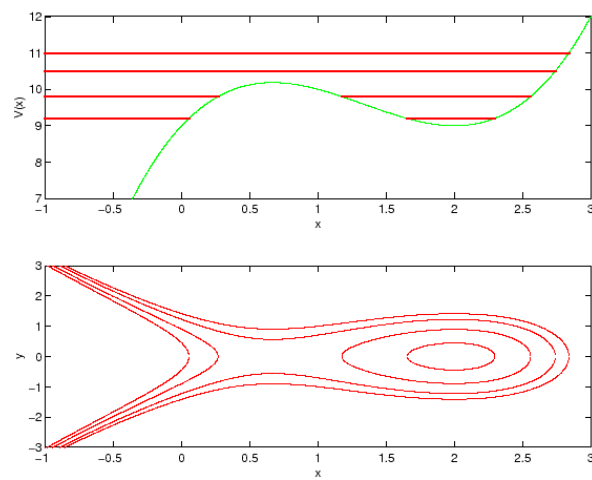


Figura 9: Curve di livello dell'energia in un sistema newtoniano

6 Esemplicazioni in dimensione 2

Data una qualunque matrice $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, a seconda della sua forma canonica di Jordan possiamo determinare il comportamento qualitativo delle orbite del sistema dinamico. Scriviamo $+$ e $-$ per significare rispettivamente un autovalore positivo o negativo della matrice. A seconda dei casi:

1. $- \neq -$ **Nodo**: le orbite tendono a 0 con tangente che tende all'orizzontale (o verticale a seconda dell'ordine in cui si mettono gli autovalori) tranne la curva eccezionale $x = 0$ (o $y = 0$);
2. $- = -$
 - Diagonalizzabile: (fascio di rette): le orbite tendono a 0 con tangenti diverse in ogni direzione;
 - Non diagonalizzabile: **Nodo improprio**: le orbite tendono a 0 con tangente che tende alla verticale; $x = 0$ è curva eccezionale.
3. $+ -$ **Sella**: a parte le due curve eccezionali $x = 0$ e $y = 0$ le altre sono (delle specie di iperboli) asintotiche agli assi.
4. $0 -$ (fascio di rette): le orbite sono rette verticali che tendono all'asse x di punti di equilibrio.
5. 00 (nel caso diagonalizzabile c'è poco da dire...) le orbite sono rette verticali che tendono all'infinito tranne i punti di equilibrio in $x = 0$. Il flusso integrale è uno scorrimento.

Se invece i due autovalori sono complessi coniugati: $\lambda = a \pm ib$

1. $a < 0$ **Fuoco**: le orbite spiraleggiano con frequenza b entrando nel punto di equilibrio;
2. $a > 0$ **Fuoco**: le orbite spiraleggiano con frequenza b uscendo dal punto di equilibrio;
3. $a = 0$ **Centro**: le orbite sono periodiche e girano in senso (anti)orario se $b(>) < 0$. Il SD ammette $E(x, y) = x^2 + y^2$ come integrale primo.

Questo segue dal fatto che se $A \in \mathbb{C}$ le soluzioni di $\dot{Z} = AZ$ sono $\exp(At)Z_0 = x(t) + y(t)J$ date da:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{at}(\cos(bt)x_0 - \sin(bt)y_0) \\ y(t) &= e^{at}(\sin(bt)x_0 + \cos(bt)y_0) \\ \text{con } A &= aI + bJ \quad Z_0 = x_0 + y_0J \end{aligned}$$

In generale quando gli autovalori sono complessi coniugati, i corrispondenti autovettori possono essere ottenuti l'uno dall'altro per coniugio ($W e \bar{W}$). Nella base data da $\{\Im(W), \Re(W)\}$ la forma canonica di A è proprio $a + bJ$.

Se A ha un solo autovalore λ allora si può scrivere $A = \lambda I + N$ dove N è nilpotente di ordine 2. Si deduce allora che

$$\exp(At) = e^{\lambda t}(I + Nt)$$

e in generale se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $A = \lambda I + N$ con $N^m = 0$, allora

$$\exp(At) = e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{N^j t^j}{j!}$$

7 Esempi ((in)utili) a caso

Oscillatore armonico Ha equazione definita da

$$\ddot{x} = -\omega x$$

e si traduce nel sistema dinamico:

$$\begin{cases} \dot{x} &= \omega y \\ \dot{y} &= -\omega x \end{cases}$$

che si risolve trovando:

$$\begin{cases} x(t) &= x_0 \cos \omega t + y_0 \sin \omega t \\ y(t) &= -x_0 \sin \omega t + y_0 \cos \omega t \end{cases}$$

Osservazione 1. La discretizzazione diretta della derivata seconda fatta con le differenze in avanti ed il metodo di Eulero applicato al corrispondente sistema dinamico hanno gli stessi autovalori, quindi sono lo stesso sistema dinamico discreto, visto in un diverso sistema di riferimento. Anche in questo caso la soluzione del sistema dinamico discreto diverge seguendo un cammino a spirale.

Osservazione 2. Approssimando con l'operatore Δ_0 la proprietà del sistema di essere conservativo si preserva e anche quella di avere un integrale primo.

Risonanza La risonanza è un effetto di amplificazione dovuto all'uguaglianza di due frequenze. Due oscillatori armonici accoppiati con la stessa frequenza

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \ddot{u} + \omega^2 u = 2\varepsilon \dot{x}$$

producono il sistema dinamico lineare

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega & 0 & 0 \\ -\omega & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 & \omega \\ 0 & \varepsilon & -\omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{pmatrix}$$

che produce la stessa soluzione dell'oscillatore armonico per $(x(t), y(t))$ e

$$\begin{cases} u(t) = & u_0 \cos(\omega t) + v_0 \sin(\omega t) + \varepsilon t x(t) \\ v(t) = & -u_0 \sin(\omega t) + v_0 \cos(\omega t) + \varepsilon t y(t) \end{cases}$$

Punto di equilibrio attrattivo ma non stabile Dato il SDC

$$\begin{cases} \dot{x} &= x - y - x(x^2 + y^2) + \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} =: F(x, y) \\ \dot{y} &= y + x - y(x^2 + y^2) - \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} =: G(x, y) \end{cases}$$

Se estendiamo il campo all'origine definendo $F(0, 0) = G(0, 0) = 0$, il campo esteso non è $C^1(\mathbb{R}^2)$, infatti la derivata $\frac{\partial G}{\partial x}(0, 0)$ non esiste in quanto

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{G(h, 0) - G(0, 0)}{h} &= \frac{h - h^2/|h|}{h} = 0 \\ \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{G(h, 0) - G(0, 0)}{h} &= \frac{h - h^2/|h|}{h} = 2\end{aligned}$$

Passando a coordinate polari:

$$\begin{cases} \dot{\rho} &= \rho(1 - \rho^2) \\ \dot{\theta} &= 1 - \cos \theta = 2 \sin^2(\theta/2) \end{cases}$$

e si ha che:

- $\rho(t) = 0$ se $\rho_0 = \rho(0) \in \{0, 1\}$
- $\theta(t) = 0$ se $\theta_0 = \theta(0) \in \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

quindi $\theta = 0$ corrisponde ad una semiretta invariante nelle coordinate (x, y) . Visto l'andamento delle soluzioni si conclude che il punto di equilibrio $(x, y) = (1, 0)$ è attrattivo ma non stabile.

Osservazione 3. Volendo si possono aggiungere gli esempi:

- Pendolo pag 157
- pendolo variabile 159
- pendolo cicloidale 159
- piano inclinato 163

7.1 Modelli economici

I SD discreti possono essere usati per modellizzare fenomeni economici.

Oss. 4: Modello della ragnatela.

- SDDL in \mathbb{R}^3 (ma si può considerare in \mathbb{R}^2);
- relazione **price, demand & supply**;
- i parametri $a, b, f > 0$ $c \geq 0$ rappresentano rispettivamente il consumo a prezzo 0, l'elasticità della domanda, la risposta del produttore all'aumento di prezzo e boh;
- l'unità di tempo è quella necessaria alla produzione;
- Le equazioni sono:
 1. $d_t = a - bp_t$ della domanda
 2. $s_t = -c + fp_{t-1}$ della produzione
 3. $s_t = d_t$ dell'equilibrio di mercato
- ricavando: $p_t = -\frac{f}{b}p_{t-1} + \frac{a+c}{b}$
- una soluzione particolare è $p_t = cost = \frac{a+c}{b+f} =: k$;
- la soluzione generale è perciò:

$$p_t = k + \left(\frac{-f}{b}\right)^t (p_0 - k)$$

che è un'oscillazione amplificata o smorzata a seconda se il rapporto $\frac{f}{b}$ è maggiore o minore di 1.

- In caso di smorzamento la soluzione tende a $p = k$, $s = d = -c + fk$.

Oss. 5: Modello delle scorte. Molto simile alla ragnatela: stesse variabili **s, p, d** ma più la scorta **u**

- Le equazioni:
 1. $d_t = a - bp_t$ della domanda
 2. $s_t = -c + fp_{t-1}$ della produzione
 3. $u_t - u_{t-1} = s_t - d_t$ delle scorte
 4. $p_{t+1} - p_t = -g[u_t - u_{t-1}]$ del prezzo

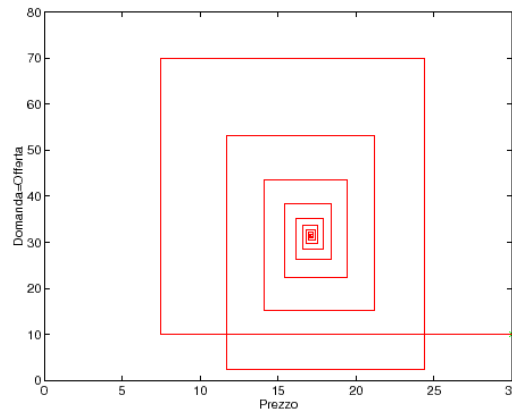


Figura 10: Ragnatela

- dove i parametri sono come sopra e anche $g > 0$ che dice come la merce invenduta faccia calare il prezzo.
- l'equazione del prezzo diventa:

$$p_{t+1} - (1 - bg)p_t + fg p_{t-1} = (a + c)g$$

con soluzione particolare costante $p_t = k := \frac{a+c}{b+f}$

- si nota che il prezzo di equilibrio è lo stesso.
- L'equazione omogenea corrisponde al SDD:

$$\begin{bmatrix} p_{t+1} \\ p_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - bg) & -fg \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_t \\ p_{t-1} \end{bmatrix}$$

che in base alle radici dell'equazione caratteristica ha un comportamento differente.

- se sono reali con moduli < 1 è garantita stabilità asintotica;
- se il determinante $fg > 1$ di sicuro la mappa è instabile.

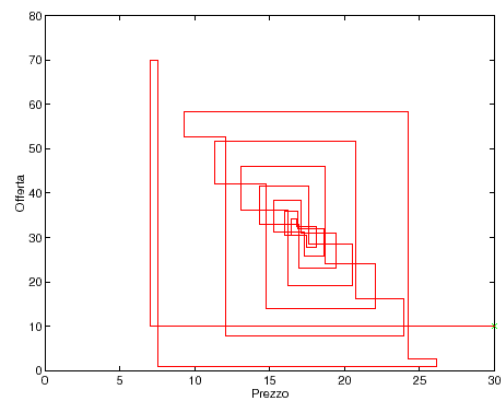


Figura 11: Scorte

8 Heu! Euler

Si può approssimare un SDC con un SDD tramite il metodo di Eulero. L'inconveniente è che l'errore di discretizzazione è crescente esponenzialmente.

Poiché vale

$$\exp(At)X_0 = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(I + \frac{At}{m} \right)^m X_0$$

abbiamo un modo di relazionare un flusso integrale di un SDCL con le rappresentazioni di un SDDL (dati rispettivamente da $\dot{X} = AX$ e $X_{k+1} = \left(I + \frac{At}{m} \right) X_k$). Per calcolare la soluzione al tempo $t = \delta$ si suddivide l'intervallo in m pezzi con passo di integrazione $h = \delta/m$. A questo punto si approssima la soluzione con una approssimazione lineare usando il differenziale: $X\left(\frac{(k+1)\delta}{m}\right) = X_k + hAX_k$.

- Il **poligono di Eulero** si ottiene congiungendo i punti $(k\delta/m, X_k)$ ed è una funzione continua ma non differenziabile. La successione di poligoni di Eulero tende alla soluzione del SDC uniformemente in $[0, \delta]$.
- L'errore di troncamento locale si maggiore in norma:

$$\|\exp(Ah) - (I + Ah)\| \leq e^{\|A\|h} - (1 + \|A\|h) = \frac{\|A\|^2 h^2}{2} e^{\|A\|h} \leq \frac{\|A\|^2 h^2}{2} e^{\|A\|h}$$

$$\text{cioè } \Phi^h(X_k) - (X_k + hF(X_k)) = O(h^2).$$

- ★ Il metodo di Eulero consiste in approssimare ad istanti di tempo $t = kh$ la soluzione:

$$\begin{cases} X_0 = & X(0) \\ X_{k+1} = & X_k + hF(X_k) \end{cases}$$

- ★ per avere informazioni su valori di t diversi si può ricorrere ad interpolazione;
- ★ l'interpolazione lineare costruisce il poligono di Eulero.
- ★ l'errore di troncamento locale è infinitesimo di ordine 2 ($O(h^2)$).
- ★ $\Delta_k = X(kh) - X_k = \Phi^{kh}(X_0) - X_k$ è l'errore di troncamento accumulato.
- ★ Se vale:

$$|F(X) - F(Y)| \leq L|X - Y| \quad |F(X)| \leq M \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{allora } \delta_k := |\Delta_k| \leq Mh(e^{\sqrt{n}Lt} - 1).$$

- ★ la maggiorazione dell'errore in casi specifici è pessimista: l'esponente di solito è più piccolo ed è legato al $\max \chi$ esponente di Lyapounov.

Oss. 1: Importante! Se si utilizzano approssimazioni (ovvero operatori discreti in luogo di quelli continui) le proprietà di stabilità vengono in generale modificate. Anche se sono conservative non è possibile preservare sempre gli integrali primi del SDC. Quindi le proprietà anche qualitative si trasmettono in modo imperfetto.

Oss. 2: Un'algebra di operatori. Definiamo:

- ⊃ spostamento $S(f)(t) = f(t + h)$
- ⊃ differenza in avanti $\Delta_+(f)(t) = f(t + h) - f(t)$
- ⊃ identità $I(f)(t) = f(t)$.

Vale $\Delta_+ = S - I$ e tutti gli operatori tra loro commutano.

- Questo permette di approssimare le derivate $D^{(k)}$ con Δ_+^k/h^k .
- Infatti vale $\frac{\Delta_+^2}{h^2} = D^2 + O(h)$.
- Tuttavia approssimo "più vicino" a $t + h$ che a t .
- Il problema si aggira se nelle equazioni differenziali appaiono solo derivate di ordine pari.

Oss. 3: Tour operator.

- Si può definire un operatore analogo a Δ_+ che rispetta le stesse approssimazioni:

$$\text{⊃ differenza all'indietro } \Delta_-(f)(t) = f(t) - f(t - h) = I - S^{-1}.$$

- A questo punto si definisce:

$$\text{⊃ differenza centrale } \Delta_0(f)(t) = f(t + h/2) - f(t - h/2) = S^{1/2} - S^{-1/2}.$$

- $\Delta_0^2 = S - 2I + S^{-1} = \Delta_+ - \Delta_-$.
- $\frac{\Delta_0^2}{h^2} = D^2 + O(h)$.

Oss. 4: Mappa standard. Dato un sistema newtoniano $\ddot{x} = f(x)$, la sua discretizzazione usando gli operatori di sopra è:

$$\begin{aligned} \dot{x} = y &\rightarrow hy_k = \Delta_- x_k \iff hy_{k+1} = \Delta_+ x_k \\ x_{k+1} - x_k &= x_k - x_{k-1} + h^2 f(x_k) \\ &\Rightarrow \begin{cases} x_{k+1} = x_k + hy_{k+1} \\ y_{k+1} = y_k + hf(x_k) \end{cases} \end{aligned}$$

Il SD non lineare si chiama **mappa standard** del sistema newtoniano. Tale mappa è conservativa. (Non è detto però che conservi gli integrali primi).

Oss. 5: Mappa standard e dissipazione. Se c'è dissipazione: $\ddot{x} = f(x) - \gamma\dot{x}$, si approssima la derivata seconda utilizzando Δ_0 e la derivata prima utilizzando Δ_- in modo da ottenere il SDD:

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + h^2 f(x_k) + (1 - \gamma h)y_k \\ y_{k+1} = h^2 f(x_k) + (1 - \gamma h)y_k \end{cases}$$

Oss. 6: !!. Stavolta invece di $hy_k = \Delta_- x_k$ si è posto $y_k = \Delta_- x_k$

I punti fissi di questo corrispondono agli zeri di f e quindi ai punti di equilibrio del SDC. Il linearizzato ha matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 + h^2 f'(x_k) & 1 - \gamma h \\ h^2 f'(x_k) & 1 - \gamma h \end{bmatrix}$$

e se $\gamma h < 1$ in base al segno di $f'(x_k)$:

- $f'(x_k) > 0$: il punto fisso è iperbolico e nel SDC è una sella;
- $f'(x_k) < 0$:
 - radici complesse di modulo $\sqrt{1 - \gamma h} < 1$;
 - radici reali in $[0, 1]$ quindi il punto è asintoticamente stabile ed è un pozzo nel SDC.

In pratica localmente il SD discretizzato ha le stesse proprietà qualitative del flusso integrale approssimato.

9 Altra roba (che serve?)

Teorema 9.1. *La serie esponenziale $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j t^j}{j!}$ converge uniformemente sui compatti di \mathbb{R} e il suo limite è una matrice funzione continua di $t \in \mathbb{R}$.*

Questo dimostra l'esistenza del flusso integrale di un SDCL $\dot{X} = AX$.

Teorema 9.2. *Se $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $AB = BA$ allora vale $\exp(At + Bt) = \exp(At) \exp(Bt)$.*

Teorema 9.3. *La funzione $\exp(At)$ è derivabile e vale $\frac{d}{dt} \exp(At) = A \exp(At) = \exp(At)A$.*

Osservazione 1. Notando che se A è antisimmetrica le potenze pari sono numeri reali e le dispari immaginari, riordinando la serie dell'esponenziale (che converge assolutamente) si ottiene la formula di Eulero:

$$\exp(Jbt) = \cos(bt)I + \sin(bt)J$$

9.1 Le coordinate polari

Ogni punto del piano \mathbb{R}^2 si può rappresentare come coppia di coordinate (ρ, θ) ponendo

$$x = \rho \cos \theta \quad y = \rho \sin \theta \quad (\rho, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$$

Osservazione 2. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ la restrizione del cambiamento di coordinate Ψ all'aperto $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \times (-\pi + \alpha, \pi + \alpha)$ è un diffeomorfismo su $\mathbb{R}^2 \setminus S_\alpha$, dove S_α è una semiretta dall'origine. (Infatti è banalmente iniettiva e surgettiva, ed è un diffeomorfismo locale poiché $\det(D(\Psi)) = \rho \neq 0$).

Osservazione 3. Nel semipiano $x > 0$ si ha

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \theta_1 = \arctan(y/x) \in (-\pi/2, \pi/2)$$

Altre inverse locali sono date da

$$\theta_2 = \pi/2 - \arctan(x/y) \in (0, \pi), \quad \theta_3 = -\pi/2 - \arctan(x/y) \in (-\pi, 0)$$

E inoltre

$$d\theta_1 = d\theta_2 = d\theta_3 = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$$

e l'espressione di questi differenziali ha senso in tutto $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, anche se θ_i non sono definite ovunque.

Può accadere che le coordinate polari semplifichino i conti nella risoluzione di un sistema dinamico: Nel caso generale di un sistema della forma

$$\begin{cases} \dot{x} &= ax + by \\ \dot{y} &= cx + dy \end{cases} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

passando a coordinate polari si ottiene

$$\begin{cases} \dot{\rho} &= \rho[a \cos^2 \theta + (b + c) \sin \theta \cos \theta + d \sin^2 \theta] \\ \dot{\theta} &= c \cos^2 \theta + (d - a) \sin \theta \cos \theta - b \sin^2 \theta \end{cases}$$

10 Fare gli esercizi

Gli esercizi standard nello studio dei sistemi dinamici richiedono una conoscenza di algebra lineare ed analisi.

Osservazione 1. Studiare le proprietà qualitative significa:

- trovare i punti di equilibrio;
- determinare le orbite periodiche;
- individuare le orbite aperte, definite per ogni $\in \mathbb{R}$;
- disegnare le separatrici;
- disegnare le curve eccezionali;
- descrivere gli insiemi limite.

Ecco le **domande** più frequenti:

1. Trovare la soluzione generale del sistema dinamico lineare.
 - *oppure* scrivere il flusso integrale;
 - *oppure* scrivere esplicitamente tutte le orbite in funzione delle condizioni iniziali.
2. trovare quali condizioni iniziali danno luogo ad orbite con l'origine come limite per $t \rightarrow +\infty$ e per $t \rightarrow -\infty$.
3. trovare gli esponenti di Lyapounov e discutere la stabilità del punto di equilibrio;
4. studiare la stabilità del punto di equilibrio;
5. studiare il sistema newtoniano $\ddot{x} = f(x) - \gamma\dot{x}$;
6. mostrare che un insieme è invariante;
7. dare un insieme contenuto nel bacino di attrazione di un pozzo per un SD gradiente;
8. dato $\ddot{x} = f(x) - \gamma\dot{x}$
 - trasformarlo in una equazione alle differenze finite;
 - scrivere il corrispondente SD discreto;
 - dare condizioni sufficienti su h perché i punti di equilibrio stabile siano punti fissi con moltiplicatore di Lyapounov 1;

- date condizioni su h determinare quali sono i punti fissi iperbolici, ellittici e di tipo pozzo;
 - fissato un valore di h discutere la stabilità dei punti di equilibrio.
9. dato un problema di moto vincolato ad un grado di libertà:
- scrivere la lagrangiana e le equazioni di Lagrange;
 - scrivere la corrispondente funzione Hamiltoniana, le equazioni di Hamilton;
 - trovare i punti di equilibrio del sistema dinamico associato in funzione dei parametri;
 - discutere la stabilità dei punti di equilibrio;
 - disegnare il diagramma di biforcazione nel piano (K, q) ;
 - fare un disegno qualitativo delle orbite.

E la relativa **soluzione**:

1. $\dot{X} = AX$
 - Autovalori;
 - Autovettori;
 - B^{-1} è la matrice che contiene gli autovettori
 - $A = B^{-1}CB$ dove C è la forma canonica di Jordan di A
 - la soluzione è $X(t) = \exp(At)X_0$
2. Se il sistema è lineare e la matrice A è invertibile, l'origine è l'unico punto di equilibrio.
 - $Y(t) = BX(t)$
 - Si deduce il comportamento dei vettori negli autospazi (generalizzati) usando la forma di Jordan.
 - Si ritorna in base canonica con la trasformazione inversa.
3. Gli esponenti di Lyapounov sono la parte reale degli autovalori; basta un esponente positivo per avere instabilità.
4. Se si vuol applicare il teorema della funzione di Lyapounov decrescente, lo standard guess è $V(x, y) = \frac{1}{2}(x - x_0)^2 + \frac{1}{2}(y - y_0)^2$. Se questo non funziona si può provare a usare dei coefficienti per i due addendi. Un'alternativa è scrivere una funzione suggerita dalla forma del campo vettoriale.

5. La matrice jacobiana è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f'(x) & -\gamma \end{pmatrix}$$

e l'equazione caratteristica del sistema è perciò $t^2 + \gamma t - f'(x) = 0$ con discriminante $\Delta = \gamma^2 + 4f'(x)$.

- Nel caso $\gamma = 0$ decide il segno di $f'(x)$ nel punto di equilibrio.
 - Se $f'(x) > 0$ ci sono 2 autovalori discordi e il punto è una sella;
 - Se $f'(x) \leq 0$ non possiamo concludere con gli esponenti di Lyapounov in quanto questi sono nulli.
 - Nel caso $\gamma > 0$ dipende dal discriminante oltre che dal segno di $f'(x)$:
 - se $f'(x) > 0$ si ha una sella;
 - se $f'(x) = 0$ non si può concludere (un esponente di Lyapounov nullo);
 - se $f'(x) < 0$ il punto è un pozzo ma il comportamento non è sempre lo stesso:
 - * $\Delta > 0$ dissipazione debole, fuoco attrattivo;
 - * $\Delta \leq 0$ dissipazione forte, nodo attrattivo;
 - * inoltre se $\Delta = 0$ poiché la matrice non è diagonalizzabile, il punto è un nodo improprio;
6. Si guarda il campo vettoriale sul bordo dell'insieme: si spera che sia entrante. Per esempio se coincide con un livello del potenziale in un sistema gradiente basta che il verso sia quello giusto.
7. Se il punto S è di minimo non degenero per $U(X)$, allora:
- S è isolato;
 - $U(S) = c$;
 - per ogni $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo si considera $U^{-1}[c, c + \varepsilon]$;
 - la componente connessa di S è un intorno di S che non contiene altri punti stazionari di U ;
 - allora è un compatto positivamente invariante in cui c'è una funzione di Lyapounov decrescente, dunque è contenuto nel bacino di S .

In dimensione 2 se i punti stazionari sono non degeneri, per trovare i bacini di attrazione basta tracciare le curve di livello di U corrispondenti ai punti di sella. Gli aperti connessi delimitati che contengono i minimi sono contenuti nei bacini di attrazione.

8. • Usando gli operatori discreti Δ_0 e Δ_- si riscrive l'equazione;
- posto $y_k = x_k - x_{k-1}$ come nella teoria si ricava

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + h^2 f(x_k) + (1 - \gamma h)y_k \\ y_{k+1} = h^2 f(x_k) + (1 - \gamma h)y_k \end{cases}$$

- si scrive il SD continuo associato e trovati i punti di equilibrio si fa il linearizzato per il SDD:

$$A = \begin{bmatrix} 1 + h^2 f'(x_k) & 1 - \gamma h \\ h^2 f'(x_k) & 1 - \gamma h \end{bmatrix}$$

valutando nei punti stabili. Le condizioni su $h > 0$ si trovano usando il discriminante Δ del polinomio caratteristico e le espressioni degli autovalori. I moltiplicatori sono i moduli degli autovalori: $|\lambda| = 1$.

- Valutando il polinomio caratteristico $p(\lambda)$ in 0 e 1 si studia la localizzazione delle radici. Se non basta si vede anche $p(-1)$ ed eventualmente il segno di $p'(\lambda)$ nei punti. Usando la definizione di punti iperbolici, ellittici, pozzo si risponde.
- Sapendo la natura dei punti fissi è facile dedurre la stabilità dal linearizzato.
9. • Una volta scelto il parametro per la coordinata lagrangiana (e quindi un sistema di riferimento) basta scrivere l'energia cinetica T e l'energia potenziale V (che sarà somma dei vari contributi dovuti alle forze in gioco). A questo punto la lagrangiana è semplicemente per definizione $L(q, \dot{q}) = T - V$ e le equazioni di Lagrange (una per ogni grado di libertà e quindi una sola) è data da $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$.
- Usando la trasformazione di Legendre inversa ricaviamo $\dot{q} = \dot{q}(p, q)$ e con la trasformata di Legendre inversa $H(p, q) = p\dot{q} - L(q, \dot{q})|_{\dot{q}=\dot{q}(p,q)}$. Le equazioni di Hamilton si ottengono facendo due derivate (e cambiando il segno ad una).
- imponendo $\dot{p} = 0$ e $\dot{q} = 0$ si ottengono i punti di equilibrio ($p = 0$ è praticamente obbligato per l'equilibrio) che saranno in generale in funzione dei parametri in gioco (m, k, l, g, \dots).
- per la stabilità basta studiare il linearizzato $\frac{\partial(\dot{p}, \dot{q})}{\partial(p, q)}$ che coincide con la matrice JH_H (ovvero l'hessiana di H ruotata).
- disegnare le curve $q = q(K)$ indicando la stabilità dei punti con un tratto continuo e l'instabilità con un tratteggio.

- fissato un valore del parametro K , possiamo disegnare la curva del potenziale $V(q)$ e di conseguenza gli insiemi di livello. Le frecce si mettono *comme d'habitude*.

Altre osservazioni che possono servire:

Osservazione 2. Nel caso di sistemi newtoniani con dissipazione, l'energia **non** è una funzione di Lyapounov stretta. Però se l'insieme dei punti stazionari del potenziale è discreto, le soluzioni attraversano la retta $y = 0$ (dove si annulla E) con derivata prima diversa da 0. Quindi E resta decrescente (annullamento sporadico della derivata). Questo dice che anche i punti di minimo degeneri di $V(x)$ sono asintoticamente stabili.

Osservazione 3. I punti di minimo dell'hamiltoniana sono circondati da curve di livello chiuse sulle quali le orbite periodiche ruotano in senso antiorario. Per i massimi analogo in senso orario. Questo si spiega perché il gradiente è la direzione di massima salita e il campo vettoriale è ruotato di $+\frac{\pi}{2}$ a causa della moltiplicazione per J .

11 Caos

Definizione 11.1. Un punto Q che appartiene all'intersezione delle due separatrici di un punto fisso iperbolico P si dice omoclinico.

Se le velocità delle due separatrici nel punto sono linearmente indipendenti, il punto omoclinico si dice *trasversale*.

Osservazione 1. In base al segno del seno dell'angolo tra i vettori velocità si stabilisce se la separatrice stabile viene da destra o da sinistra di quella instabile.

Definizione 11.2. Un punto si dice doppiamente asintotico se la sua orbita ha un unico limite per $t \rightarrow \pm\infty$.

Oss. 2: Oss. Omoclinico \Rightarrow doppiamente asintotico; inoltre $\lim_{k \rightarrow \pm\infty} S^k(Q) = P$.

Oss. 3: Proprietà.

- Se Q è un punto omoclinico (trasversale) tutti i punti della sua orbita $S^k(Q)$ lo sono. L'orbita si dice omoclinica.
- Se $\det DS = 1$ e Q è un punto omoclinico trasversale e la separatrice stabile viene da destra, allora lo stesso vale per i punti della sua orbita.

Metodo di Newton Per trovare un'orbita periodica (di periodo 2), si cerca un punto x^* tale che $S^2(x^*) = x^*$.

- Si sceglie una prima approssimazione del punto x_0 ;
- sviluppiamo $S^2(x^*) = S^2(x_0) + A^{(2)}(x_0)(x^* - x_0) + O(|x^* - x_0|^2)$;
- troviamo il punto x_1 che soddisfa l'equazione a meno di termini infinitesimi;
- $x_1 - x_0 = S^2(x_0) - x_0 + A^{(2)}(x_0)(x_1 - x_0)$ da cui se $A^{(2)}$ non ha 1 come autovalore: $x_1 = x_0 + (I - A^{(2)}(x_0))^{-1}(S^2(x_0) - x_0)$;
- in generale

$$x_{k+1} = x_k + (I - A^{(2)}(x_k))^{-1}(S^2(x_k) - x_k)$$

Tracciare le separatrici Dato un punto iperbolico x_0 e preso v_2 l'autovettore relativo all'autovalore $|\lambda_2| > 1$, si considera il punto $x_1 = x_0 + \varepsilon v_2$ e la sua immagine $S(x_1) = x_0 + \lambda_2 \varepsilon v_2 + o(\varepsilon)$. Sia C il segmento che congiunge x_1 e $S(x_1)$: questo approssima la separatrice instabile. Essendo S una contrazione

nella direzione dell'altro autovalore, la distanza tra $S^k(C)$ e la separatrice diventa trascurabile per k abbastanza grande. Allora i punti $\cup_{k=0}^N S^k(C)$ rappresentano una buona approssimazione della separatrice instabile. Analogamente, considerando l'autovettore v_1 relativo a $|\lambda_1| < 1$ e le iterate S^{-k} si approssima un segmento della separatrice stabile.

Definizione 11.3. Dati due punti P, Q periodici iperbolicici di periodo r per un SDD S , se un punto appartiene all'intersezione della separatrice stabile di P con quella instabile di Q , si dice:

- *omoclinico* se P e Q sono sulla stessa orbita periodica;
- *eteroclinico* altrimenti;

Oss. 4: Osservazioni random.

1. L'insieme dei punti omoclinici (eteroclinici) è dato da:

$$(W_s(P) \cap W_i(Q)) \cup (W_i(P) \cap W_s(Q))$$

2. Punti omoclinici ed eteroclinici sono doppiamente asintotici.
3. L'orbita di P e di Q è α ed ω -limite per i punti omoclinici.
4. L'orbita di P è α -limite mentre quella di Q ω -limite per i punti eteroclinici.
5. Tutti punti dell'orbita di un punto omoclinico (eteroclinico) sono omoclinici (eteroclinici).

11.1 Horseshoe

Diamo i nomi alle cose:

- P punto fisso iperbolico
- Q punto omoclinico trasversale
- C intorno del segmento PQ sulla separatrice stabile $W_s(P)$;
- $w\log C = [0, 1]^2$;
- $G = S_C^n$

L'immagine $S(C)$ si accorcia lungo $W_s(P)$ e si allunga su $W_i(P)$ e le deformazioni si accentuano iterando la mappa. Possiamo scomporre la mappa in tre trasformazioni:

1. compressione del quadrato lungo l'asse W_s ;
2. dilatazione del rettangolo lungo l'asse W_i ;
3. ripiegamento a ferro di cavallo.

L'intersezione $G(C) \cap C$ ha due componenti connesse rettangolari C_0 e C_2 . Possiamo supporre che lo jacobiano di S^n su $G^{-1}(C_0)$ e $G^{-1}(C_2)$ sia rispettivamente

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Iterando la mappa e considerando le intersezioni successive, si arriva ad ottenere

$$\bigcap_{k=0}^{+\infty} G^k(C) = K \times [0, 1]$$

essendo K un insieme di Cantor. Lo stesso ragionamento vale per la mappa inversa, dunque

$$\bigcap_{k=-\infty}^{+\infty} G^k(C) = K \times K = \Lambda$$

e l'insieme, detto *insieme di Smale*, è invariante.

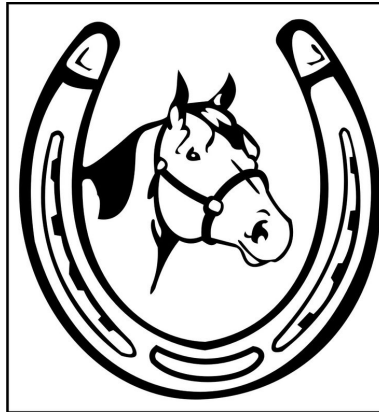


Figura 12: Ferro di cavallo col suo proprietario

Oss. 5: Storia. Esiste un omeomorfismo

$$\begin{aligned} \Phi: \Lambda &\rightarrow \{0, 2\}^{\mathbb{Z}} \\ X &\mapsto \{a_k\} \end{aligned}$$

che ad ogni punto fa corrispondere la sua **storia**.

Definizione 11.4. Scorrimento di Bernoulli

$$\begin{aligned} \sigma: \{0, 2\}^{\mathbb{Z}} &\rightarrow \{0, 2\}^{\mathbb{Z}} \\ \{a_k\} &\mapsto \{a_{k+1}\} \end{aligned}$$

Teorema 11.1. *Le orbite periodiche sono dense nell'insieme di Smale.*

Oss. 6: Oss..I punti periodici nell'insieme di Smale sono tutti periodici.

Definizione 11.5. Un insieme H ches sia G -invariante si dice iperbolico se

$$\begin{aligned} \exists c > 0 \exists \lambda > 1 \forall x \in H \exists v_1 \exists v_2 \forall m \in \mathbb{N} \\ |DG^m(x)v_1| \leq c\lambda^{-m}|v_1| \quad |DG^m(x)v_2| \geq c^{-1}\lambda^m|v_2| \end{aligned}$$

Teorema 11.2 (Punto omoclinico trasversale). $S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ diffeomorfismo con P punto fisso iperbolico, Q omoclinico trasversale. Esiste $n \in \mathbb{N}$ ed esiste $\Lambda \ni P, Q$ compatto, $G = S^n$ -invariante tale che

$$G|_{\Lambda} = \Phi^{-1} \circ \sigma \circ \Phi$$

Teorema 11.3 (Forma normale di Birkhoff). *Per ogni punto fisso ellittico di un sistema dinamico discreto conservativo, esiste un cambiamento di coordinate differenziabile che porta la mappa nella forma canonica:*

$$\begin{cases} r' &= r + O(r^2) \\ \theta' &= \theta + \beta + \alpha r + O(r^2) \end{cases}$$

e α si dice torsione del punto fisso ellittico.

Definizione 11.6. Una curva invariante di Moser è una curva chiusa, iniettiva tale che per ogni ϕ vale $S(\gamma(\phi)) = \gamma(\phi + \mu)$.

Teorema 11.4 (di Moser). *Sia x^* un punto fisso ellittico per un SDD conservativo. Se gli autovalori del linearizzato non sono radici dell'unità di ordine minore di 5 e la torsione $\alpha \neq 0$ allora in ogni intorno si trova una curva invariante di Moser.*

Definizione 11.7. L'insieme delle immagini delle curve invarianti di Moser forma una regione ordinata.

Definizione 11.8. Se esiste

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \log(|A^{(k)}(x)v|) = \chi(x, v)$$

si chiama esponente di Lyapounov per la mappa S in x .

Oss. 7: Oss...Un esponente di Lyapy misura il carattere esponenziale della divergenza di orbite con condizioni iniziali vicine. Il vettore variazione v cresce in lunghezza come $e^{\chi k}$; il tempo di Lyapounov è $1/\chi$.

Definizione 11.9. Come si definisce il $\chi\alpha\sigma\varsigma$:

1. L'orbita $S^k(x)$ si dice caotica se ha un esponente di Lyapy positivo e uno negativo.
2. L'orbita del SDD S presenta il fenomeno del caos se appartiene ad un insieme compatto Λ iperbolico per una iterata tale che l'iterata ristretta a Λ è coniugata per omeomorfismo ad uno scorrimento di Bernoulli.
3. Un'orbita presenta il fenomeno del caos se non è un punto fisso ellittico, un punto periodico ellittico o una curva invariante di Moser.

Oss. 8: Implicazioni.(definizioni da più a meno restrittive) $(2) \Rightarrow (1) \Rightarrow (3)$

12 Controllo

12.1 Feedback

Open-loop and closed-loop (feedback) control Fundamentally, there are two types of control loop; open loop control, and closed loop feedback control.

In open loop control, the control action from the controller is independent of the "process output" (or "controlled process variable"). A good example of this is a central heating boiler controlled only by a timer, so that heat is applied for a constant time, regardless of the temperature of the building. (The control action is the switching on/off of the boiler. The process output is the building temperature).

In closed loop control, the control action from the controller is dependent on the process output. In the case of the boiler analogy this would include a thermostat to monitor the building temperature, and thereby feed back a signal to ensure the controller maintains the building at the temperature set on the thermostat. A closed loop controller therefore has a feedback loop which ensures the controller exerts a control action to give a process output the same as the "Reference input" or "set point". For this reason, closed loop controllers are also called feedback controllers.

The definition of a closed loop control system according to the British Standard Institution is 'a control system possessing monitoring feedback, the deviation signal formed as a result of this feedback being used to control the action of a final control element in such a way as to tend to reduce the deviation to zero.'

Likewise, a Feedback Control System is a system which tends to maintain a prescribed relationship of one system variable to another by comparing functions of these variables and using the difference as a means of control.[6] The advanced type of automation that revolutionized manufacturing, aircraft, communications and other industries, is feedback control, which is usually continuous and involves taking measurements using a sensor and making calculated adjustments to keep the measured variable within a set range. The theoretical basis of closed loop automation is control theory. Command *in open loop*:

- at time $t = 0$, we are supposed to calculate entirely the control law $u: t \in [0, T]$ then, to implement it into the physical system, practically at $t = 0$. It supposes that the calculation time of the control u is negligible compared with that of the system. For certain applications, it is unrealistic ;
- if an incident occurs which is not taken into account by the dynamics of the system, the system cannot react to the unforeseen incident.

It is often advisable to calculate u in a simpler way and to adjust it in real time in such a way it compensates the instantaneous errors with the reference trajectory which can appear.

***** Un sistema di controllo è un meccanismo che permette di modificare lo stato futuro di un sistema. La teoria cerca di fornire una strategia per selezionare gli input appropriati, cioè il modo di cambiare l'input per ottenere l'output desiderato.

Open loop: esempio della lavastoviglie. Una volta dato in input il tempo di lavaggio, la macchina non si fermerà se non dopo che il tempo è trascorso. Se anche inseriamo piatti già puliti, il ciclo di lavaggio sarà effettuato lo stesso. Se i piatti sono molto sporchi ed incrostati, un tempo troppo corto non basterà a ottenere in output piatti puliti.

Closed loop: in aggiunta abbiamo un sensore che confronta l'output con dei dati di riferimento; la discrepanza attiva un controller dell'input. Nel caso della lavastoviglie, il sensore dovrebbe misurare il livello di pulizia dei piatti, confrontarlo con la soglia desiderata e quindi cambiare il tempo di esecuzione in base al risultato.

interpréter une condition du type $[f, g] \notin \text{Span}(f(x), g(x))$, dans le sens suivant : la liberté de choisir à chaque instant une dynamique entre celle de f et celle de g nous permet d'atteindre, en démarrant de x , des points qui ne sont pas directement atteignables par une combinaison linéaire de $f(x)$ et $g(x)$.

Le théorème de Krener peut être interprété comme suit : sous la condition de génération par crochets de Lie, les trajectoires admissibles démarrant en un point x_0 peuvent accéder à un ensemble d'intérieur non vide en temps arbitrairement petit (on parle aussi, dans la littérature, d'accessibilité locale).

Elenco dei Teoremi

3.1	Teorema (Cambio di coordinate)	15
3.2	Teorema	18
5.1	Teorema	23
5.2	Teorema	23
5.3	Teorema	23
5.4	Teorema	23
5.5	Teorema	23
5.6	Teorema (Pozzo lineare)	23
5.7	Teorema (Norma adattata)	24
5.8	Teorema (Pozzo non lineare)	24
5.9	Teorema	24
5.10	Teorema (Funzione di Lyapounov decrescente)	24
5.11	Teorema	24
5.12	Teorema (Punti limite di un SD gradiente)	24
5.13	Teorema	25
5.14	Teorema	25
5.15	Teorema	25
5.16	Teorema	25
5.17	Teorema (Poincaré-Bendixon)	25
5.18	Teorema (Punto fisso)	25
5.19	Teorema (Liouville)	25
5.20	Teorema (Curve di livello dell'Hamiltoniana)	25
9.1	Teorema	39
9.2	Teorema	39
9.3	Teorema	39
11.1	Teorema	49
11.2	Teorema (Punto omoclinico trasversale)	49
11.3	Teorema (Forma normale di Birkhoff)	49
11.4	Teorema (di Moser)	49

Elenco delle Proposizioni**Elenco dei Corollari****Elenco dei Lemmi**

Elenco delle Definizioni

2.1	Definizione	3
2.2	Definizione	3
2.3	Definizione	3
2.4	Definizione	3
2.5	Definizione	3
2.6	Definizione	3
2.7	Definizione	4
2.8	Definizione	4
2.9	Definizione	4
2.10	Definizione	5
2.11	Definizione	5
2.12	Definizione	5
2.13	Definizione	5
2.14	Definizione	7
2.15	Definizione	7
2.16	Definizione	7
2.17	Definizione	7
2.18	Definizione	7
2.19	Definizione	7
2.20	Definizione	7
2.21	Definizione	8
2.22	Definizione	8
2.23	Definizione	8
2.24	Definizione	8
2.25	Definizione	8
2.26	Definizione	8
2.27	Definizione	8
3.1	Definizione	12
3.2	Definizione	15
3.3	Definizione (Lagrangiana)	15
3.4	Definizione (Equazione di Lagrange)	15
3.5	Definizione	16
3.6	Definizione	18
3.7	Definizione (Librazione)	18
3.8	Definizione (Circolazione)	19
3.9	Definizione	19
5.1	Definizione	23
5.2	Definizione	26
11.1	Definizione	46
11.2	Definizione	46
11.3	Definizione	47
11.4	Definizione	48

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

55

11.5 Definizione	49
11.6 Definizione	49
11.7 Definizione	49
11.8 Definizione	49
11.9 Definizione	50

Riferimenti bibliografici