SEMISMOOTH NEWTON-TYPE METHOD FOR BILEVEL OPTIMIZATION

TEORIA E METODI DELL'OTTIMIZZAZIONE
UNIVERSITÀ DI PISA
MARIO CORREDDU

Contents

1. Introduzione

In questo documento ci occupiamo di analizzare l'algoritmo proposto da Andreas Fischer, Alain B. Zemkoho e Shenglong Zhou in [1] per la risoluzione di problemi di ottimizzazione bilivello.

Consideriamo il problema dell'ottimizzazione bilivello definito come:

$$\min_{x,y} F(x,y) \quad t.c. \quad G(x,y) \leq 0 \quad y \in S(x), \tag{1.1}$$

detto anche problema *upper-level*, mentre $S(x)$ è definito a partire da quello che chiamiamo un problema *lower-level*:

$$\min_{z} f(x,z) \quad t.c. \;\; g(x,z) \leq 0$$

in cui quindi si ha:

$$S(x) = \underset{z}{\operatorname{argmin}} \{f(x,z) | g(x,z) \leq 0\}$$

Considereremo esclusivamente il caso in cui sia $F, f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ che $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^q$ e $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ sono di classe C^2. Per comodità ci riferiremo a x come la variabile upper-level, mentre y sarà la variabile lower-level.

E' possibile riformulare il problema seguendo principalmente due approcci.

Il primo consiste nel rimpiazzare il problema lower level con le proprie condizioni KKT e risolvere il sistema che ne consegue. Per questa formulazione sono tuttavia necessarie ipotesi molto forti per poter concludere che il punto di minimo del nuovo problema è anche punto di minimo del problema originale, per cui seguiremo il secondo approccio.

Date: August 11, 2023.

Quest'ultimo consiste nel trasformare il problema bilivello in un classico problema di ottimizzazione usando quella che viene chiamata riformulazione LLVF (lower-level value function). Definiamo la LLVF come:

$$\varphi(x) := \min_{z} \{f(x,z)|g(x,z) \leq 0\} \tag{1.2}$$

dove, per semplicità, supporremo da qui in avanti che $S(x) \neq \emptyset$. Il nuovo problema definito usando $\varphi(x)$ diventa:

$$\min_{x,y} F(x,y) \quad t.c. \quad G(x,y) \leq 0 \quad g(x,y) \leq 0 \quad f(x,y) \leq \varphi(x)$$

La peculiarità del problema è quindi tutta concentrata nel nuovo vincolo $f(x,y) \leq \varphi(x)$. Difatto $\varphi(x)$ è spesso non differenziabile, inoltre il problema può essere non convesso anche se tutte le funzioni del problema orginale lo erano.

Vari metodi sono stati proposti per la risoluzione del problema in casi più o meno specifici.

In questo caso il l'algoritmo descritto nel capitolo 4 avrà la caratteristica di non necessitare del calcolo diretto di $\varphi(x)$ o delle sue derivate, adattando quello che è noto come il metodo di Newton semismooth [2] al nostro problema.

Dopo aver definito le notazioni nel capitolo 2, nel capitolo 3 verranno ricavate delle equazioni che forniranno le condizioni necessarie di ottimalità utilizzando strumenti già noti in letteratura, nello specifico, la partial calmness insieme alla penalizzazione esatta parziale, quali daranno vita a delle condizioni KKT riscritte poi come sistema quadrato nel capitolo 4.

Nel capitolo 5 verranno elencate delle condizioni sufficienti per ottenere la CD-regularity del punto di ottimo, una condizione sufficiente per la convergenza del metodo.

Infine, nel capitolo 6, verranno dimostrate a partire da ipotesi di sufficiente regolarità le condizioni di convergenza globale dell'algoritmo. La sola convergenza sarà garantita da proprietà di non singolarità dello Jacobiano del sistema di equazioni, mentre, individuando un parallelo con le condizioni di Robinson per l'ottimizzazione non lineare standard, si cercheranno condizioni che rendono il minimo un minimo stretto.

Nel capitolo 7 verranno enunciati risultati analoghi ai precedenti, nel caso speciale in cui le funzioni g non dipendano dalla variabile lower level.

Nel capitolo 8 riportiamo gli esperimenti svolti nell'articolo orginale che sono stati svolti utilizzando la libreria BOLIB, liberamente accessibile al seguente link. Dei problemi presenti nella libreria, i veri valori ottimi sono noti per il 70% di essi. Per ognuno dei valori del parametro di penalizzazione osserviamo che il metodo converge sempre almeno il 87% delle volte. Inoltre l'ordine di convergenza sperimentale è stato osservato essere oltre 1.5 per oltre il 70% dei problemi.

2. Notazioni, definizioni e risultati preliminari

2.1. **Insiemi di indici e altre notazioni.** Forniamo ora un po' di notazione che verrà usata in tutto il documento fissiamo i punti $(\bar{x}, \bar{y})$ e $(\bar{x}, \bar{z}) \in \mathbb{R}^{n+m}$:

Chiameremo:

$$I^1 := I^G(\bar{x}, \bar{y}) := \{i|G_i(\bar{x}, \bar{y}) = 0\}$$

ovvero l'insieme dei vincoli upper-level che sono attivi nel punto $(\bar{x}, \bar{y})$.

Allo stesso modo definiamo

$$I^2 := I^g(\bar{x}, \bar{y}) := \{i|g_i(\bar{x}, \bar{y}) = 0\}$$

e

$$I^3 := I^g(\bar{x}, \bar{z}) := \{i|g_i(\bar{x}, \bar{z}) = 0\}$$

ovvero l'insieme dei vincoli lower-level che sono attivi nei punti $(\bar{x}, \bar{y})$ e $(\bar{x}, \bar{z})$ rispettivamente.

Ora consideriamo un moltiplicatore $\bar{u}$ per il punto $(\bar{x}, \bar{y})$ rispetto ai vincoli upper-level. Allora definiamo:

$$\eta^1 := \eta^G(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}) := \{i|\bar{u}_i = 0, G_i(\bar{x}, \bar{y}) < 0\},$$

ovvero gli indici dei vincoli non attivi e con moltiplicatore nullo,

$$\theta^1 := \theta^G(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}) := \{i|\bar{u}_i = 0, G_i(\bar{x}, \bar{y}) = 0\},$$

ovvero gli indici dei vincoli attivi e con moltiplicatore nullo.

$$\nu^1 := \nu^G(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}) := \{i|\bar{u}_i > 0, G_i(\bar{x}, \bar{y}) = 0\},$$

ovvero gli indici dei vincoli attivi e con moltiplicatore non nullo.

Definiamo similarmente anche gli insiemi di indici per i vincoli lower level, con moltiplicatori $\bar{v}$ e $\bar{w}$ nei punti $(\bar{x}, \bar{y})$ e $(\bar{x}, \bar{z})$ rispettivamente:

$$\eta^2 := \eta^g(\bar{x}, \bar{y}, \bar{v}), \qquad \theta^2 := \theta^g(\bar{x}, \bar{y}, \bar{v}), \qquad \nu^2 := \nu^g(\bar{x}, \bar{y}, \bar{v})$$

e

$$\eta^3 := \eta^g(\bar{x}, \bar{z}, \bar{w}), \qquad \theta^3 := \theta^g(\bar{x}, \bar{z}, \bar{w}), \qquad \nu^3 := \nu^g(\bar{x}, \bar{z}, \bar{w})$$

.

Osserviamo come $I^i = \theta^i \cup \nu^i$ per $i = 1, 2, 3$.

Ora sarà comodo per noi avere un nome per la lagrangiana lower-level che chiamiamo, $\ell; \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$:

$$\ell(x, z, w) := f(x, z) + w^T g(x, z)$$

Fissiamo ora, data una funzione dipendente sia da variabili upper-level che lower-level, la notazione ∇_1 e ∇_2 che saranno rispettivamente il gradiente rispetto alle variabili upper-level e il gradiente rispetto alle variabili lower-level. Analogamente ∇^2_{11}, ∇^2_{22} e ∇^2_{12} si riferiranno alle corrispettive derivate del secondo ordine.

2.2. Derivate direzionali di φ.

Ricordiamo ora la definizione di derivata direzionale:

Definition 2.1. Data una funzine $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, la sua derivata direzionale in $\bar{x}$ nella direzione d è definita come:

$$\psi'(\bar{x}; d) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \left(\psi(\bar{x} + td) - \psi(x)\right)$$

A questo punto cerchiamo delle condizioni per cui $\varphi(x)$ 1.2 ammetta derivate direzionali ben definite.

Definition 2.2. Ricordiamo che la qualificazione dei vincoli lower-level data da indipendenza lineare (LLICQ) al punto $(\bar{x}, \bar{z})$ è data dal fatto che la famiglia dei seguenti vettori

$$\{\nabla_2 g_i(\bar{x}, \bar{z}) | g_i(\bar{x}, \bar{z}) = 0\},$$

è linearmente indipendente.

Chiamiamo l'insieme dei moltiplicatori di Lagrange lower-level:

$$\Lambda(x, z) := \left\{w \in \mathbb{R}^q | \nabla_2 \ell(x, z, w) = 0, \;\; w \geq 0, \;\; g(x, z) \leq 0, \;\; w^T g(x, z) = 0\right\}$$

Definiamo quindi l'insieme, dipendente dal punto x:

$$K(x) := \{z \in \mathbb{R}^m | g(x, z) \leq 0\}$$

ovvero l'insieme delle variabili lower-level z tali che (x, z) sia ammissibile per il problema lower-level.

Siamo pronti per enunciare il teorema che garantisce l'esistenza di derivate direzionali per φ, la cui dimostrazione è contenuta in [3] corollario 4.4 :

Theorem 2.3. *Sia $\bar{x}$ tale per cui esista un intorno U di $\bar{x}$ tale che la chiusura dell insieme $\bigcup_{x\in U} K(x)$ è compatta (ovvero K è uniformemente compatta in $\bar{x}$) e sia $K(\bar{x}) \neq \emptyset$. Se vale la qualificazione dei vincoli lower-level data da indipendenza lineare (LLICQ 2.2) in $(\bar{x}, z)$ per ogni $z \in S(\bar{x})$ allora φ ammette derivata direzionale in $\bar{x}$ per ogni direzione $d \in \mathbb{R}^n$ con:*

$$\varphi'(\bar{x}, d) = \min_{z\in S(\bar{x})} \nabla_1 \ell(\bar{x}, z, w_z)^T d$$

dove w_z è l'unico elemento dell'insieme dei moltiplicatori di Lagrange (lower-level) per il punto $(\bar{x}, z)$:

$$\Lambda(x, z) = \{w_z\}$$

come conseguenza della qualificazione dei vincoli.

Definiamo ora quella che sarà la derivata seconda direzionale:

Definition 2.4. data una funzione $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, la sua derivata direzionale seconda in $\bar{x}$ nella direzione d ed e è definita come:

$$\psi''_\lambda(\bar{x}, \bar{y}; d; e) = \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t^2} \left[\psi\left((\bar{x} + td + \frac{1}{2}t^2 e\right) - \psi(\bar{x}) - t\psi'(\bar{x}; d)\right] \tag{2.1}$$

Per dare una formula chiusa per la derivata direzionale seconda di φ avremo bisogno di altre ipotesi:

Definition 2.5. Un punto $(\bar{x}, \bar{z}, \bar{w})$ soddisfa le condizioni di complementarità lower level (LSCC) se

$$\theta^3 = \{i | \bar{w}_i = 0, g_i(\bar{x}, \bar{z}) = 0\} = \emptyset$$

Definition 2.6. Diremo invece che vale la proprietà di sottovarietà (LSMP) nel punto $(\bar{x}, d)$ se per ogni $\bar{z}$ tale che

$$\bar{z} \in S_1(\bar{x}; d) := \operatorname*{argmin}_{z\in S(\bar{x})} \nabla_1 \ell(\bar{x}, z, w_z)^T d$$

si ha che la restrizione di $S(\bar{x})$ su un intorno di $\bar{z}$ è una sottovarietà liscia di $\{z | g_j(\bar{x}, z) = 0 \text{ } \textit{per ogni } j \in I^3\}$.

Infine

Definition 2.7. Diciamo che le condzioni sufficienti del secondo ordine lower-level (LSOSC) sono verificate nel punto $(\bar{x}, d)$ se

$$e^{\nabla} \ell(\bar{x}, z, w_z) e > 0$$

per tutti gli $z \in S_1(\bar{x}; d)$ e tutti gli $e \in [T_o(z)]^\perp \setminus \{0\}$ tali che $\nabla_2^2 g_j(\bar{x}, z)^T e = 0$ per tutti gli $j \in I^3$, dove abbiamo indicato con $T_o(z)$ lo spazio tangente di $S(\bar{x})$ nel punto z.

Siamo pronti a enunciare il teorema, la cui dimostrazione è contenuta in [4], Teorema 4.1:

Theorem 2.8. *Supponiamo siano soddisfatte le ipotesi del teorema 2.3, e supponiamo valgano $\theta^3 = \emptyset$ (LSCC, 2.5), in (x, z, w_z) per ogni $z \in S_1(\bar{x}; d)$. Supponiamo inoltre che valgano la proprietà di sottovarietà (LSMP, 2.6), e le condizioni sufficienti lower level (LSOSC, 2.7). Allora φ ammette derivata direzionale seconda in $\bar{x}$ in direzione d ed e, con:*

$$\varphi''(\bar{x}; d, e) = \min_{z\in S_1(\bar{x};d)} \left\{\nabla^2 \ell(\bar{x}, z, w_z) e + \xi_d(\bar{x}, z)\right\}$$

dove $S_1(\bar{x}; d) = \operatorname{argmin}_{z\in S(\bar{x})} \nabla_1 \ell(\bar{x}, z, w_z)^T d$, mentre $\xi_d(\bar{x}, z)$ è defnito da

$$\begin{cases} \xi_d(\bar{x}, z) = \min_{e \in \mathcal{Z}_d(\bar{x},z)} (d, e)^T \nabla^2 \ell(\bar{x}, z, w_z)(d, e) \\ \mathcal{Z}_d(\bar{x}, z) = \left\{ e \in \mathbb{R}^m | \nabla_1 g_i(\bar{x}, z)^T d + \nabla_2 g_i(\bar{x}, z)^T e, \quad i \in I^3 \right\} \end{cases}$$

Con ∇^2 indendiamo l'Hessiano rispetto al vettore composto dalla prima e seconda variabile della funzione.

2.3. **Sottodifferenziale di Clarke e Semismoothness.** A questo punto consideriamo ancora una nozione di differenziabilità. Osserviamo dapprima che se una funzione $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è Lipshitz intorno a un punto, è anche differenziabile quasi ovunque nell'intorno. Chiamiamo quindi D_ψ, l'insieme dei punti in cui ψ è differenziabile. Ha senso quindi definire:

Definition 2.9. Data $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, Lipshitz intorno a un punto $\bar{x}$ lo Jacobiano generalizzato secondo Clarke è definito come :

$$\partial\psi(\bar{x}) := conv\, (\partial_B \psi(\bar{x}))$$

dove

$$\partial_B \psi(\bar{x}) := \left\{ \lim_{n \to \infty} \nabla\psi(x^n) | x^n \to \bar{x}, x^n \in D_\psi \right\}$$

Dove '*conv*' è l'inviluppo convesso dell'insieme, e $\partial_B \psi(\bar{x})$ è chiamato il B-sottodifferenziale di ψ in $\bar{x}$.

Per chiudere con le notazioni definiamo il concetto di semismoothness.

Definition 2.10. Data $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, Lipshitz intorno a un punto $\bar{x}$, ψ è detta semismooth in $\bar{x}$ se il limite:

$$\lim_{\substack{V \in \partial\psi(\bar{x}+td') \\ d' \to d, \quad t \to 0}} V d'$$

esiste per ogni $d \in \mathbb{R}^n$.

Osserviamo che le funzioni semismooth si trovano a metà fra le funzioni Lipschitz-continue e le funzioni C^1. Sottolineamo anche che questa classe di funzioni è strettamente contenuta nella classe delle funzioni B-differentiabili. Inoltre è noto che se G è semismooth in $\bar{x}$ allora vi ammette anche derivata direzionale,e i valori coincidono (come mostrato in [5], proposition 2.1).

Infine una nozione leggermente più forte della semismoothness è data dalla forte semismothness, che si ha se la seguente uguaglianza:

$$Vd - \psi'(\bar{x}; d) = O(||d||^2)$$

è verificata per ogni $V \in (\partial\psi(\bar{x} + td')$ con $d \to 0$.

3. Condizioni necessarie di ottimalità

Fatte queste premesse consideriamo il problema penalizzato da $\lambda \in (0, \infty)$ dato da:

$$\min_{x,y} F(x, y) + \lambda(f(x, y) - \varphi(x)) \quad t.c. \quad G(x, y) \leq 0 \;\; g(x, y) \leq 0 \tag{3.1}$$

Poichè non sono noti delle qualificazioni dei vincoli standard per il problema 1.1 è stato introdotto il concetto della partial calmness, che permette di ottnere delle condizioni KKT per 1.1 a partire da 3.1 .

Definition 3.1. Diciamo che il problema 1.1 è partially calm in uno dei suoi punti ammissibili $(\bar{x}, \bar{y})$ se esistono $\lambda \in (0, \infty)$ e un intorno U di$(\bar{x}, \bar{y}, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ tali che:

$$F(x, y) - F(\bar{x}, \bar{y}) + \lambda|\zeta| \geq 0$$

per ogni $(x, y, \zeta) \in U$ con $G(x, y) \leq 0$, $g(x, y) \leq 0$, $f(x, y) - \varphi(x) + \zeta = 0$.

In parole povere chiediamo che esista un intorno di $(\bar{x}, \bar{y})$, nel quale la funzione upper-level non possa essere troppo più piccola di $F(\bar{x}, \bar{y})$ nei punti che rispettano i vincoli upper level e lower level, ma non necessariamente soddisfano la condizione di ottimalità nel problema lower-level, ma per un margine comunque limitato.

Theorem 3.2. *Sia $(\bar{x}, \bar{y})$ un punto di minimo locale per il problema 1.1. Allora il problema è partially calm in $(\bar{x}, \bar{y})$ se e solo se esiste $\lambda \in (0, \infty)$ tale che $(\bar{x}, \bar{y})$ è un punto di ottimo per 3.1.*

Proof. Sia quindi $(\bar{x}, \bar{y})$ punto di minimo del problema 1.1. Sia anche il problema partially calm in questo punto. Allora sia il problema 3.1 con λ dato dalla partial calmness e sia $U_{(\bar{x},\bar{y})}$, la proiezione su $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ dell'intorno U dato dalla partial calmness. Mostriamo che il problema 3.1 assume in $(\bar{x}, \bar{y})$ valore minore che in tutti i punti ammissibili dell'intorno $U_{(\bar{x},\bar{y})}$. Sia quindi $(x, y) \in U_{(\bar{x},\bar{y})}$, che rispetta i vincoli di ammissibilità, abbiamo, per partial calmness:

$$F(x, y) + \lambda(f(x, y) - \varphi(x)) \geq F(\bar{x}, \bar{y}) + 2\lambda|\zeta| =$$
$$F(\bar{x}, \bar{y}) + 2\lambda|\zeta| + \lambda(f(\bar{x}, \bar{y}) - \varphi(\bar{x})) \geq F(\bar{x}, \bar{y}) + \lambda(f(\bar{x}, \bar{y}) - \varphi(\bar{x}))$$

dove ζ dipende da (x, y), e abbiamo usato che per i punti ammissibili per il problema lower level necessariamente soddisfano $f(x, y) \geq \varphi(x)$ per definizione. L'uguaglianza invece deriva dal fatto che $(\bar{x}, \bar{y})$ per essere ammissibile per 1.1 deve soddisfare in realtà $f(\bar{x}, \bar{y}) = \varphi(\bar{x})$.

Viceversa supponiamo che $(\bar{x}, \bar{y})$ punto di minimo del problema 1.1, e che esista λ tale che sia un punto di minimo anche per il problema 3.1. Vogliamo trovare un intorno U di $(\bar{x}, \bar{y}, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$. Considero V intorno per il quale 3.1 valutato in V sia sempre $\geq F(\bar{x}, \bar{y}) + \lambda(f(\bar{x}, \bar{y}) - \varphi(\bar{x}))$. Ora considero la chiusura di V che è compatta e guardo:

$$M = \max_{\substack{(x,y)\in U \\ G(x,y)\leq 0 \\ g(x,y)\leq 0}} f(x, y) - \varphi(x)$$

osserviamo che M è finito per continuità di f. Considero quindi $U = V \times (-M, M)$. Chiaramente osserviamo che la costruzione dell'intorno è in un certo senso fittizia: a noi interesseranno sempre e solo gli $\zeta = f(x, y) - \varphi(x)$. Non resta che trovare λ. Considero la funzione $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da:

$$s(\lambda) = \min_{\substack{(x,y)\in U \\ G(x,y)\leq 0 \\ g(x,y)\leq 0}} F(x, y) - F(\bar{x}, \bar{y}) + \lambda|\zeta|$$

ora s è limitata monotona e $lim_{\lambda \to \infty} s(\lambda) = \infty$, per cui è sempre possibile trovare λ_0 che garantisca la condizione di partial calmness. $\square$

Notiamo che il teorema permmette di avere che se $(\bar{x}, \bar{y})$ è un punto di ottimo locale per il problema 1.1, ed è partially calm per il problema 3.1 allora necessariamente è ottimo locale anche per 3.1 per ogni $\mu \geq \lambda$ dato dal teorema.

Possiamo quindi lavorare direttamente sul problema 3.1 a patto di utilizzare un λ sufficientemente grande.

Ora introduciamo le condizioni di Mangasarian-Fromovitz, facendo distinzione fra il caso in cui siamo nel caso upper o lower level. Osserviamo che non avendo vincoli di uguaglianza le definizioni si semplificano.

Definition 3.3. diremo che le le condizioni upper-level di Mangasarian Fromovitz (UMFCQ) valgono, per un punto $(\bar{x}, \bar{y})$, se esiste $d \in \mathbb{R}^{n+m}$, tale che:

$$\nabla G_i(\bar{x}, \bar{y})^T d < 0 \quad \textit{per ogni } i \in I^1 \qquad e \qquad \nabla g_j(\bar{x}, \bar{y})^T d < 0 \quad \textit{per ogni } j \in I^2$$

Tuttavia, come vedremo, per poter scrivere una Lagrangiana che sia effettivamente utilizzabile abbiamo bisogno di una seconda condizione, che chiamiamo, condizione lower-level di Mangasarian Fromovitz. Sottolineamo come la definizione non è altri chiedere che valgano le condizioni di Mangasarian Fromovitz per ogni $z \in S(x)$

Definition 3.4. Dato $\bar{x}$ diciamo che vale la condizione lower-level di Mangasarian Fromovitz (LMFCQ) se per ogni $z \in S(x)$, esiste $d \in \mathbb{R}^m$ tale che :

$$\nabla g_j(\bar{x}, z)^T d < 0 \quad \textit{per tutti i j vincoli attivi in } (\bar{x}, z)$$

Ora siamo pronti a derivare il sistema che fornirà le condizioni necessarie di ottimalità:

Theorem 3.5. *Sia $(\bar{x}, \bar{y})$ un punto di minimo locale per il problema 1.1, in cui supponiamo sia anche partially calm 3.1. Supponiamo inoltre che f e $g_1, \ldots, g_q$ siano convesse come funzioni da $\mathbb{R}^{m+n}$. Inoltre supponiamo che valgano le condizioni upper level di Mangasarian Fromovitz (UMFCQ) nel punto $(\bar{x}, \bar{y})$ e le condizioni lower level di Mangasarian Fromovitz (LMFCQ) nel punto $\bar{x}$. Allora esistono $\lambda \in (0, \infty)$ e $u \in \mathbb{R}^p$, $(v, w) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$ e $z \in \mathbb{R}^m$ tali che valga il seguente sistema per $(x, y) = (\bar{x}, \bar{y})$:*

$$\nabla_1 F(x, y) + \nabla_1 G(x, y)u + \nabla_1 g(x, y)v + \lambda \nabla_1 f(x, y) - \lambda \nabla_1 \ell(x, z, w) = 0 \tag{3.2}$$

$$\nabla_2 F(x, y) + \nabla_2 G(x, y)u + \nabla_2 g(x, y)v + \lambda \nabla_2 f(x, y) = 0 \tag{3.3}$$

$$\nabla_2 f(x, z) + \nabla_2 g(x, z)w = 0 \tag{3.4}$$

$$u \geq 0 \quad G(x, y) \leq 0 \quad u^T G(x, y) = 0 \tag{3.5}$$

$$v \geq 0 \quad g(x, y) \leq 0 \quad v^T g(x, y) = 0 \tag{3.6}$$

$$w \geq 0 \quad g(x, z) \leq 0 \quad w^T g(x, z) = 0 \tag{3.7}$$

Proof. Innanzitutto osserviamo che avendo f, e le g_i convesse allora anche $\varphi(x)$ è convessa.

Infatti siano $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in [0, 1]$. Osserviamo che presi $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^m$ tale per cui valgono:

$$g(x_1, y_1) \leq 0 \qquad g(x_2, y_2) \leq 0$$

allora:

$$g(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) \leq \lambda g(x_1, y_1) + (1-\lambda)g(x_2, y_2) \leq 0$$

.

Quindi concludiamo:

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq & \inf_{y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n} \{f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) | g_i(x_1, y_1) \leq 0 \; g_i(x_2, y_2) \leq 0\} \leq \\
& \leq \lambda \inf_{y_1 \in \mathbb{R}^n} \{f(x_1, y_1) | g_i(x_1, y_1) \leq 0\} + (1-\lambda) \inf_{y_2 \in \mathbb{R}^n} \{f(x_2, \lambda y_2) | \; g_i(x_2, y_2) \leq 0\} = \\
& = \lambda \varphi(x_1) + (1-\lambda)\varphi(x_2)
\end{aligned}$$

Ora osserviamo (supponendo di avere sempre $|\varphi(x)| < \infty$) che $\varphi(x)$, poichè è convessa, è anche localmente Lipshitziana. Ora sfruttando la partial calmness intorno a $(\bar{x}, \bar{y})$, sappiamo che esiste un $\lambda > 0$ tale per cui $(\bar{x}, \bar{y})$ è anche soluzione del problema 3.1. Quindi ora a partire dal problema 3.1, e sfruttando le condizioni di Mangasarian-Fromovitz upper-level (UMFCQ) , possiamo costruire il sistema di equazioni:

$$0 \in \nabla F(\bar{x}, \bar{y}) + \nabla G(\bar{x}, \bar{y})u + \nabla g(\bar{x}, \bar{y})v + \lambda \nabla f(\bar{x}, \bar{y}) + \lambda \begin{pmatrix} \partial(-\varphi)(\bar{x}) \\ \{0\} \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

che deriva da una generalizzazione del teorema di Fritz John, come mostrato ad esempio in [6] teorema 1. Notiamo che le ultime m componenti di 3.8 sono esattamente l'equazione 3.3. Le prime n componenti invece possono essere riscritte come:

$$\nabla_1 F(\bar{x}, \bar{y}) + \nabla_1 G(\bar{x}, \bar{y})u + \nabla_1 g(\bar{x}, \bar{y})v + \lambda \nabla_1 f(\bar{x}, \bar{y}) + \in \lambda \partial \varphi(\bar{x}) \tag{3.9}$$

Ma ora $\eta \in \partial\varphi(\bar{x})$ se e solo se esiste z tale che

$$(\eta, 0) \in \partial(f(\bar{x}, z) + \delta_g(\bar{x}, z)) \tag{3.10}$$

dove

$$\delta_g(x,z) = \begin{cases} 0 & se\, g(x,z) \leq 0 \\ +\infty & altrimenti \end{cases}$$

Ora usando le condizioni di Mangasarian Fromovitz lower level (LMFCQ) è possibile scrivere:

$$\partial\delta_g(x,z) = \{w\nabla g(x,z) | w \geq 0, \quad w_i \neq 0\, per\, i\, vincoli\, i\, inattivi\}$$

E quindi da 3.10 abbiamo ottenuto le equazioni 3.3 e 3.4, l'equazione 3.7 deriva dal fatto che w sono dei moltiplicatori di Lagrange.

□

Sottolineamo che queste equazioni dipendono dall'ipotesi di partial calmness. Per cui è necessario richiedere condizioni che verifichino tali proprietà. Come mostrato in [7], section 4 tale proprietà è vera ad esempio se sia f che g nel problema lower level sono funzioni lineari. Un'altra condizione sufficiente meno banale è data da quella che è data dall'essere un minimo sharp debole uniforme (uniformly weak sharp minimum), ovvero se esiste $\alpha > 0$ tale per ogni (x, y) vale che:

$$f(x,y) - \varphi(x) \leq \alpha\, dist(y, S(x)) \quad g(x,y) \leq 0$$

Questa proprietà insieme a chiedere che $F(x, y)$ sia Lipschitz continua in y e uniformemente continua in x garantisce che un punto di minimo per il problema 1.1 sia anche partially calm.

4. Algoritmo

In questa sezione ci occupiamo di ricavare un sistema quadrato dalle condizioni necessarie ottenute nella sezione precedente. Dalla risoluzione di questo sistema ricaveremo la direzione necessaria alla costruzione dell'algoritmo. Riformuliamo dapprima il sistema: sia $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come

$$\phi(a,b) = \sqrt{a^2 + b^2} - a - b$$

.

Vale $\phi(a, b) = 0$ se e solo se $a \geq 0$ e $b \geq 0$ e $ab = 0$. Ponendo

$$\phi^G(x,y,u) = \begin{pmatrix} \phi(-G_1(x,y), u_1) \\ \vdots \\ \phi(-g_p(x,y), u_p) \end{pmatrix} \qquad e \qquad \phi^g(x,y,v) = \begin{pmatrix} \phi(-g_1(x,y), v_1) \\ \vdots \\ \phi(-g_p(x,y), v_p) \end{pmatrix}$$

e

$$\mathcal{L}^\lambda(x,y,u,v) = F(x,y) + u^T G(x,y) + v^T g(x,y) + \lambda f(x,y)$$
$$L^\lambda(x,y,z,u,v,w) = \mathcal{L}^\lambda(x,y,u,v) - \lambda\ell(x,z,w)$$

Ponendo $\nabla L^\lambda(\zeta)$ uguale al gradiente rispetto alle variabili x, y, z, abbiamo che dato:

$$\Phi^\lambda(\zeta) := \begin{bmatrix} \nabla L^\lambda(\zeta) \\ \phi^G(x,y,u) \\ \phi^g(x,y,v) \\ \phi^g(x,z,w) \end{bmatrix}$$

per $\zeta := (x, y, z, u, v, w)$, il sistema del teorema è equivalente a chiedere $\Phi^\lambda(\zeta) = 0$. Osservando che $\Phi^\lambda(\zeta)$ è una funzione semismooth in ogni punto ζ che risolve il sistema, otteniamo quindi un sistema quadrato per il quale si può applicare il metodo di Newton semismooth [2].

A questo punto osserviamo che ϕ^2 è differenziabile con derivata Lipshitz continua e questo quindi ci permette di concludere che la funzione:

$$\Psi^\lambda(\zeta) := \frac{1}{2}||\Phi^\lambda(\zeta)||^2$$

è differenziabile a sua volta con derivata continua. A partire da questa funzione possiamo quindi costruire un algoritmo:

Algorithm 1 Semismooth Newton algorithm

Passo 0: Si scelgono $\lambda > 0$, $\beta > 0$, $\epsilon \geq 0$, $t > 2$, $\rho \in (0,1)$, $\sigma \in (0, \frac{1}{2})$, $\zeta_0 := (x^0, y^0, z^0, u^0, v^0, w^0)$.

Sia $k = 0$

Passo 1: while $||\Psi^\lambda(\zeta^k)|| > \epsilon$ repeat:

Passo 2: Scegli $W^k \in \partial_B \Psi^\lambda(\zeta^k)$ e calcola la soluzione del sistema :

$$W^k d = -\Phi^\lambda(\zeta^k)$$

Se il sistema non ha soluzione o la condizione :

$$\nabla\Psi^\lambda(\zeta^k)^T d^k \leq -\beta||d^k||^t$$

è violata allora si pone semplicemente:

$$d^k := -\nabla\Psi^\lambda(\zeta^k)$$

Passo 3: trova il più piccolo intero s_k tale che

$$\Psi^\lambda(\zeta^k + \rho^{s_k} d^k) \leq \Psi^\lambda(\zeta^k) + \sigma\rho^{s_k}\nabla\Psi^\lambda(\zeta^k)^T d^k$$

Passo 4: Poni $\alpha_k = \rho^{s_k}$, $\zeta^{k+1} := \zeta^k + \alpha_k d^k$, $k := k + 1$

Osserviamo come questa non sia altro che la procedura di Armijo, applicata alla direzione d^k. Vediamo però come per garantire la convergenza viene richiesta la condizione $\nabla\Psi^\lambda(\zeta^k)^T d^k \leq -\beta||d^k||^t$, invece che la condizione di curvatura. Osserviamo anche che λ è un parametro dell'algoritmo che deve essere scelto a priori.

Mostriamo quindi la convergenza dell'algoritmo:

Abbiamo bisogno, per il teorema di convergenza di definire due nozioni note come BD-regolarità e CD-regolarità:

Definition 4.1. Sia $h : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$. Diremo che h è BD-regolare nel punto x se ogni elemento di $\partial_B h(x)$ è non singolare. Similarmente h sarà CD-regolare in x ogni elemento di $\partial h(x)$ è non singolare

Theorem 4.2. *Valgono le seguenti:*

(a) Ogni punto di accumulazione della successione $\{\zeta_k\}$ generata dall'algoritmo è un punto stazionario di Ψ.

(b) Se uno dei punti limiti della successione $\{\zeta_k\}$, supponiamo ζ^*, è una soluzione BD-regolare del sistema $\Phi^\lambda = 0$, (ricordando che abbiamo supposto che le F, G, f, g siano almeno C^2) allora la convergenza è superlineare; se inoltre le F, G, f, g ammettono anche Hessiano Lipshitziano, allora la convergenza è quadratica.

Proof. Questa dimostrazione è un riadattamento della dimostrazione contenuta in [2]

a) Sia, a meno di rinominare gli indici, $\zeta_k \to \zeta*$. In primo luogo abbiamo che se per un numero infinito di indici $d^k = -\nabla\Psi^\lambda(\zeta^k)$ allora $\zeta*$ è un punto stazionario come conseguenza dei risultati noti sulla discesa del gradiente. Supponiamo quindi senza perdita di generalità che la direzione sia sempre la risoluzione del sistema al passo 2. Supponiamo per assurdo che $\nabla\Psi(\zeta*) \neq 0$. d^k soddisfa sempre

$$W^k d^k = -\Phi^\lambda(\zeta^k)$$

Quindi
$$||\Psi(\zeta^k)|| = ||W^k d^k|| \leq ||W^k||\,||d^k||$$
da cui
$$||d^k|| \leq \frac{||\Psi(\zeta^k)||}{||W^k||}$$
Notiamo che il conto è valido perchè se $||W^k||$ fosse zero implicherebbe $\Phi^\lambda(\zeta^k) = 0$

Ora osserviamo che esistono m e M tali che:
$$0 < m \leq ||d^k|| \leq M$$
. Infatti se esistesse una sottosuccesione tale che $||d^{k_j}|| \to 0$ allora si avrebbe anche che $||\Psi(\zeta_j^k)|| \to 0$ poichè è noto in generale che lo jacobiano W^{k_j} è limitato sulle sottosuccessioni limitate. Ma allora per continuità di Φ^λ, $\Phi^\lambda(\zeta^*) = 0$. Allo stesso modo se $|d^k||$ fosse illimitato, allora, avendo che $\nabla\Psi^\lambda(\zeta^k)$ è limitato, unito alla condizione del passo 2, abbiamo che necessariamente $||d^k||$ deve essere limitata, poiché $t > 2$.

Quindi ora il fatto che Ψ sia limitata dal basso sulla successione $\{\zeta^k\}$, a sua volta limitata, implica che:
$$(\Psi(\zeta^{k+1} - \Psi(\zeta^k)) \to 0$$
che implica quindi che $\rho^{s_k}\nabla\Psi^\lambda(\zeta^k)d^k \to 0$. Non resta che dimostrare che $\{\rho^{s_k}\} > \rho_{min} > 0$. Se per assurdo così non fosse, a meno di passare a sottosuccessioni avremmo $\{\rho^{s_k}\} \to 0$ in modo strettamente monotono. Allora la condizione al passo 3 viene violata per s_k troppo piccolo:
$$\frac{\Psi^\lambda(\zeta^k + \rho^{s_k-1}d^k) - \Psi^\lambda(\zeta^k)}{\rho^{s_k-1}} > \sigma\nabla\Psi^\lambda(\zeta^k)^T d^k$$
Ora con i passi precedenti abbiamo dimostrato che la successione dei d^k è limitata, per cui ammette sottosuccessione convergente $d^k \to \bar{d}$. Passando al limite nell'equazione precedente, abbiamo allora:
$$\nabla\Psi^\lambda((x^*)\bar{d} \geq \sigma\nabla\Psi^\lambda(\zeta^k)^T\bar{d}$$
Ma la condizione al passo 2 contraddice quest'ultima equazione, per cui $\{\rho^{s_k}\} > \rho_{min} > 0$. Ma questo allora implica
$$\nabla\Psi^\lambda(\zeta^k)d^k \to 0$$
Ma se fosse $d^k \to 0$ avremmo comunque un assurdo.

b) è invece diretta conseguenza del fatto che Φ^λ sia semismooth. Aggiungere le condizioni sugli Hessiani invece garantisce che Φ^λ sia anche srong semismooth che a sua volta garantisce la convergenza quadratica. Maggiori dettagli si trovano in [2] □

Abbiamo quindi convergenza a un punto stazionario di Ψ, necessitiamo quindi di un collegamento fra questo, ed essere punto di minimo di Φ^λ. E' noto ad esempio che se anche un solo elemento di $\partial\Phi^\lambda(\zeta^*)$ è non singolare allora $\nabla\Psi^\lambda(\zeta^*) = 0$ implica $\Psi^\lambda(\zeta^*) = 0$ Infatti innanzitutto osserviamo che possiamo scrivere:
$$\nabla\Psi^\lambda(\zeta*) = H\Phi^\lambda(\zeta*)$$
dove H è qualunque elemento di $\partial\Phi^\lambda(\zeta*)$. Allora se $\zeta*^*$ è un punto stazionario di Ψ^λ, abbiamo
$$0 = \nabla\Psi^\lambda(\zeta^*) = H\Phi^\lambda(\zeta^*)$$
Ma quindi se H è non singolare questo implica necessariamente che $\Phi(\zeta^*) = 0$

Osserviamo come la BD-regolarità sia meno forte della CD-regolarità per cui sotto quest'ultima il teorema è ancora valido.

Nella prossima dedichiamo quindi a condizioni che garantiscano la CD-regolarità.

5. CD-regolarità

Prima di tutto abbiamo bisogno di un lemma tecnico, per caratterizzare gli elementi di $\partial\Phi(\zeta)$:

Lemma 5.1. *Siano le funzioni F, G, f, g doppiamente differenziabili nel punto $\zeta := (x, y, z, u, v, w)$. Se $\lambda > 0$, allora Φ^λ è semismooth nel punto ζ e ogni matrice $W \in \partial\Phi^\lambda(\zeta)$ deve avere la forma:*

$$W = \begin{bmatrix} A_{11}^\lambda & (A_{21}^\lambda)^T & -\lambda A_{31}^T & B_{11}^T & B_{21}^T & -\lambda B_{31}^T \\ A_{21}^\lambda & A_{22}^\lambda & 0 & B_{12}^T & B_{22}^T & 0 \\ -\lambda A_{31} & 0 & -\lambda A_{33} & 0 & 0 & -\lambda B_{33}^T \\ \Lambda_1 B_{11} & \Lambda_1 B_{12} & 0 & \Gamma_1 & 0 & 0 \\ \Lambda_2 B_{21} & \Lambda_2 B_{22} & 0 & 0 & \Gamma_2 & 0 \\ \Lambda_3 B_{31} & 0 & \Lambda_3 B_{33} & 0 & 0 & \Gamma_3 \end{bmatrix}$$

Dove le sottomatrici sono definite come:

$$A_{11}^\lambda := \nabla_{11}\mathcal{L}^\lambda(\zeta) - \lambda\nabla_{11}\ell(\zeta)$$

$$A_{21}^\lambda := \nabla_{12}\mathcal{L}^\lambda(\zeta), \qquad A_{22}^\lambda := \nabla_{22}\mathcal{L}^\lambda(\zeta)$$

$$A_{31} := \nabla_{12}\ell(\zeta), \qquad A_{33} := \nabla_{22}\ell(\zeta)$$

$$B_{11} := \nabla_1 G(x, y) \qquad B_{21} := \nabla_1 g(x, y) \qquad B_{31} := \nabla_1 g(x, z)$$

$$B_{12} := \nabla_2 G(x, y), \qquad B_{22} := \nabla_2 g(x, y), \qquad B_{33} := \nabla_2 g(x, z)$$

Invece $\Lambda_i := diag(a_i)$ e $\Gamma_i := diag(b_i)$, $i = 1, 2, 3$ sono tali che

$$(a_j^i, b_j^i) \begin{cases} = (0, -1) \quad se \quad j \in \eta^i \\ = (1, 0) \quad se \quad j \in \nu^i \\ \in \{(\alpha, \beta) : (\alpha - 1)^2 + (\beta + 1)^2 \le 1\} \quad se j \in \theta^i \end{cases}$$

Proof. La dimostrazione non è altri che un conto a partire da $\Phi^\lambda(\zeta)$ scritta come:

$$\begin{bmatrix} \nabla_x L^\lambda(\zeta) \\ \nabla_y L^\lambda(\zeta) \\ \nabla_z L^\lambda(\zeta) \\ \phi^G(x, y, u) \\ \phi^g(x, y, v) \\ \phi^g(x, z, w) \end{bmatrix}$$

dove, l'unica cosa che può rendere il gradiente non unico, è data dal gradiente delle funzioni ϕ^G e ϕ^g nei punti $(0, 0)$, che corrisponde proprio agli indici in θ^i per $i = 1, 2, 3$. □

Definiamo ora:

Definition 5.2. la qualificazione dei vincoli versione upper level di indipendenza lineare (ULICQ) , data dalla proprietà:

$$\{\nabla G_i(\bar{x}, \bar{y}) : i \in I_1\} \cup \{\nabla g_j(\bar{x}, \bar{y}) : j \in I_2\} \qquad sono\, una\, famiglia\, linearmente\, indipendente \tag{5.1}$$

Consideriamo ora il cono delle direzioni ammissibili dato da:

$$Q(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) := \{d|\nabla G_i(\bar{x},\bar{y})d^{1,2}=0,\ \ i\in\nu^1,\ \ \nabla g_j(\bar{x},\ \ \bar{y})d^{1,2}=0,\\ j\in\nu^2,\ \ \nabla g_j(\bar{x},\bar{z})d^{1,3}=0,\ \ j\in\nu^3\}$$

dove $d := (d_1^1,\dots,d_n^1,d_1^2,\dots,d_m^2,d_1^3,\dots,d_m^3)$, e quindi $d^{1,2} = (d_1^1,\dots,d_n^1,d_1^2,\dots,d_m^2)$ e $d^{1,3} = (d_1^1,\dots,d_n^1,d_1^3,\dots,d_m^3)$.

Theorem 5.3. *Sia $\bar{\zeta} := (\bar{x},\bar{y},\bar{z},\bar{u},\bar{v},\bar{w})$, che soddisfa il sistema 3.2-3.7 per un certo $\lambda>0$. Supponi che valga la versione upper level di qualificazione dei vincoli data da indipendenza lineare (ULICQ 5.2) e la qualificazione dei vincoli lower-level data da indipendenza lineare (LLICQ 2.2) nel punto $(\bar{x},\bar{z})$. Se inoltre:*

$$(d^{1,2})^T\nabla^2\mathcal{L}^\lambda(\bar{\zeta})d^{1,2} > \lambda(d^{1,3})^T\nabla^2\ell(\bar{\zeta})d^{1,3} \tag{5.2}$$

per ogni $d\in Q(\bar{x},\bar{y},\bar{z})\setminus\{0\}$ e $\theta^3(\bar{x},\bar{z},\bar{w})=\emptyset$ (LSCC 2.5) allora Φ^λ è CD-regolare nel punto $\bar{\zeta}$.

Proof. Sia $W^\lambda\in\partial\Phi^\lambda(\bar{\zeta})$. Allora ha la struttura descritta nel lemma precedente. Sia $d=(d^1,d^2,d^3,d^4,d^5,d^6)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^q$ tale che $Wd=0$. Vogliamo mostrare che $d=0$. Abbiamo:

$$\nabla_{11}\mathcal{L}^\lambda(\bar{\zeta})d^1-\lambda\nabla_{11}\ell(\bar{\zeta})d^1+\nabla_{21}\mathcal{L}^\lambda(\bar{\zeta})d^2+\lambda(\nabla_{21}\ell(\bar{\zeta})d^3+\nabla_1 G(\bar{x},\bar{y})^Td^4+\nabla_1 g(\bar{x},\bar{y})^Td^5-\lambda\nabla_1 g(\bar{x},\bar{z})^Td^6=0 \tag{5.3}$$

$$\nabla_{12}\mathcal{L}^\lambda(\zeta)d^1+\nabla_{22}\mathcal{L}^\lambda(\zeta)d^2+\nabla_2 G(x,y)^Td^4+\nabla_2 g(x,y)^Td^5=0 \tag{5.4}$$

$$-\lambda\nabla_{12}\ell(\zeta)d^1-\lambda\nabla_{22}\ell(\zeta)d^3+-\lambda\nabla_2 g(x,z)^Td^6=0 \tag{5.5}$$

$$\forall j=1,\dots,p\quad a_j^1\nabla G_j(x,y)^Td^{1,2}+b_j^1d_j^4=0 \tag{5.6}$$

$$\forall j=1,\dots,q\quad a_j^2\nabla g_j(x,y)^Td^{1,2}+b_j^2d_j^5=0 \tag{5.7}$$

$$\forall j=1,\dots,q\quad a_j^3\nabla g_j(x,z)^Td^{1,3}+b_j^3d_j^6=0 \tag{5.8}$$

Poniamo per $i=1,2,3$, $p_1:=p$, $p_2:=q$ e $p_3:=q$.

Definiamo quindi:

- P_1^i l'insieme degli indici $j=1,\dots,p_i$ tali che $a_j^i>0$ e $b_j^i<0$;
- P_2^i l'insieme degli indici $j=1,\dots,p_i$ tali che $a_j^i=0$ e $b_j^i=-1$;
- P_3^i l'insieme degli indici $j=1,\dots,p_i$ tali che $a_j^i=1$ e $b_j^i=0$.

Dalle condizioni 5.6, 5.7, 5.8 segue quindi che per i $j\in P_2^1$, $\in P_2^2$, $\in P_2^3$, valgono rispettivamente:

$$d_j^4=0\qquad d_j^5=0\qquad d_j^6=0$$

Invece per $j\in P_3^1$, $\in P_3^2$, $\in P_3^3$, otteniamo rispettivamente:

$$\nabla G_j(x,y)d^{1,2}=0\qquad\nabla g_j(x,y)d^{1,2}=0\qquad\nabla g_j(x,z)d^{1,3}=0$$

Abbiamo $\theta^3=\emptyset$ per ipotesi, questo vuol dire che anche $P_1^3=\emptyset$.

Rimangono da osservare $j\in P_1^1$ e $j\in P_1^2$, dove abbiamo:

$$\nabla G_j(x,y)^Td^{1,2}=C_j^1d_j^4\qquad e\qquad\nabla g_j(x,y)d^{1,2}=c_j^2d_j^5$$

dove $c_j^1=-\frac{b_j^1}{a_j^1}$ e $c_j^2=-\frac{b_j^2}{a_j^2}$.

Ora moltiplichiamo a sinistra l'equazione 5.3 e 5.4 e 5.5, per $(d^1)^T$, $(d^2)^T$ e $(d^3)^T$ rispettivamente e sommiamo, ottenendo:

$$(d^{1,2})^T\nabla^2\mathcal{L}^\lambda(\bar{\zeta})d^{1,2}-\lambda(d^{1,3})^T\nabla^2\ell^\lambda(\bar{\zeta})d^{1,3}+(d^4)^T\nabla G(\bar{x},\bar{y})d^{1,2}+(d^5)^T\nabla g(\bar{x},\bar{y})d^{1,2}-\lambda(d^6)^T\nabla g(\bar{x},\bar{z})d^{1,3}=0 \tag{5.9}$$

Osserviamo però che poichè $P_1^3 = \emptyset$ possiamo riscrivere:

$$(d^6)^T \nabla g(\bar{x}, \bar{z}) d^{1,3} = \sum_{j \in P_2^3} d_j^6 \nabla g_j(\bar{x}, \bar{z})^T d^{1,3} + \sum_{j \in P_3^3} d_j^6 \nabla g_j(\bar{x}, \bar{z})^T d^{1,3}$$

Ma abbiamo mostrato che se $j \in P_3^2$ allora $d_j^6 = 0$ e se $j \in P_3^3$ allora $\nabla g_j(\bar{x}, \bar{z}) d^{1,3} = 0$, questo vuol dire che

$$(d^6)^T \nabla g(\bar{x}, \bar{z}) d^{1,3} = 0$$

Ora mettendo tutto ciò che abbiamo osservando fin'ora all'interno di 5.9 otteniamo:

$$(d^{1,2})^T \nabla^2 \mathcal{L}^\lambda(\bar{\zeta}) d^{1,2} - \lambda (d^{1,3})^T \nabla^2 \ell^\lambda(\bar{\zeta}) d^{1,3} + \sum_{j \in P_1^1} c_j^1 (d_j^4)^2 + \sum_{j \in P_1^2} c_j^2 (d_j^5)^2 = 0 \tag{5.10}$$

Ora i termini $\sum_{j \in P_1^1} c_j^1 (d_j^4)^2 + \sum_{j \in P_1^2} c_j^2 (d_j^5)^2$ sono ≥ 0 per definizione, per cui dalla condizione 5.2 otteniamo necessariamente che $d^1 = 0$, $d^2 = 0$ e $d^3 = 0$. Ma ora guardando le somme ricaviamo anche $d_j^4 = 0$ per $j \in P_1^1$ e e $d_j^5 =$ per $j \in P_1^2$.

Alla luce di questo risultato le equazioni 5.3, 5.4 e 5.5 diventano:

$$\nabla_1 G(\bar{x}, \bar{y})^T d^4 + \nabla_1 g(\bar{x}, \bar{y})^T d^5 - \lambda \nabla_1 g(\bar{x}, \bar{z})^T d^6 = 0 \tag{5.11}$$

$$\nabla_2 G(x, y)^T d^4 + \nabla_2 g(x, y)^T d^5 = 0 \tag{5.12}$$

$$-\lambda \nabla_2 g(x, z)^T d^6 = 0 \tag{5.13}$$

Se incorporiamo anche le informazioni che abbiamo sugli indici di d^4, d^5, e d^6, otteniamo

$$\sum_{j \in P_3^1} d_j^4 \nabla_1 G_j(\bar{x}, \bar{y}) + \sum_{j \in P_3^2} d_j^5 \nabla_1 g_j(x, y) + \sum_{j \in P_3^3} (-\lambda d_j^6) \nabla_1 g(\bar{x}, \bar{z}) = 0 \tag{5.14}$$

$$\sum_{j \in P_3^1} d_j^4 \nabla_2 G_j(\bar{x}, \bar{y}) + \sum_{j \in P_3^2} d_j^5 \nabla_2 g_j(x, y) = 0 \tag{5.15}$$

$$\sum_{j \in P_3^3} (-\lambda d_j^6) \nabla_2 g(\bar{x}, \bar{z}) = 0 \tag{5.16}$$

Ora se $j \in P_3^3$ in particolare significa che $g_j(\bar{x}, \bar{z}) = 0$ per cui guardando l'equazione $\sum_{j \in P_3^3} (-\lambda d_j^6) \nabla_2 g(\bar{x}, \bar{z}) = 0$ e usando la proprietà di qualificazione dei vincoli di indipendenza lineare lower-level (LLICQ 2.2), concludiamo che $d^6 = 0$.

Infine applicando $d_6 = 0$ all'ultimo sistema, e unendo le prime due equazioni otteniamo:

$$\sum_{j \in P_3^1} d_j^4 \nabla G_j(\bar{x}, \bar{y}) + \sum_{j \in P_3^2} d_j^5 \nabla g_j(x, y) = 0 \tag{5.17}$$

E concludiamo che anche $d^4 = 0$ e $d^5 = 0$, grazie alla qualificazione dei vincoli di indipendenza lineare upper level (ULICQ 5.2). □

Sottolineamo come la condizione $\theta^3(\bar{x}, \bar{z}, \bar{w}) = \emptyset$ non implichi la differenziabilità locale della φ.

6. Condizioni simil-Robinson

In questa sezione presentiamo un risultato che non è altro che un rafforzamento delle condizioni precedenti in modo da poter ottenere anche la proprietà che l'algoritmo trovi un punto di minimo locale che sia anche stretto. L'intenzione è quella di emulare quelle che sono nel caso dei problemi di ottimizzazione classici, le condizioni di tipo Robinson, ovvero condizioni costituite dalla qualificazione dei vincoli data dall'indipendenza lineare e una condizione forte del secondo ordine. Infatti è noto ([8] theorem 4.2) che le condizioni di tipo Robinson permettano di ottenere la CD-regularity della funzione obiettivo, se il problema orginale è sufficientemente regolare. Tuttavia è anche noto che implichino che il punto trovato sia un vero minimo locale stretto.

Definiamo quindi il cono delle direzioni ammissibili dato da:

$$
\begin{aligned}
C^\lambda(\bar{x},\bar{y}) = \{d|\nabla G_i(\bar{x},\bar{y})^T d = 0 \quad per, i\in\nu^1, \quad \nabla G_i(\bar{x},\bar{y})^T d \leq 0 \quad per\, i\in\theta^1,\\
\nabla g_i(\bar{x},\bar{y})^T d = 0 \quad per, i\in\nu^2, \quad \nabla g_i(\bar{x},\bar{y})^T d \leq 0 \quad per\, i\in\theta^2\\
\nabla F(\bar{x},\bar{y})^T d + \lambda f(\bar{x},\bar{y})^T d - \lambda\nabla_1\ell(\bar{x},z,w)^T d^1 \leq 0 \quad per\, z\in S(\bar{x})\}
\end{aligned}
$$

Consideriamo ora una lagrangiana modificata che servirà per il nostro teorema.

$$
\bar{\mathcal{L}}^\lambda_\kappa(x,y,u,w) = \kappa(F(x,y)+\lambda f(x,y)) + \sum_{i\in I^1(d)} u_i G_i(x,y) + \sum_{j\in I^2(d)} v_j g_j(x,y)
$$

Dove $I^1(d)$ e $I^2(d)$ sono gli indici appartenenti rispettivamente a I^1 e I^2 tali che $\nabla G_i(x,y)d = 0$ e$\nabla g_i(x,y)d = 0$.

Siamo pronti a enunciare il teorema:

Theorem 6.1. *Sia $\zeta := (x,y,z,u,v,w)$ che soddisfa le condizioni 3.2-3.7 per qualche $\lambda > 0$. Supponi che il problema lower level sia convesso nel punto $\bar{x}$, ovvero che sia $f(\bar{x},z)$ che $g_i(\bar{x},z)$ per ogni $i = 1,\dots,q$, sono convesse come funzioni di z e che le condizioni di derivabilità presenti in 2.8 valgnano per tutti i $d\in C^\lambda(\bar{x},\bar{y})$.*

Allora $(\bar{x},\bar{y})$ è un punto di ottimo locale del problema 3.1 se per ogni $d\in C^\lambda(\bar{x},\bar{y})\setminus\{0\}$, esistono dei vettori u, v z^t e κ_t , dove $z^t\in S_1(\bar{x},d^1)$, per $t = 1,\dots,k$ per un certo k, tali che:

$$
(d)^T\nabla\bar{\mathcal{L}}^\lambda_{\kappa_0}(\bar{x},\bar{y},u,w)d > \lambda\sum_{t=1}^{k}\kappa_t\xi_{d^1}(\bar{x},z^t)
$$

dove, $\xi_{d^1}(\bar{x},z^t)$, sono quantità che dipendono dalla definizione di derivata seconda di φ, $\kappa_0 = \sum_{t=1}^k \kappa_t$ e

$$
\nabla_1\bar{\mathcal{L}}^\lambda_{\kappa_0}(\bar{x},\bar{y},u,v) - \lambda\sum_{t=1}^{k}\kappa_t\nabla_1\ell(\bar{x},z^t,w^t) = 0
$$

$$
\nabla_2\bar{\mathcal{L}}^\lambda_{\kappa_0}(\bar{x},\bar{y},u,v) = 0
$$

dove $\Lambda(\bar{x},z^t) = \{w^t\}$, e

$$
\kappa_o + \sum_{i\in I^1(d)} u_i + \sum_{j\in I^2(d)} v_j = 1
$$

$$
\kappa_0 \geq 0, \quad u_i \geq 0\, per\, i\in I^1(d), \quad v_j\geq 0\, per\, j\in I^2(d)
$$

Proof. Consideriamo prima il problema di ottimizzazione 3.1, per un parametro $\lambda > 0$, e che soddisfi le condizioni 3.2-3.7. Il problema può essere quindi riscritto come:

$$
\min F(x,y) + \lambda(f(x,y) - \varphi(x)) \quad t.c. \quad \mathcal{G}(x,y) \leq 0 \tag{6.1}
$$

Dove $\mathcal{G}(x,y) := \max\{G_1(x,y),\dots,G_p(x,y),g_1(x,y),\dots,g_q(x,y)\}$ (ψ nell'articolo).

Consideriamo ora il seguente problema:

$$\min \phi_\lambda(x,y) := \min_{x,y} \{\max\{\psi_\lambda(x,y), \mathcal{G}(x,y)\}\} \tag{6.2}$$

Dove $\psi_\lambda(x,y) := F(x,y) - F(\bar{x},\bar{y}) + \lambda(f(x,y) - f(\bar{x},\bar{y})) - \lambda(\varphi(x) - \varphi(\bar{x}))$

Osserviamo quindi che se abbiamo che $(\bar{x},\bar{y})$ è un minimo locale per il nuovo problema, allora necessariamente è un punto ammissibile e contemporaneamente un minimo locale per il problema 3.1.

In virtù di questo dimostriamo le seguenti condizioni che garantiscono che $(\bar{x},\bar{y})$ è un minimo locale per il problema 6.2:

(1) ϕ_λ ammette derivata direzionale e vale

$$phi'_\lambda(\bar{x},\bar{y};d) \geq 0 \quad \forall d \in \mathbb{R}^{n+m} \tag{6.3}$$

(2) ϕ_λ ammette derivata direzionale seconda e soddisfa la condizione:

$$\inf_{e\in\mathbb{R}^{n+m}} \phi''(\bar{x},\bar{y};d;e) > 0 \quad per\, tutti\, i\, d \neq 0 \quad t.c. \quad \phi'_\lambda(\bar{x},\bar{y};d) = 0 \tag{6.4}$$

(3) ϕ_λ soddisfa quella che viene chiamata condizione di epiregolarità del secondo ordine, ovvero:

per ogni $d \in \mathbb{R}^{n+m}$, $t \geq 0$, e ogni cammino $e : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n+m}$ tale che $te(t) \to 0$ per $t \downarrow 0$ vale:

$$\phi_\lambda\left((\bar{x},\bar{y}) + td + \frac{1}{2}t^2 e(t)\right) \geq \phi_\lambda(\bar{x},\bar{y}) + t\phi'_\lambda(\bar{x},\bar{y};d) + \frac{1}{2}t^2\phi''_\lambda(\bar{x},\bar{y};d;e(t)) + o(t^2)$$

Dimostriamo (1) Osserviamo che $\phi_\lambda(\bar{x},\bar{y}) = 0$, per come è definita ψ_λ. Questo significa che per il calcolo delle derivate direzionali, ci interesserà guardare solo le funzioni G_i e g_j che assumono il valore 0 in $(\bar{x},\bar{y})$.

Osserviamo ora che $\mathcal{G}$ ammette derivata direzionale, infatti sia i vincoli upper-level che i vincoli lower-level sono derivabili con continuità e il valore assunto è:

$$\mathcal{G}'(\bar{x},\bar{y};d) = \max_{i\in I^1, j\in I^2} \left\{\nabla G_i(\bar{x},\bar{y})^T d, \quad \nabla g_j(\bar{x},\bar{y})^T d\right\}$$

per ogni $d \in \mathbb{R}^{n+m}$.

Invece per ψ_λ, ricordiamo, grazie alla qualificazione dei vincoli lower level data dall'indipendenza lineare (LLICQ 2.2) che i moltiplicatori legati alla funzione lower level w, sono unici fissati $(\bar{x},z)$ per, dove $z \in S(\bar{x})$ per cui scriveremo $w = w(z)$ per sottolineare questa dipendenza. Quindi come conseguenza del teorema 2.3, abbiamo:

$$\psi'_\lambda(\bar{x},\bar{y};d) = \max_{z\in S(\bar{x})} \left\{\nabla(F+\lambda f)(\bar{x},\bar{y})^T d - \lambda\nabla_x \ell(\bar{x},z,w(z))^T d^1\right\}$$

Ora

$$\phi'_\lambda(\bar{x},\bar{y};d) = \max\{\psi'_\lambda(\bar{x},\bar{y};d), \mathcal{G}'(\bar{x},\bar{y};d)\}$$

Ovvero

$$\phi'_\lambda(\bar{x},\bar{y};d) = \max_{\substack{i\in I^1\\ j\in I^2\\ z\in S(\bar{x})}} \{\nabla G_i(\bar{x},\bar{y})^T d, \quad \nabla g_j(\bar{x},\bar{y})^T d, \nabla(F+\lambda f)(\bar{x},\bar{y})^T d - \lambda\nabla_x \ell(\bar{x},z,w(z))^T d^1\}$$

Abbiamo $\phi'_\lambda(\bar{x},\bar{y};0) = 0$

Inoltre osserviamo che $\phi'_\lambda(\bar{x},\bar{y};d)$ è una funzione convessa di d, in quando è un massimo funzioni lineari in d e quindi convesse.

Per cui richiedere 6.3, equivale a richiedere :

$$0 \in \partial_d \phi'_\lambda(\bar{x},\bar{y};0)$$

dove $\partial_d \phi'_\lambda(\bar{x},\bar{y};0)$ sono i sottogradienti come funzione di d.

Ma ora sfruttando il fatto che $\phi'_\lambda(\bar{x},\bar{y};0)=0$, insieme alla linearità delle funzioni da cui è ottenuto il massimo abbiamo che:

$$\partial_d\phi'_\lambda(\bar{x},\bar{y};0) \supseteq conv\{\nabla G_i(\bar{x},\bar{y})^T d \quad per\, i\in I^1, \nabla g_j(\bar{x},\bar{y})^T d \quad per\, j\in I^2, \tag{6.5}$$

$$\nabla(F+\lambda f)(\bar{x},\bar{y})^T d - \lambda\nabla_x \ell(\bar{x},z,w(z))^T d^1 \quad per\, z\in S(\bar{x})\} \tag{6.6}$$

Consideriamo ora, a partire da $\bar{\zeta} := (\bar{x},\bar{y},\bar{z},\bar{u},\bar{v},\bar{w})$, la quantità:

$$\varrho := 1+\sum_{i\in I^1}\bar{u}_i+\sum_{j\in I^2}\bar{v}_j$$

Abbiamo che $\varrho>0$. Poniamo $\kappa_o=\frac{1}{\varrho}$, $\bar{u}'_i=\frac{1}{\varrho}\bar{u}_i$, $\bar{v}'_j=\frac{1}{\varrho}\bar{v}_j$. Allora valgono:

$$\kappa_o+\sum_{i\in I^1}\bar{u}'_i+\sum_{j\in I^2}\bar{v}'_j=1$$

e consideriamo quindi $\Theta\in\partial_d\phi'_\lambda(\bar{x},\bar{y};0)$ definito come:

$$\Theta := \kappa_o\left(\nabla F(x,y)+\lambda\nabla f(\bar{x},\bar{y})-\lambda\begin{bmatrix}\nabla_x\ell(\bar{x},\bar{z},\bar{w})\\ 0\end{bmatrix}\right)+\sum_{i\in I^1}u'_i\nabla G_i(\bar{x},\bar{y})+\sum_{j\in I^2}v'_j\nabla g_j(\bar{x},\bar{y})=0$$

Infatti osserviamo che non sono altro che le condizioni 3.2 e 3.3 rimoltiplicate per $\frac{1}{\varrho}$. Osserviamo che il fatto che valga la condizione 3.4 e 3.7, significa che $\bar{w}$ sia un moltiplicatore di Lagrange per il problema lower level a $\bar{x}$ fissato, il che è equivalente ad avere $z\in S(\bar{x})$ poichè vale la qualificazione dei vincoli di indipendenza lineare lower level (LLICQ 2.2).

Dimostriamo (2) Osserviamo che per dimostrare la condizione, ci interessa solo il calcolo delle derivate direzionali seconde rispetto a una direzione d, dove le funzioni G_i e g_j che assumono il valore 0 in $(\bar{x},\bar{y})$, e tali che $\nabla G_i(\bar{x},\bar{y})d=0$ o $\nabla g_j(\bar{x},\bar{y})d=0$. Per cui possiamo scrivere esplicitamente:

$$\mathcal{G}''(\bar{x},\bar{y};d;e)=\max_{i\in I^1(d),j\in I^2(d)}\left\{G''(\bar{x},\bar{y};d;e),\quad g''(\bar{x},\bar{y};d;e)\right\}$$

per ogni $d,e\in\mathbb{R}n+m$.

Invece per ψ''_λ abbiamo che :

$$\begin{aligned}\psi''_\lambda(\bar{x},\bar{y};d;e)=\lim_{t\downarrow 0}\frac{2}{t^2}\Bigg\{&\left[(F+\lambda f)\left((\bar{x},\bar{y})+td+\frac{1}{2}t^2e\right)\right.\\ &\left.-(F+\lambda f)(\bar{x},\bar{y})-t(F+\lambda f)'(\bar{x},\bar{y};d)\right]\\ &-\lambda\left[\varphi\left(\bar{x}+td^1+\frac{1}{2}t^2e^1\right)-\varphi(\bar{x})-t\varphi'(\bar{x},d^1)\right]\Bigg\}\\ =(F+\lambda f)''(\bar{x},\bar{y});d;e)-\lambda\varphi''(\bar{x},d^1,e^1)\end{aligned}$$

dove abbiamo applicato la definizione di derivata direzionale seconda e separato i termini.

Applicando il teorema 2.8 e poi osservando che ne f ne F dipendono da z otteniamo:

$$\begin{aligned}\psi''_\lambda(\bar{x},\bar{y};d;e)=&F''(\bar{x},\bar{y};d;e)+\lambda f''(\bar{x},\bar{y});d;e)-\lambda\inf_{z\in S_1(\bar{x};d^1)}\left\{\nabla_1\ell(\bar{x},z,w)e^1+\xi_{d^1}(\bar{x},z)\right\}\\ =&\sup_{z\in S_1(\bar{x};d^1)}\left\{F''(\bar{x},\bar{y};d;e)+\lambda f''(\bar{x},\bar{y};d;e)-\lambda\nabla_1\ell(\bar{x},z,w)e^1-\lambda\xi_{d^1}(\bar{x},z)\right\}\end{aligned}$$

Infine poichè il teorema 2.8 garantisce la compattezza di $S_1(\bar{x};d^1)$ abbiamo:

$$\psi''_\lambda(\bar{x},\bar{y};d;e) = \max_{z\in S_1(\bar{x};d^1)} \left\{F''(\bar{x},\bar{y};d;e) + \lambda f''(\bar{x},\bar{y};d;e) - \lambda\nabla_1\ell(\bar{x},z,w)e^1 - \lambda\xi_{d^1}(\bar{x},z)\right\}$$

Ora consideriamo $d \in C^\lambda(\bar{x},\bar{y})$. Allora, dalle proprietà di d e dalla formula che abbiamo ricavato per ϕ'_λ otteniamo $\phi'_\lambda(\bar{x},\bar{y};d) \geq 0$, e quindi dalla proprietà 6.3, $\phi'_\lambda(\bar{x},\bar{y};d) = 0$

Osserviamo ora che, poichè $\bar{\zeta} := (\bar{x},\bar{y},\bar{z},\bar{u},\bar{v},\bar{w})$ soddisfa la condizione 3.5, allora vale $\{1,\dots,p\} = \eta^1 \cup \theta^1 \cup \nu^1$. Quindi grazie alla proprietà di $d \in C^\lambda(\bar{x},\bar{y})$ sugli indici in ν^1, possiamo scrivere $\sum_{i=1}^p u_i\nabla G_i(\bar{x},\bar{y})^T d = 0$ e quindi anche

$$\sum_{i=1}^p \bar{u}_i\nabla G_i(\bar{x},\bar{y})^T d = 0$$

Allo stesso identico modo, sfruttando l'equazione 3.6 si può concludere che:

$$\sum_{j=1}^q \bar{v}_j\nabla g_j(\bar{x},\bar{y})^T d = 0$$

Queste due equazioni ci permettono usare le equazioni 3.2 e 3.3 per scrivere (cancellando quindi i termini G e g):

$$\nabla F(\bar{x},\bar{y})d + \lambda\nabla f(\bar{x},\bar{y})d + \nabla_1\ell(\bar{x},\bar{z},\bar{w})^T d^1 = 0$$

Ma poichè per definizione di $C^\lambda(\bar{x},\bar{y})$:

$$\nabla F(\bar{x},\bar{y})d + \lambda\nabla f(\bar{x},\bar{y})d + \nabla_1\ell(\bar{x},z,w)^T d^1 \leq 0 \qquad z \in S(\bar{x})$$

allora abbiamo:

$$\psi'_\lambda(\bar{x},\bar{y};d) = \max_{z\in S(\bar{x})} \left\{\nabla F(\bar{x},\bar{y})d + \lambda\nabla f(\bar{x},\bar{y})d + \nabla_1\ell(\bar{x},z,w)^T d^1)\right\} = 0$$

Abbiamo così che le direzioni ammissibili soddisfano proprio le condizioni con le quali abbiamo ricavato le derivate, e possiamo scrivere che per $d \in C^\lambda(\bar{x},\bar{y})$ e $e \in \mathcal{R}^{m+n}$ vale, ricavando la formula per la derivata direzionale seconda per funzioni derivabili due volte:

$$\phi''_\lambda(\bar{x},\bar{y};d;e) = \max_{\substack{i\in I^1,\, j\in I^2\\ z\in S_1(\bar{x};d^1)}} \Big\{\nabla G_i(\bar{x},\bar{y})^T e + d^T\nabla G_i(\bar{x},\bar{y})d, \quad \nabla g_j(\bar{x},\bar{y})^T e + d^T\nabla g_j(\bar{x},\bar{y})d,$$
$$F''(\bar{x},\bar{y};d;e) + \lambda f''(\bar{x},\bar{y};d;e) - \lambda\nabla_1\ell(\bar{x},z,w)e^1 - \lambda\xi_{d^1}(\bar{x},z)\Big\}$$

Ora $\inf_{e\in\mathbb{R}^{n+m}} \phi''(\bar{x},\bar{y};d;e)$ può così essere riscritto come un problema di ottimizzazione lineare:

$$\inf_{\varsigma} \left\{\varsigma_1 | A\varsigma \geq b,\ \alpha(z)\varsigma \geq \beta(z),\ z \in S_1(\bar{x};d^1)\right\}$$

Dove:

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -\nabla G_1(\bar{x},\bar{y})^T \\ \vdots & \vdots \\ 1 & -\nabla G_{l_1}(\bar{x},\bar{y})^T \\ 1 & -\nabla g_1(\bar{x},\bar{y})^T \\ \vdots & \vdots \\ 1 & -\nabla g_{l_2}(\bar{x},\bar{y})^T \end{bmatrix} \qquad b := \begin{bmatrix} d^T\nabla^2 G_1(\bar{x},\bar{y})^T d \\ \vdots \\ d^T\nabla^2 G_{l_1}(\bar{x},\bar{y})^T d \\ d^T\nabla^2 g_1(\bar{x},\bar{y})^d \\ \vdots \\ d^T\nabla^2 g_{l_2}(\bar{x},\bar{y})^T d \end{bmatrix}$$

$$\alpha(z) := \left[1, -\nabla F(\bar{x},\bar{y}) - \lambda\nabla f(\bar{x},\bar{y}) + \lambda\left[\nabla_1\ell(\bar{x},z,w)^T, 0\right]\right]$$

$$\beta(z) := d^T\nabla^2 F(\bar{x},\bar{y})d + \lambda d^T\nabla^2 f(\bar{x},\bar{y})d - \lambda\xi_{d^1}(\bar{x},z)$$

,

l_1 è la cardinaliltà di $I^1(d)$ e l_2 è la cardinaliltà di $I^2(d)$ e ς_1 è la prima componente di ς. Ora osserviamo che per ogni vettore $c \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, con componenti tutte nulle tranne la prima per cui chiediamo $c_1 > 0$ vale:

$$A_i^T c > 0, \quad i = 1, \ldots, n+m \quad e \quad \alpha(z)^T c > 0, \quad z \in S_1(\bar{x}; d^1)$$

dove A_i è l'i-esima riga di A. Osserviamo come queste corrispondano alle condizioni di Mangasarian-Fromovitz (senza vincoli di uguaglianza) nel caso infinito. Quindi avendo solo funzioni lineari e avendo che $S_1(\bar{x}; d^1)$ è compatto possiamo applicare il teorema 4.1 in [9] sull'ottimizzazione semi-inifnita, il cui punto (c) ci permette di scrivere la lagrangiana del problema, usando solo un numero finito di termini k appartenenti ai vincoli $\alpha(z)$. Sfruttando poi le proprietà note della dualità lagrangiana nel caso lineare, il problema diventa:

$$\max_{\kappa,u,v} d^T \bar{\mathcal{L}}^{\lambda}_{\kappa_0}(\bar{x}, \bar{y}, u, v) d - \lambda \sum_{t=1}^{k} \kappa_t \xi_{d^1}(\bar{x}, z^t)$$

con condizioni:

$$\nabla_1 \bar{\mathcal{L}}^{\lambda}_{\kappa_0}(\bar{x}, \bar{y}, u, v) - \lambda \sum_{t=1}^{k} \kappa_t \nabla_1 \ell(\bar{x}, z^t, w^t) = 0$$

$$\nabla_2 \bar{\mathcal{L}}^{\lambda}_{\kappa_0}(\bar{x}, \bar{y}, u, v) = 0$$

e

$$\kappa_o + \sum_{i \in I^1(d)} u_i + \sum_{j \in I^2(d)} v_j = 1$$

$$\kappa_0 \geq 0, \quad u_i \geq 0 \, per \, i \in I^1(d), \quad v_j \geq 0 \, per \, j \in I^2(d)$$

dove u_i sono i moltiplicatori di Lagrange per i vincoli A dipendenti dalle funzioni G mentre v_i lo sono per quelli dipendenti dalle funzioni g. Invece k_t sono i moltiplicatori di Lagrange dati dai vincoli $\alpha(z^t)$. Ma per ipotesi del teorema abbiamo supposto che queste condizioni venissero verificate per certi κ, u, e v che soddisfino anche

$$(d)^T \nabla \bar{\mathcal{L}}^{\lambda}_{\kappa_0}(\bar{x}, \bar{y}, u, w) d > \lambda \sum_{t=1}^{k} \kappa_t \xi_{d^1}(\bar{x}, z^t)$$

garantendo la positività della soluzione ottima del problema duale e quindi verificando la proprietà 6.4.

Dimostriamo infine la proprietà (3).

Come conseguenza del teorema 2.8 abbiamo che φ soddisfa la condizione di epiregolarità del secondo ordine:

$$-\varphi\left(\bar{x} + td^1 + \frac{1}{2}t^2 e^1(t)\right) \geq -\varphi(\bar{x}) - t\varphi(\bar{x}, d^1) - \frac{1}{2}t^2 \varphi''(\bar{x}; d^1, e^1(t)) + o(t^2)$$

per ogni $d \in \mathbb{R}^{n+m}$, $t \geq 0$, e ogni cammino $e : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n+m}$ tale che $te(t) \to 0$ per $t \downarrow 0$. Inoltre abbiamo per ipotesi che $F + \lambda f$ è doppiamente differenziabile, per cui:

$$(F+\lambda f)\left((\bar{x}, \bar{y}) + td + \frac{1}{2}t^2 e(t)\right) \geq (F+\lambda f)(\bar{x}, \bar{y}) - tF+\lambda f)(\bar{x}, \bar{y}; d) - \frac{1}{2}t^2 (F+\lambda f)''(\bar{x}, \bar{y}; d, e^1(t)) + o(t^2)$$

Quindi moltiplicando φ per $\lambda > 0$, e sommando le due disuguaglianze otteniamo la tesi. $\square$

7. Caso g inipendente dalle variabili x

Una proprietà non rara nei problemi pratici è quella di avere i vincoli lower level indipendenti dalla variabile lower level. Questo permette di semplificare il problema, e di ricavare, come conseguenza nel caso convesso, $S(\bar{x}) = \{y\}$. In questa sezione enunciamo quindi dei risultati simili a quelli delle sezioni precedenti ma riadattati alla fattispecie considerata, che ci permette di utilizzare ipotesi meno stringenti.

Theorem 7.1. *Supponiamo che valgano le ipotesi del teorema 2.3 con $S(\bar{x}) = \{y\}$ e supponiamo che*

$$e^T \nabla^2_{22}\ell(\bar{x}, \bar{y}, \bar{w})e > 0 \quad \forall e \;\; t.c. \begin{cases} \nabla_2 g_i(\bar{x}, \bar{y})^T e = 0 \;\; per\, i \in \nu^3 \\ \nabla_2 g_i(\bar{x}, \bar{y})^T e \leq 0 \;\; per\, i \in \theta^3 \end{cases}$$

Allora si ha:

$$\varphi''(\bar{x}; d, e) = \nabla^x \ell(\bar{x}, \bar{y}, \bar{w})^T e + \xi_d(\bar{x}, \bar{y})$$

dove $\xi_d(\bar{x}, z)$ è defnito da:

$$\begin{cases} \xi_d(\bar{x}, z) = \min_{e \in \mathcal{Z}_d(\bar{x}, z)} (d, e)^T \nabla^2 \ell(\bar{x}, z, w_z)(d, e) \\ \mathcal{Z}_d(\bar{x}, z) = \{e \in \mathbb{R}^m | \nabla_1 g_i(\bar{x}, z)^T d + \nabla_2 g_i(\bar{x}, z)^T e = 0, \;\; i \in \nu^3, \;\; \nabla_1 g_i(\bar{x}, z)^T d + \nabla_2 g_i(\bar{x}, z)^T e \leq 0, \;\; i \in \theta^3, \} \end{cases}$$

Il teorema successivo non è altri che una riscrittura del teorema **??**, nel caso specifico $S(\bar{x}) = \{y\}$.

Theorem 7.2. *Sia $(\bar{x}, \bar{y})$ un punto di minimo locale per il problema 1.1, in cui supponiamo sia anche partially calm 3.1. Supponiamo inoltre che f e $g_1, \dots, g_q$ siano convesse come funzioni da $\mathbb{R}^{m+n}$. Inoltre supponiamo che valgano le condizioni upper level di Mangasarian Fromovitz (UMFCQ 3.3) nel punto $(\bar{x}, \bar{y})$ e le condizioni lower level di Mangasarian Fromovitz (LMFCQ 3.4) nel punto $\bar{x}$. Allora esistono $\lambda \in (0, \infty)$ e $u \in \mathbb{R}^p$, $(v, w) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$ e $z \in \mathbb{R}^m$ tali che valga il seguente sistema per $(x, y) = (\bar{x}, \bar{y})$:*

$$\nabla_1 F(x, y) + \nabla_1 G(x, y)u + \nabla_1 g(x, y)(v - \lambda w) = 0 \tag{7.1}$$

$$\nabla_2 F(x, y) + \nabla_2 G(x, y)u + \nabla_2 g(x, y)v + \lambda \nabla_2 f(x, y) = 0 \tag{7.2}$$

$$\nabla_2 f(x, y) + \nabla_2 g(x, y)w = 0 \tag{7.3}$$

$$u \geq 0 \quad G(x, y) \leq 0 \quad u^T G(x, y) = 0 \tag{7.4}$$

$$v \geq 0 \quad g(x, y) \leq 0 \quad v^T g(x, y) = 0 \tag{7.5}$$

$$w \geq 0 \quad g(x, y) \leq 0 \quad w^T g(x, y) = 0 \tag{7.6}$$

Per quanto riguarda la CD-regularity abbiamo ancora un teorema analogo, ma notiamo come in questo caso non è necessaria l'ipotesi che $\theta^3 = \emptyset$ (LSCC, 2.5).

Theorem 7.3. *Sia g il vincolo lower level, indipendente dalla variabile x ovvero $g(x, z) \equiv g(z)$, e supponi che il punto $\bar{\zeta} := (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ soddisfi il sistema 3.2-3.7 per un certo $\lambda > 0$.*

Supponi che la famiglia $\{\nabla_x G_j(\bar{x}, \bar{y}) : j \in I^1\}$ sia linearmente indipendente e (LLICQ 2.2) valgano in $\bar{y}$ e $\bar{z}$. Se inoltre:

$$(d^{1,2})^T \nabla^2 \mathcal{L}^\lambda(\bar{\zeta}) d^{1,2} > \lambda (d^{1,3})^T \nabla^2 \ell^*(\bar{\zeta}) d^{1,3}$$

per ogni $d \in Q(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \setminus \{0\}$, dove

$$\nabla^2 \ell^*(\bar{\zeta}) := \begin{bmatrix} \nabla_{11}\ell(\bar{\zeta}) & \nabla_{21}\ell(\bar{\zeta}) \\ -\nabla_{21}\ell(\bar{\zeta}) & -\nabla_{12}\ell(\bar{\zeta}) \end{bmatrix}$$

Allora la funzione è CD-regolare nel punto $\bar{\zeta} := (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$.

Infine per ottenere una condizione che garantisca di essere in un punto di minimo stretto abbiamo:

Theorem 7.4. *Sia $\bar{\zeta} := (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ che soddisfa le condizioni 3.2-3.7 per qualche $\lambda > 0$, e che $S(\bar{x}) = \{\bar{y}\} = \{\bar{z}\}$, e valgano le USCC ($\theta^1 = \emptyset$) in $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u})$ e le LSCC 2.5 in $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{v})$. Supponi che il problema lower level sia convesso nel punto $\bar{x}$, ovvero che sia $f\bar{x}, z)$ che $g_i(\bar{x}, z)$ per ogni $i = 1, \dots, q$, sono convesse come funzioni di z e che le condizioni di derivabilità del teorema 7.1 valgnano per tutti i $d \in C^\lambda(\bar{x}, \bar{y})$.*

Allora $(\bar{x}, \bar{y})$ è un punto di ottimo locale stretto del problema 3.1 se vale la qualificazione dei vincoli data le condizioni upper level di indipendeza lineare (ULICQ 5.2) e per ogni $d \in C(\bar{x}, \bar{y}) \setminus \{0\}$,vale:

$$(d)^T \nabla^2 \mathcal{L}^\lambda(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v}) d > \lambda (d^{1,3})^T \nabla^2 \ell(\bar{x}, \bar{y}, \bar{w}) d^{1,3}$$

8. Sperimentazione numerica

Per la sperimentazione sono stati scelti i parametri:

$$\beta = 10^{-8}, \quad \epsilon = 10^{-8}, \quad t = 2.1, \quad \rho = 0.5, \quad \sigma = 10^{-4}$$

Ricordando che è necessario effettuare una scelta per il parametro λ, ma che non abbiamo regole spefiche per la sua scelta, sono stati provati più valori di λ per ogni esperimento:

$$\Lambda = \{2^{-1}, 2^0, \dots, 2^6, 2^7\}$$

Per la scelta dei punti iniziali invece: se vi sono esempi nella letteratura con degli starting point, (x_0, y_0) sono fissati a quegli starting points. Altrimenti sono stati scelti $(x_0, y_0) = (\mathbf{1}_n, \mathbf{1}_n)$, tranne per 3 esempi (No 20, 119, and 120) dove il valore ottimo era proprio dato da questi punti, e quindi sono stati posti $(x_0, y_0) = (-\mathbf{1}_n, -\mathbf{1}_n)$

Infine è stato posto $z_0 = y_0$ e

$$u_0 = (|G_1(x_0, y_0)|, \dots, |G_p(x_0, y_0)|)^T, \quad v_0 = (|g_1(x_0, y_0)|, \dots, |g_q(x_0, y_0)|)^T,$$

e $w_0 = v_0$.

Infine il criterio di arresto è $||\Phi^\lambda(\zeta^k)|| \leq \epsilon$, ma l'algoritmo si arresta se vengono compiute più di 2000 iterazioni.

Gli esperimenti sono stati svolti usando la BOBLIB library che contiene 124 problemi di ottimizzazione bilivello.

I risultati per ogni esperimento sono stati raccolti nella seguente tabella le cui colonne indicano:

- F_{known} indica il miglior valore noto dei valori di F. Per soli 6 esempi non vi era alcun valore precedente. Invece per ben 83 problemi è noto il valore ottimo e la clonna Status indentifica questo con la dicitura "optimal".
- F_{new} invece indica il valore ottenuto dal nostro algoritmo per i nove valori selezionati di λ.

Per poter dare una stima quantitativa della bontà dei punti trovati dall'algoritmo, confrontiamo i risultati dell'algoritmo con i valori di F_{new} definendo le quantità:

$$\delta_F := \frac{F(x, y) - F_{known}}{\max\{1, |F_{known}|\}} \qquad \delta_f := \frac{f(x, y) - f_{known}}{\max\{1, |f_{known}|\}}$$

dove f_{known} è il valore della lower level function che corrisponde a F_{known}.

Da questi due valori ricaviamo il nostro indicatore che chiameremo δ_* definito;

$$\delta_* := \begin{cases} \max\{|\delta_F|, |\delta_f|\}, & se\, Status\, e'\, optimal \\ \max\{\delta_F, \delta_f\}, & altrimenti \end{cases}$$

Notiamo come nel caso di F_{known} non ottimo, δ_* negativo indichi un miglioramento certo del valore noto sia in termini di ammisibilità del valore rispetto al problema originale che in termini di valore della funzione F.

Nella tabella 2 invece, indichiamo con K il valore dell'ultima iterazione:

- number of failures indica il numero di problemi dove l'algoritmo non ha raggiunto la condizione $||\Psi^\lambda(\zeta^K)|| \leq \epsilon$
- $\alpha_K = 1$ indica se l'ultimo è stato un full step (indicando quindi se vi è stata o meno la convergenza al valore ottimo come conseguenza del teorema ([2])
- la colonna $y^K \approx z^K$ conta il numero di problemi dove si è verificata la condizione $||y^K - z^K||/\max(1, ||z^K||)$, che quindi indica quando la soluzione del problema è vicina ad avere $y = z$ che porterebbe a un tipo diverso di equazioni.
- allo stesso modo $v^K \approx w^K$ indica come conseguenza il numero di problemi per cui i moltiplicatori presenti nell'equazione 3.6 siano simiili a quelli dell'equazione 3.7
- Average iterations è il numero medio di iterazioni necessarie alla convergenza, fissato λ
- average time, il tempo medio necessario alla risoluzione dei problemi, ancora per λ fisssato.

La tablella 3 identifca invece l'ordine sperimentale di convergenza (EOC) calcolato con la seguente formula:

$$EOC = \max\left\{\frac{\log||\Phi^\lambda(\zeta^{K-1})||}{\log||\Phi^\lambda(\zeta^{K-2})||}, \frac{\log||\Phi^\lambda(\zeta^{K})||}{\log||\Phi^\lambda(\zeta^{K-1})||}\right\}$$

References

[1] A. Fischer, A. B. Zemkoho, and S. Zhou, "Semismooth newton-type method for bilevel optimization: Global convergence and extensive numerical experiments," *Optimization Methods and Software*, vol. 37, no. 5, pp. 1770–1804, 2022. DOI: 10.1080/10556788.2021.1977810. eprint: https://doi.org/10.1080/10556788.2021.1977810 (cit. on p. 1).

[2] T. D. Luca, F. Facchinei, and C. Kanzow, "A semismooth equation approach to the solution of nonlinear complementarity problems," *Mathematical Programming*, vol. 75, pp. 407–439, 1996 (cit. on pp. 2, 8–10, 21).

[3] J. Gauvin and F. Dubeau, "Differential properties of the marginal function in mathematical programming," in Mar. 2009, pp. 101–119. DOI: 10.1007/BFb0120984 (cit. on p. 3).

[4] A. Shapiro, "Perturbation theory of nonlinear programs when the set of optimal solutions is not a singleton," *Applied Mathematics and Optimization*, vol. 18, pp. 215–229, 1988 (cit. on p. 4).

[5] L. Qi and J. Sun, "A nonsmooth version of newton's method," *Math. Program.*, vol. 58, pp. 353–367, Jan. 1993. DOI: 10.1007/BF01581275 (cit. on p. 5).

[6] J. Ye and J. Zhang, "Enhanced karush–kuhn–tucker condition and weaker constraint qualifications," *Mathematical Programming*, vol. 139, Jun. 2013. DOI: 10.1007/s10107-013-0667-7 (cit. on p. 7).

[7] S. Dempe and A. B. Zemkoho, "The generalized mangasarian-fromowitz constraint qualification and optimality conditions for bilevel programs," *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 148, pp. 46–68, 2011 (cit. on p. 8).

[8] L. Qi and H. Jiang, "Semismooth karush-kuhn-tucker equations and convergence analysis of newton and quasi-newton methods for solving these equations," *Mathematics of Operations Research*, vol. 22, no. 2, pp. 301–325, 1997 (cit. on p. 14).

[9] J. M. Borwein, "Direct theorems in semi-infinite convex programming," *Mathematical Programming*, vol. 21, pp. 301–318, 1981 (cit. on p. 18).

M.C.: Dipartimento di Matematica, Università di Pisa, 56125 Pisa, Italy
Email address: m.correddu@studenti.unipi.it