Gara di Teoria dei gruppi

28 novembre 2019

1. Fissato un primo p, sia $T(p)$ un gruppo infinito tale che ogni suo sottogruppo non banale è ciclico di ordine p.
   (a) Dite se esiste un gruppo $T(2)$.
   (b) Mostrate che, in $T(3)$, un elemento x commuta coi suoi coniugati, e deducetene che $T(3)$ non può esistere.
2. Diciamo che due gruppi G, H non ciclici di ordine primo sono isomorfi per sottogruppi se, detti S, T gli insiemi dei sottogruppi propri di G, H rispettivamente, esiste una bigezione $f : S \longrightarrow T$ tale che $K \simeq f(K)$ per ogni $K \in S$.
   (a) Mostrate che due gruppi abeliani finiti isomorfi per sottogruppi sono isomorfi.
   (b) È vera la tesi senza l'ipotesi di finitezza?
   (c) L'abelianità è preservata dall'isomorfismo per sottogruppi?
3. (a) Mostrate che un'azione transitiva di un gruppo G induce un'azione transitiva di G sugli stabilizzatori dei punti.
   (b) Dato un gruppo H, trovate un gruppo G e un'azione φ di G su un insieme X tale che
      i. φ sia transitiva e fedele;
      ii. H sia isomorfo allo stabilizzatore di un punto.
4. (a) Mostrate che, dati un'azione transitiva di un gruppo G e un sottogruppo N normale in G, la restrizione dell'azione a N ha orbite equipotenti.
   (b) Dite qual è il minimo n per cui $\mathrm{GL}(3, \mathbb{F}_2)$ si immerge in S_n.
   (c) Deducetene che è semplice.
5. (a) Mostrate che, in un p-gruppo finito P, un sottogruppo A massimale tra gli abeliani normali coincide col suo centralizzatore, cioè $A = C_P(A)$.

   Fissato un numero naturale n, diciamo che G è n-abeliano se un sottogruppo abeliano di G ha ordine al più n.

   (b) Fate vedere che l'ordine di un gruppo G finito n-abeliano divide $n!$.