Gara di Gruppi 2021, 3 dicembre

A Sia G un gruppo di ordine $11!/7! = 7920$, e supponiamo che G agisca fedelmente su un insieme di 11 elementi.

1. Se $P \in \mathrm{Syl}_{11}(G)$, trovate $|N_G(P)|$.

2. Se $N \neq 1$ è normale in G, mostrate che N è transitivo.

3. Provate che G è semplice.

B Consideriamo un gruppo finito G che possiede esattamente una classe di coniugio $\mathcal{C}$ di sottogruppi non normali.

4. Dato $H \in \mathcal{C}$, discutete le possibili classi di isomorfismo di H.

5. Supponendo che $\mathcal{C} = \mathrm{Syl}_p(G)$ per un opportuno primo p, trovate i gruppi G con la proprietà sopra.

C Per un gruppo finito G, indichiamo con $\Phi(G)$ l'intersezione dei sottogruppi massimali di G.

6. Se G è abeliano, mostrate che $\Phi(G) = 1$ se e solo se G è somma diretta di gruppi ciclici di ordine primo.

Un gruppo finito G è NC se ogni sottogruppo normale $N < G$ diverso da 1 ammette un complemento, cioè un sottogruppo proprio $H \lneq G$ tale che $NH = G$.

7. Al variare di G tra i gruppi NC, dite che gruppo può essere $Z(G)$, a meno di isomorfismo.

D Siano P, Q due p-Sylow di un gruppo G finito, e sia $K < P \cap Q$ un sottogruppo normale in entrambi P, Q.

8. Mostrate che, per ogni $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$, esiste $x \in N_G(K)$ tale che $P \cap Q \supset S^x \cap Q$.

Poniamo $O_p(G) = \bigcap \mathrm{Syl}_p(G)$ l'intersezione dei p-Sylow di G.

9. Supponiamo che G abbia un p-Sylow abeliano. Provate che esistono due p-Sylow P, Q di G tali che $P \cap Q = O_p(G)$.

10. Sia G un gruppo semplice tale che $n_p(G) < p^2$. Mostrate che i p-Sylow di G sono ciclici.

E Diciamo che un gruppo X è quasiciclico se, comunque presi due sottogruppi $H, K < X$, vale $H < K$ o $K < H$.

11. Provate che esiste un gruppo $\overline{X}$ tale che i suoi p-sottogruppi, al variare di p, sono tutti e soli i gruppi quasiciclici.

Sia G un p-gruppo tale che, per ogni n, tutti i suoi sottogruppi di ordine p^n sono coniugati.

12. Dimostrate che, se G' è finito o $Z(G)$ è infinito, G è quasiciclico.