

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PISA



FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Alcuni risultati sui mapping class groups di superfici

16 luglio 2010

TESI DI LAUREA TRIENNALE

Candidato

Antonio De Capua

decapua@mail.dm.unipi.it

Relatore

Dott. Roberto Frigerio

Università di Pisa

ANNO ACCADEMICO 2009/2010

Introduzione

Il *mapping class group* di una superficie è oggetto di studio di diverse aree della geometria, come la geometria algebrica, la teoria delle superfici di Riemann e la topologia della dimensione bassa.

Precisiamo innanzitutto cos'è una superficie: per noi sarà una 2-varietà connessa, orientabile, con (eventuale) bordo compatto e gruppo fondamentale finitamente generato.

Per comunicare l'importanza del *mapping class group*, diamo un esempio. Data una superficie S , a partire dal prodotto $S \times [0, 1]$ si può costruire una 3-varietà orientabile identificando $S \times \{0\}$ e $S \times \{1\}$ in qualche modo: cioè, fissando un omeomorfismo di S che ne preservi l'orientazione, ed identificando le coppie di punti che si corrispondono tramite questo omeomorfismo. È chiaro che, al variare dell'omeomorfismo, si ottengono varietà differenti; ma d'altra parte se si prendono due omeomorfismi di S che si ottengono l'uno dall'altro "deformando" l'applicazione (in modo che, durante la deformazione, questa resti un omeomorfismo), si ottengono varietà omeomorfe. Cioè le varietà che si ottengono sono in bigezione non con il gruppo degli omeomorfismi, ma con loro opportune classi di equivalenza, dette di *isotopia*. Il *mapping class group* è il gruppo costituito da tali classi.

In questa tesi dimostriamo due fatti principali relativi ai *mapping class groups*: il primo è che esiste un isomorfismo naturale tra il *mapping class group* di una superficie chiusa S (generalizzato agli omeomorfismi che ne scambiano l'orientazione) e il gruppo degli automorfismi esterni di $\pi_1(S)$.

Per enunciare il secondo teorema bisogna brevemente descrivere cos'è un *Dehn twist*: sia T l'omeomorfismo di $S^1 \times [0, 1]$ che ruota di $2\pi t$ la circonferenza $S^1 \times \{t\}$ (si noti che tale omeomorfismo si restringe all'identità su $S^1 \times \{0, 1\}$).

Preso una curva omotopicamente non banale su una superficie S , il *Dehn twist* attorno ad essa è (la classe di isotopia del) l'applicazione che, su un intorno tubolare di tale curva, si comporta come T , mentre fissa gli altri punti di S .

Il secondo teorema di cui parleremo afferma che, componendo *Dehn twists*, si ottiene qualunque classe di isotopia di omeomorfismi di una superficie chiusa (e, per una superficie generica, in questo modo si ottiene un sottogruppo "grande" del *mapping class group*).

È interessante come, per dimostrare tali due teoremi, si ricorra ad una grande varietà di argomentazioni: oltre a dimostrazioni di topologia pura e di carattere piuttosto "visuale", sfrutteremo talvolta la geometria iperbolica, quella differenziale, la teoria geometrica dei gruppi, le successioni esatte della topologia algebrica. Una parte non trascurabile di questa tesi è volta proprio a descrivere alcuni di questi strumenti.

Antonio De Capua
Pisa, luglio 2010

Indice

Introduzione	1
1 Superfici	5
1.1 Fatti generali	5
1.2 Il piano iperbolico	6
1.3 Strutture iperboliche su superfici	7
1.4 Curve ed archi su superfici: definizioni	9
1.5 Rappresentanti geodetici di curve	12
1.6 Il concetto di isotopia	14
1.7 Il principio di cambio delle coordinate	15
2 Teorema di Dehn-Nielsen-Baer, I parte	17
2.1 I mapping class groups ed il teorema di Dehn-Nielsen-Baer	17
2.2 Il metodo di Alexander	18
2.3 Il mapping class group del toro	22
3 Teorema di Dehn-Nielsen-Baer, II parte	25
3.1 Quasi-isometrie	25
3.2 Catene di curve	29
3.3 Conclusione	32
4 Dehn twists	35
4.1 Definizione di Dehn twist	35
4.2 Motivazione	36
4.3 Proprietà dei Dehn twists	37
4.4 La mappa di spinta di un punto	41
5 Generatori del mapping class group	43
5.1 Prodotti fibrati	43
5.2 La successione esatta di Birman	45
5.3 Il complesso delle curve	46
5.4 Passaggio da una componente di bordo ad una puntura	48
5.5 Dimostrazione del teorema di Dehn	50
5.6 Generatori espliciti per $MCG(\Sigma_g)$	52
5.7 Caso generale: come si genera tutto il mapping class group	52
Bibliografia	55

Capitolo 1

Superfici

In questo capitolo raccogliamo la maggior parte dei risultati preliminari che interverranno nello sviluppo della tesi. I risultati di geometria iperbolica provengono principalmente da [3] e [4]; quelli di carattere prevalentemente topologico da [1].

1.1 Fatti generali

Quando parliamo di *superfici*, intendiamo delle 2-varietà topologiche connesse, orientate, con un eventuale bordo compatto, e di *tipo finito*, ovvero con gruppo fondamentale finitamente generato. Una superficie è detta *chiusa* se è compatta e senza bordo. Vale il seguente:

Teorema 1.1.1 (Classificazione delle superfici).

- Ogni superficie chiusa è omeomorfa alla somma connessa di S^2 con $g \geq 0$ tori.
- Ogni superficie compatta si ottiene da una superficie chiusa rimuovendo $b \geq 0$ dischi aperti.
- Ogni superficie si ottiene da una superficie compatta rimuovendo $p \geq 0$ punti (detti punture) dal suo interno.

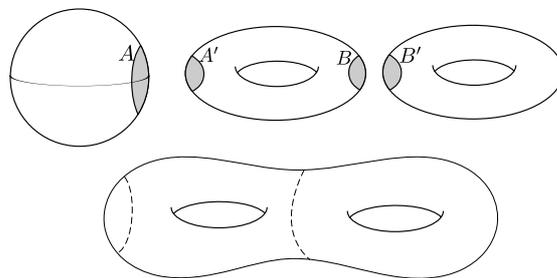


Figura 1.1: La superficie di genere 2 ottenuta come somma connessa di S^2 con due tori. I dischi aperti A, A' vengono eliminati ed i loro bordi identificati; e così per i dischi B, B' .

1. SUPERFICI

Nel primo punto, quando $g > 0$, inserire la sfera S^2 nella somma connessa è, in realtà, superfluo.

Se S è una superficie come sopra, vale la formula $\chi(S) = 2(1 - g) - (b + p)$; insieme al teorema, questa formula permette di dire che una superficie è univocamente determinata da tre fra i numeri $\chi(S), g, b, p$. Denoteremo con Σ_g la superficie chiusa di genere g (per il teorema di classificazione, essa è unica a meno di omeomorfismi).

Le superfici con $\chi(S) > 0$ sono soltanto la sfera e la sfera con una componente di bordo o puntura (ovvero il disco o il piano); con $\chi(S) = 0$ sono la sfera con due fra punture e componenti di bordo (i vari tipi di anello) e il toro.

OSSERVAZIONE 1.1.2. Quando si parla di punture, talvolta (per esempio quando si ha bisogno di utilizzare loro intorno) è più rigoroso considerarle come punti marcati su una superficie compatta, piuttosto che come punti “tolti” alla superficie. Chiaramente in tal caso qualunque applicazione tra superfici con punture dovrà portare le punture della prima in punture della seconda, in modo che, se si passa all’altro punto di vista rimuovendole dalle superfici, l’applicazione continui ad avere senso. \diamond

1.2 Il piano iperbolico

Il *piano iperbolico* \mathbb{H}^2 si può visualizzare come il disco $B(0, 1) \subset \mathbb{C}$, su cui poniamo la metrica

$$ds_z = 2 \frac{d\tilde{s}_z}{1 - |z|^2}$$

dove $d\tilde{s}$ denota la metrica euclidea standard (questo è detto modello del *disco di Poincaré*). Con tale metrica, esso risulta una 2-varietà riemanniana completa di curvatura sezionale costante -1 . Ad esso si aggiunge un bordo $\partial\mathbb{H}^2$, che non è altro che il bordo del disco unitario in \mathbb{C} . L’insieme $\overline{\mathbb{H}^2} := \mathbb{H}^2 \cup \partial\mathbb{H}^2$ è munito della stessa topologia del disco chiuso.

Osserviamo che, essendo in ogni punto la metrica iperbolica un multiplo di quella euclidea, nelle due metriche gli angoli sono uguali, dunque le mappe conformi della superficie in sé sono le stesse; i diffeomorfismi conformi, inoltre, coincidono con le isometrie di \mathbb{H}^2 . Denoteremo con $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$ il gruppo delle isometrie del piano iperbolico in sé, e con $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ il sottogruppo delle isometrie che ne preservano l’orientazione.

Poiché \mathbb{H}^2 è uno spazio metrico completo, vale il teorema di Hopf-Rinow, dunque ogni geodetica su di esso può essere estesa a tutto \mathbb{R} . Tali geodetiche estese risultano essere gli archi di circonferenze (euclidee) perpendicolari a $\partial\mathbb{H}^2$ (in \mathbb{C}), le quali, nella metrica iperbolica, hanno lunghezza infinita. Si può vedere che qualunque isometria $\phi \in \text{Isom}(\mathbb{H}^2)$ si estende per continuità ad un omeomorfismo di $\overline{\mathbb{H}^2}$.

Esiste un altro modello per il piano iperbolico, dato da $\Pi := \{\Im z > 0\} \subset \mathbb{C}$. In tale modello,

$$ds_z = \frac{d\tilde{s}_z}{\Im z}.$$

L’identificazione dei due modelli $B(0, 1)$ e Π induce un’identificazione naturale tra $\partial B(0, 1)$ e $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, che quindi è anch’esso un modello di $\partial\mathbb{H}^2$. Anche nel modello del semipiano, le isometrie coincidono con i diffeomorfismi conformi di Π in sé; le geodetiche (definite su tutto \mathbb{R}) risultano essere le semirette verticali e le semicirconferenze (euclidee) centrate in un punto di \mathbb{R} .

Una $\phi \in \text{Isom}^+(\mathbb{H}^2) \setminus \{id\}$ si comporta sempre in uno ed uno solo di questi tre modi:

1.3 Strutture iperboliche su superfici

- fissa esattamente un punto di \mathbb{H}^2 (e nessuno del bordo): in questo caso si dice *ellittica* e si può visualizzare come una rotazione (secondo la metrica iperbolica) attorno al punto fisso;
- fissa esattamente un punto di $\partial\mathbb{H}^2$ (e nessuno di \mathbb{H}^2): in questo caso si dice *parabolica* e, nel modello del semipiano, si può visualizzare come una traslazione (che fissa il punto $\infty \in \partial\mathbb{H}^2$: una tale schematizzazione è vera a meno di un coniugio per sostituire il punto fisso con ∞).
- fissa esattamente due punti di $\partial\mathbb{H}^2$ (e nessuno di \mathbb{H}^2): in questo caso si dice *iperbolica* ed è caratterizzata dall'esistenza di una geodetica invariante, quella che congiunge i due punti fissi, che viene detta *asse*. Una tale isometria si comporta come una sorta di traslazione lungo tale geodetica; se reiterata, uno dei due punti fissi si comporta da punto attrattivo, l'altro da punto repulsivo.

1.3 Strutture iperboliche su superfici

Definizione 1.3.1. Una *struttura iperbolica* su una superficie S è un atlante di carte $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{H}^2$, tali che i cambi carta siano restrizioni di isometrie di \mathbb{H}^2 . Una superficie riemanniana è dotata di una struttura iperbolica se è localmente isometrica a \mathbb{H}^2 .

Proposizione 1.3.2. Ogni superficie chiusa di genere $g \geq 2$ ammette una struttura iperbolica.

Dim. In \mathbb{H}^2 esiste un $4g$ -gono geodetico regolare tale che gli angoli interni misurino $2\pi/4g$ ciascuno: infatti, nel modello del disco, si può vedere che un $4g$ -gono regolare centrato nell'origine, se molto grande, ha angoli interni prossimi a zero, mentre se molto piccolo ha angoli interni maggiori di $2\pi/4g$, perché la metrica viene "approssimata" da quella euclidea. Esisterà allora, per continuità, un $4g$ -gono come cercato.

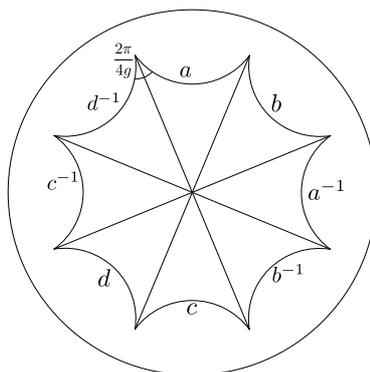


Figura 1.2: L'ottagono regolare geodetico di \mathbb{H}^2 e le identificazioni dei lati da attuare per ottenere la superficie chiusa di genere 2.

Ricordiamo che la superficie chiusa di genere g può essere vista come quoziente di un $4g$ -gono di cui vengono attaccati i lati secondo un'opportuna parola di incollamento. Una volta portata al quoziente la metrica del poligono sopra costruito, si può verificare che si è ottenuta una struttura iperbolica sulla superficie. Osserviamo in particolare che

1. SUPERFICI

l'incollamento dei lati fa sì che attorno ai vertici identificati del $4g$ -gono si formi un angolo di 2π . □

OSSERVAZIONE 1.3.3. Per il teorema di Gauss-Bonnet, la sfera e il toro non possono ammettere una struttura iperbolica, in quanto $\chi(\Sigma_0) = 2$, $\chi(\Sigma_1) = 0$, mentre una superficie iperbolica ha ovunque curvatura sezionale pari a -1 .

Le superfici con $\chi(S) < 0$, d'altra parte, ammettono sempre una struttura iperbolica. Tralasciando il caso delle superfici con punture, per quelle compatte con bordo ciò si verifica nel seguente modo: attaccando fra loro più copie della superficie lungo le componenti di bordo in modo da ottenere una superficie chiusa, quest'ultima avrà genere > 1 per la formula prima descritta che correla χ, g, b, p ; dunque, per il teorema precedente, ammetterà una struttura iperbolica. La superficie originaria erediterà quindi una struttura iperbolica "con bordo". ◇

OSSERVAZIONE 1.3.4. Si può dimostrare che l'unica superficie iperbolica completa e semplicemente connessa è proprio \mathbb{H}^2 ; ma allora, \mathbb{H}^2 è il rivestimento universale (metrico) di ogni superficie chiusa Σ_g per $g \geq 2$. Allora $\Sigma_g \cong \mathbb{H}^2/\Gamma$, dove $\pi_1(\Sigma_g) \cong \Gamma < \text{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ (le isometrie in Γ preservano l'orientazione, in modo da avere un quoziente orientato; l'isomorfismo con il gruppo fondamentale non è canonico).

Se $g \in \Gamma, z \in \mathbb{H}^2$, denoteremo equivalentemente $g(z) = g \cdot z$ (nel secondo caso, vogliamo dare più enfasi al fatto che si tratta di un'azione di Γ su \mathbb{H}^2).

Poiché il quoziente per tale azione è compatto e l'azione di Γ è propriamente discontinua, esisterà un $\varepsilon > 0$ tale che $d(z, g(z)) > \varepsilon$ per ogni $z \in \mathbb{H}^2, g \in \Gamma$. Ciò implica che gli elementi non banali di Γ sono tutte isometrie iperboliche: infatti un'isometria ellittica ha un punto fisso in \mathbb{H}^2 ; una parabolica, come già detto, si può vedere come una traslazione in orizzontale nel modello del semipiano. Ma osserviamo che, se si trasla di una quantità $b \in \mathbb{R}$, $d(z, z + b) = O(b/\Im z)$ per $\Im z \rightarrow +\infty$, dunque è violata la condizione $d(z, g(z)) > \varepsilon$. ◇

D'ora in poi, parlando di superfici chiuse $\Sigma_g \cong \mathbb{H}^2/\Gamma$, sottintenderemo spesso di aver fissato un punto base $x_0 \in \Sigma_g$, ed un $\tilde{x}_0 \in \mathbb{H}^2$ appartenente alla fibra di x_0 . Se $\alpha \in \pi_1(\Sigma_g, x_0)$, denoteremo $\Delta_\alpha \in \Gamma$ l'isometria iperbolica di \mathbb{H}^2 ad esso associata dalla monodromia basata nel punto \tilde{x}_0 ; $Ax(\alpha)$ denoterà l'asse di tale isometria.

Definizione 1.3.5. Due geodetiche distinte complete γ, δ in \mathbb{H}^2 sono *linkate all'infinito* se hanno un punto di intersezione in \mathbb{H}^2 ; o, equivalentemente, se in $\partial\mathbb{H}^2$ i punti estremi di una sono separati dai punti estremi dell'altra. In simboli scriveremo che γ e δ sono linkate con $\gamma \sim \delta$.

Per la descrizione esplicita delle geodetiche a nostra disposizione, due di esse non possono mai avere più di un punto di intersezione in $\overline{\mathbb{H}^2}$. Inoltre, a partire dall'ipotesi che Γ agisca in modo propriamente discontinuo su \mathbb{H}^2 , si dimostra il seguente risultato:

Proposizione 1.3.6. Siano $\alpha, \beta \in \pi_1(\Sigma_g, x_0)$. Allora, se $Ax(\alpha) \neq Ax(\beta)$, i due assi non hanno un punto all'infinito in comune. Dunque se non sono linkati all'infinito, sono disgiunti in $\overline{\mathbb{H}^2}$.

Nel seguito ci sarà utile anche la seguente identità, facile da verificare:

Proposizione 1.3.7. Se $\alpha, \beta \in \pi_1(\Sigma_g, x_0)$, allora $\Delta_\beta(Ax(\alpha)) = Ax(\beta\alpha\beta^{-1})$.

1.4 Curve ed archi su superfici: definizioni

Per *curve* su una superficie S sottintendiamo curve chiuse. Nel caso di superfici con bordo non vuoto e/o punture, chiameremo *arco (proprio)* un cammino i cui estremi si trovano sul bordo o su punture (che possiamo considerare dei “punti marcati”).

Per i nostri scopi, considereremo quasi sempre le curve e gli archi (e le geodetiche!) dotati di un’orientazione (“verso di percorrenza”) e (nel caso delle curve chiuse) distingueremo quante volte intendiamo percorso il loro supporto geometrico. Non scenderemo in ulteriori dettagli sulla loro parametrizzazione.

Nel seguito, quando parliamo di omotopia tra due curve chiuse, intendiamo che ad ogni passo intermedio dell’omotopia la curva resti chiusa, e che l’omotopia sia *libera*, ossia non distingue alcun punto base che debba restare fissato (salvo esplicita indicazione). Un’omotopia di archi è sottoposta al vincolo che gli estremi degli archi possono muoversi solo sulle componenti di bordo su cui si trovano inizialmente (se si trovano su punture, restano fissi). Una tale omotopia è *relativa al bordo* se gli estremi restano fissati durante l’omotopia; *libera* altrimenti. Una curva è *essenziale* se non è omotopicamente banale, né è omotopa ad una puntura (cioè, borda un disco con un’unica puntura) o ad una componente di bordo.

Se γ è una curva/un arco o una classe di omotopia libera, con γ^{-1} denoteremo rispettivamente la curva/l’arco percorso nel senso opposto, o la relativa classe di omotopia libera (analogamente a quanto si fa per gli elementi del π_1 ; e così, talvolta parleremo più in generale di “potenze” di una curva chiusa).

Proposizione 1.4.1. *Le classi di omotopia libera di curve sono in bigezione naturale con le classi di coniugio di $\pi_1(S, x_0)$, per ogni scelta del punto base x_0 .*

Dim. (traccia) Poiché ogni curva su S è liberamente omotopa ad una passante per x_0 , ci basterà dimostrare che due elementi del π_1 sono coniugati se e soltanto se corrispondono a curve liberamente omotope.

Se α e $\beta = \gamma\alpha\gamma^{-1}$ sono coniugati, allora le curve $\alpha\gamma$ e $\gamma\alpha$ sono liberamente omotope: se si precompona la parametrizzazione di una con una rotazione di un angolo π della S^1 da cui si parametrizza, si ottiene l’altra; ma una rotazione è omotopa all’identità di S^1 .

D’altra parte, se due curve chiuse α e β liberamente omotope passano per x_0 , si vede facilmente che α è omotopa al concatenamento $\gamma*\beta*\gamma^{-1}$ per un’opportuna curva chiusa γ . \square

Definizione 1.4.2. Siano a, b classi di omotopia di curve o archi propri su S (in quest’ultimo caso, possiamo star parlando sia di omotopia libera che relativa al bordo). Il *numero di intersezione geometrico* $i(a, b)$ è il minimo numero di intersezioni tra le curve/gli archi α e β al variare di $\alpha \in a, \beta \in b$.

Due rappresentanti α e β sono in *posizione minimale* se realizzano tale minimo.

Per qualunque coppia di classi di omotopia, esistono dei rispettivi rappresentanti che si intersecano *trasversalmente*, e dunque, per compattezza, in un numero finito di punti. Dunque $i(a, b)$ è sempre finito.

Definizione 1.4.3. Il *numero di intersezione algebrico* $\hat{i}(a, b)$ conta le intersezioni con segno tra due qualunque rappresentanti delle due classi di omotopia; il segno è dato dalla coincidenza o meno dell’orientazione dell’intersezione con quella di S .

1. SUPERFICI

Sfruttando la dualità di Poincaré, tale conteggio si riconduce al prodotto cup su $H^1(S, \partial S)$. Essendo dunque un invariante sulle classi di omologia relativa, lo è su quelle di omotopia libera: dunque \hat{i} è ben definito.

Ci interesserà talvolta sollevare le curve di una superficie sul suo rivestimento universale: oltre al sollevamento usuale, con *sollevamento completo* intenderemo la concatenazione di tutti i sollevamenti di una curva chiusa a partire da un punto della fibra di un punto iniziale fissato sulla curva.

OSSERVAZIONE 1.4.4. Una curva chiusa (parametrizzata con periodo minimo; per semplicità supponiamo anche che le eventuali autointersezioni avvengano trasversalmente) su una superficie S che ammette una struttura iperbolica è semplice se e solo se i suoi sollevamenti completi sono a due a due disgiunti. Infatti un'intersezione fra due sollevamenti si proietta su un'autointersezione della curva; viceversa, un'autointersezione si solleva ad un'intersezione tra due sollevamenti distinti della curva, che si prolungano a due sollevamenti completi distinti.

I sollevamenti completi di una geodetica chiusa γ di Σ_g sono geodetiche complete di \mathbb{H}^2 ; inoltre, se $\alpha \in \pi_1(\Sigma_g, x_0)$ è unac classe di curve liberamente omotope a γ , allora un sollevamento completo di γ è proprio $Ax(\alpha)$, che è l'unica geodetica fissata da Δ_α . Per le proposizioni 1.3.7 e 1.4.1, poiché γ corrisponde alla classe di coniugio di α nel π_1 , gli altri sollevamenti di γ saranno i vari $Ax(\beta\alpha\beta^{-1}) = \Delta_\beta(Ax(\alpha))$.

Nel caso di geodetiche chiuse su S parametrizzate con periodo minimo, allora, si ha che una tale geodetica è semplice se e soltanto se nessuna coppia di tali assi è linkata all'infinito. \diamond

Definizione 1.4.5. Un *bigono* tra due curve chiuse su una superficie è un disco chiuso topologico bordato da due archi, appartenenti rispettivamente a ciascuna delle due curve.

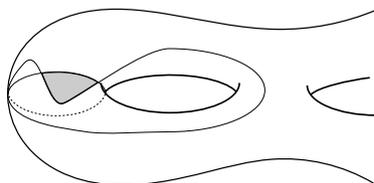


Figura 1.3: Un bigono.

Lemma 1.4.6. Sia S una superficie; supponiamo $S \neq \Sigma_0$, e dunque che S sia rivestita (in senso soltanto topologico) da \mathbb{R}^2 o da un suo chiuso liscio semplicemente connesso. Se due curve semplici chiuse α, β su S che si intersecano trasversalmente non formano bigoni, allora qualunque coppia di loro sollevamenti completi $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$, si intersecano in al più un punto.

Dim. Sia $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ (o $p : C \rightarrow S$ con $C \subseteq \mathbb{R}^2$) l'applicazione di rivestimento, e sia $\Gamma < \text{Omeo}^+(\mathbb{R}^2)$ tale che $\mathbb{R}^2/\Gamma \cong S$.

Supponiamo per assurdo che esistano sollevamenti completi $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ che si intersecano in almeno due punti. Data la trasversalità tra α e β , $p^{-1}(\alpha) \cap p^{-1}(\beta)$ è un insieme discreto.

È allora possibile scegliere un disco D bordato da tratti di $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$, tale che il suo interno non intersechi $p^{-1}(\alpha \cup \beta)$; e possiamo richiedere inoltre che tale disco sia un

bigono fra le due curve: supponiamo per assurdo che nessun bigono soddisfi questa proprietà. Almeno un bigono, tuttavia, dovrà esistere: lo si trova facilmente a partire da due punti di intersezione consecutivi su una delle due curve. Poiché un sollevamento completo di α o di β non può autointersecarsi né intersecare altri sollevamenti completi della stessa curva, ogni volta che un sollevamento completo di β interseca il bigono, “entra” ed “esce” da punti di $p^{-1}(\alpha)$, e viceversa. Allora nel bigono ci sarà un altro bigono, e così via. Tale costruzione infinita viola la discretezza dell’insieme $p^{-1}(\alpha) \cap p^{-1}(\beta)$.

Siano q_1, q_2 i vertici di tale bigono, $\tilde{\alpha}'$ e $\tilde{\beta}'$ i segmenti di $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ tra essi compresi. Vogliamo dimostrare che $p|_D$ è un omeomorfismo con l’immagine, dunque D si proietta su un bigono tra α e β .

Si ha $p(q_1) \neq p(q_2)$ perché sono due punti di intersezione con orientazioni opposte. Un punto di $\tilde{\alpha}'$ e uno di $\tilde{\beta}'$ non si identificano al quoziente, altrimenti sarebbero entrambi punti di intersezione tra $p^{-1}(\alpha)$ e $p^{-1}(\beta)$ e dunque all’interno di D vi sarebbero punti appartenenti a $p^{-1}(\alpha \cup \beta)$. Né si possono identificare due punti distinti di $\tilde{\alpha}'$, altrimenti, essendo α semplice, tra tali due punti c’è un intero sollevamento di α , e dunque anche dei suoi punti di intersezione con β : si ha ancora la stessa contraddizione.

Allora $p|_{\partial D}$ è un omeomorfismo con l’immagine. Se esistesse $\phi \in \Gamma$, $\phi \neq id$, tale che $\phi(D) \cap D \neq \emptyset$, dovrebbe aversi $\phi(\partial D) \cap D = \emptyset$, altrimenti rimane la contraddizione che l’interno di D interseca $p^{-1}(\alpha \cup \beta)$. Dunque $\phi(D) \subseteq D$ o $\phi(D) \supseteq D$; supponiamo la prima delle due. Allora, per il teorema del punto fisso di Brouwer, ϕ fissa un punto interno di D ; ma $\phi \neq id$ è un omeomorfismo di rivestimento, assurdo. Dunque $p|_D$ è un omeomorfismo con l’immagine. \square

Proposizione 1.4.7. *Due curve chiuse semplici α e β su una superficie $S \neq \Sigma_0$, che si intersecano trasversalmente, sono in posizione minimale se e solo se non formano bigoni.*

Dim. È chiaro che, se c’è un bigono tra α e β , tramite omotopie si può ridurre il numero di intersezioni fra le due curve. Supponiamo per assurdo che α e β non formino bigoni, ma che si possa ridurre il numero di intersezione fra di esse modificando α e β tramite omotopie. Ciò dovrà essere possibile, allora, anche modificando una sola (opportuna) fra α e β .

Possiamo supporre allora che esiste un’omotopia $H : S^1 \times I \rightarrow S$ tale che $H(\cdot, 0) = \alpha$, e che riduce il numero di intersezione geometrico.

Usiamo un’ipotesi tecnica: che S sia munita di una struttura differenziabile (che è sempre possibile porre) e che l’isotopia $H : S^1 \times I \rightarrow S$ tra γ e γ' sia trasversale a S , cosicché, per il teorema delle funzioni implicite, siamo sicuri che la preimmagine di β su $S^1 \times I$ tramite H sia una 1-varietà (si può sempre supporre che ciò sia vero).

Le componenti connesse di tale varietà sono di 5 tipi possibili, esemplificati in figura 2.3. Dovendosi ridurre il numero di intersezione durante l’omotopia, sicuramente esisterà almeno una componente di tipo 1, che chiamiamo δ ; sia δ' il tratto di $S^1 \times \{0\}$ che ha gli stessi estremi di δ , e tale che δ, δ' insieme bordano un disco D .

Allora $H(\delta \cup \delta') \subset \alpha \cup \beta$ è una curva omotopicamente banale, il che vuol dire che si può sollevare ad una curva chiusa in \mathbb{R}^2 . Questo, però, significa che esistono due sollevamenti completi di α e β che si intersecano due volte, il che contraddice il lemma precedente. \square

L’ipotesi tecnica $S \neq \Sigma_0$ non è restrittiva, in quanto sulla sfera tutte le curve sono omotopicamente banali.

1.5 Rappresentanti geodetici di curve

Se su S è possibile porre una struttura iperbolica, ogni classe di omotopia di curve chiuse possiede un rappresentante privilegiato sotto svariati aspetti:

Proposizione 1.5.1. *Sia S una superficie dotata di una struttura iperbolica. Per ogni curva chiusa essenziale α in S , esistono un'unica geodetica periodica orientata λ ed un unico $p \in \mathbb{N}^+$ tali che α è liberamente omotopa a λ_p , ovvero la parametrizzazione di λ che percorre p volte il suo periodo minimo. Se α è semplice, $p = 1$, e λ_1 è semplice.*

Dim. (per $S = \Sigma_g$) Proponiamo qui una dimostrazione tratta da [4], completata con quella di [6].

Fissiamo dei punti base $x_0 \in S$, $\tilde{x}_0 \in \mathbb{H}^2$ appartenente alla fibra di x_0 nell'applicazione di rivestimento. Possiamo deformare α ad una curva chiusa $\hat{\alpha}$ basata in x_0 (in un modo *non* canonico); chiameremo $[\alpha]$ l'elemento di $\pi_1(\Sigma_g, x_0)$ che rappresenta questa nuova curva. Sia $\hat{\alpha}'$ il sollevamento completo di $\hat{\alpha}$ in \mathbb{H}^2 a partire dal punto \tilde{x}_0 , e sia α' il sollevamento completo di α che si ottiene a partire da $\hat{\alpha}'$ sollevando su \mathbb{H}^2 l'omotopia tra $\hat{\alpha}$ ed α . Osserviamo che, per costruzione, α' è fissata da Δ_α (per semplicità di notazione, abbiamo evitato le parentesi quadre).

Siano $x \in \alpha'$ e $y \in Ax(\alpha)$; e sia γ un cammino che connette questi due punti. Allora i quattro lati $\gamma, \Delta_\alpha(\gamma)$, e porzioni di α' e $Ax(\alpha)$ bordano un rettangolo singolare di cui, al quoziente su S , due lati si identificano. Tale rettangolo singolare dà l'omotopia tra α e la geodetica su S ottenuta proiettando $Ax(\alpha)$, che sarà periodica.

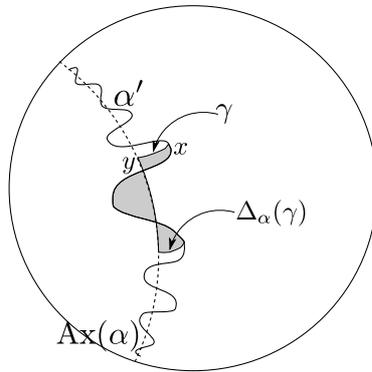


Figura 1.4: La situazione descritta nella dimostrazione. In grigio il rettangolo singolare che fornisce l'omotopia.

Per quanto riguarda l'unicità, osserviamo che applicando ripetutamente Δ_α al rettangolo singolare trovato precedentemente, si ottengono delle sue copie isometriche concatenate, bordate nel complesso da $Ax(\alpha)$ e da α' . Ma allora la distanza iperbolica fra queste curve è limitata, e ciò significa che, nel modello del disco, α' tende ai punti all'infinito di $Ax(\alpha)$. Se α fosse una geodetica diversa dalla proiezione di $Ax(\alpha)$, α' e $Ax(\alpha)$ sarebbero due geodetiche distinte in \mathbb{H}^2 con gli stessi punti estremi, e questo è impossibile.

Supponiamo ora che α sia semplice, e supponiamo per assurdo che la geodetica trovata con questo procedimento sia una λ_p con $p > 1$. Se la geodetica viene percorsa p volte, vuol dire che $\Delta_\alpha = \Delta_b^p$ (ovvero in Γ esiste un'isometria il cui asse è sempre

1.5 Rappresentanti geodetici di curve

$Ax(\alpha)$, ma “lo suddivide in pezzi più corti” tramite i Δ_b -iterati di un certo punto fissato), o equivalentemente $[\alpha] = b^p$. Siano H_1, H_2 le componenti connesse di $\overline{\mathbb{H}^2} \setminus \overline{\alpha'}$.

Osserviamo che $\Delta_b(\alpha') \neq \alpha'$, altrimenti anche α è una curva “percorsa p volte”, in quanto un suo sollevamento (standard) è il tratto di α' tra x e $\Delta_b^p(x)$, il quale si suddividerebbe in p tratti che si proiettano sulla stessa curva. Inoltre $\Delta_b(\alpha') \cap \alpha' = \emptyset$, altrimenti, passando al quoziente, si troverebbero dei punti di autointersezione per α . Allora $\Delta_b(\alpha')$ è tutto contenuto in una delle due componenti connesse di sopra, diciamo H_1 . Per il comportamento delle isometrie iperboliche, $\Delta_b(H_1) \subseteq H_1$. Reiterando, allora, $\Delta_\alpha(\alpha') = \Delta_b^p(\alpha') \subset H_1$, cioè α' non è mandato in sé da Δ_α , assurdo.

Sempre per α semplice, supponiamo invece che la geodetica trovata si autointersechi. Ciò significa che ci sono due suoi sollevamenti completi, che chiamiamo γ, δ , linkati all'infinito (infatti un intorno di uno dei punti di autointersezione della geodetica si solleva ad intorni in cui due suoi sollevamenti si intersecano: e se due geodetiche in \mathbb{H}^2 si intersecano, sono linkate). Esisteranno elementi di Γ che mandano $Ax(\alpha)$ in γ e δ rispettivamente, e così facendo portano α' in due sollevamenti completi di α i cui estremi su $\partial\mathbb{H}^2$ sono gli stessi di γ e δ rispettivamente: ma allora, questi due sollevamenti si intersecano. Un intorno di un punto di intersezione, passato al quoziente, diventerà un intorno di un punto di autointersezione di α , assurdo. \square

Sul toro munito di una metrica piatta, si può dimostrare che un rappresentante geodetico esiste comunque, e con le stesse proprietà; tuttavia, è tutt'altro che unico.

OSSERVAZIONE 1.5.2. La dimostrazione precedente si adatta facilmente ad una superficie S compatta con bordo con la struttura iperbolica precedentemente descritta, la quale può essere perfezionata in modo che le componenti di bordo siano geodetiche (lo vedremo nella prossima sezione). Invece, per superfici con punture, la situazione si complica (nel gruppo che si fa agire su \mathbb{H}^2 compaiono anche isometrie paraboliche).

Tuttavia, nel seguito, di questo teorema non ci interesserà tanto la geodeticità del rappresentante di una classe di omotopia trovata, quanto piuttosto le sue proprietà di “canonicità” che sono di carattere soltanto topologico. Quindi si può ricorrere allo stratagemma di sostituire tutte le punture con componenti di bordo (idealmente, di togliere piccoli intorni aperti e contraibili delle punture, viste non come punti tolti alla superficie ma come punti marcati): ciò non altererà le classi di isotopia delle curve sulla superficie e ci consentirà di sfruttare comunque questo risultato. \diamond

OSSERVAZIONE 1.5.3. Il rappresentante geodetico di una classe di omotopia di curve chiuse, oltre ad avere i pregi di essere canonico e di essere semplice se nella classe ci sono curve semplici, ha un'altra importante proprietà: comunque prese due classi di omotopia distinte di curve semplici chiuse, le rispettive geodetiche rappresentanti sono in posizione minimale.

Infatti se formassero un bigono (vedi proposizione 1.4.7), questo, essendo semplicemente connesso, si solleverebbe ad un bigono fra due geodetiche di \mathbb{H}^2 , che non può esistere per la descrizione esplicita delle geodetiche. Questa proprietà, inoltre, fa sì che per un insieme arbitrario di classi di omotopia di curve chiuse, esiste un sistema di rappresentanti che siano due a due in posizione minimale. \diamond

1.6 Il concetto di isotopia

In questo lavoro ci interesserà spesso una variante del concetto di omotopia (con I denotiamo l'intervallo $[0, 1]$):

Definizione 1.6.1. $F : X \times I \rightarrow Y$ è un'isotopia (di superfici, curve... secondo cos'è X) se è una funzione continua tale che $F_t : X \rightarrow Y$ definita da $F_t = F(\cdot, t)$ sia un omeomorfismo con l'immagine per ogni $t \in I$.

Chiameremo isotopia di X un'isotopia $F : X \times I \rightarrow X$, tale che $F_0 = id_X$ e F_t è surgettiva per ogni t .

Cioè, un'isotopia è un'omotopia che sia anche un omeomorfismo ad ogni "tempo". Faremo uso di alcuni teoremi riguardanti tale concetto:

Teorema 1.6.2 (Epstein). *Due curve semplici chiuse essenziali su una superficie sono omotope se e soltanto se sono isotope.*

La dimostrazione di tale risultato è riportata in [9].

Teorema 1.6.3 (Estensione delle isotopie). *Sia S una superficie, e sia $F : S^1 \times I \rightarrow S$ un'isotopia tra curve. Allora esiste un'isotopia $H : S \times I \rightarrow S$ tale che $H(F(z, 0), t) = F(z, t)$ per tutti $t \in I, z \in S^1$.*

Una dimostrazione di tale fatto si può trovare in [7].

OSSERVAZIONE 1.6.4. Se si può porre una metrica iperbolica su una superficie S compatta con bordo, si può fare anche in modo che le componenti di bordo siano geodetiche. Torniamo infatti alla costruzione descritta precedentemente, in cui si incollano lungo i bordi due (o più) copie di S , ottenendo una superficie chiusa iperbolica S' . Quelli che erano i bordi saranno ora delle curve semplici chiuse essenziali, e dunque omotope (e isotope) a qualche geodetica semplice chiusa.

Tramite il teorema di estensione delle isotopie (qui applicato ad una collezione di curve due a due disgiunte), sappiamo che esiste un'isotopia di S che porta ognuna di tali curve nella rispettiva geodetica. Tagliando S' lungo queste ultime, una delle componenti connesse sarà omeomorfa a S e il suo bordo sarà geodetico. \diamond

OSSERVAZIONE 1.6.5. Quando si parla di omotopia ed isotopia fra due omeomorfismi di una superficie con punture, non c'è bisogno di ulteriori precisazioni nel caso le punture siano viste come punti che *non* appartengono alla superficie. Se invece queste sono viste come punti marcati, è bene notare che un'omotopia $F : S \times I \rightarrow S$ dovrà, ad ogni tempo, portare punture in punture. Quindi, essendo l'insieme delle punture finito (e dunque discreto), la restrizione alle punture dell'applicazione F_t rimane la stessa al variare di t . \diamond

In generale, due omeomorfismi di una superficie in sé omotopi non sono isotopi. Infatti non sono isotope queste coppie di omeomorfismi omotopi:

- sul disco (aperto o chiuso) D , l'identità ed una simmetria assiale;
- sull'anello (aperto o chiuso) A , l'identità ed un omeomorfismo che scambia le componenti di bordo.

Tuttavia quelle appena descritte sono le uniche classi di controesempi:

Teorema 1.6.6. *Sia S una superficie compatta, e siano f e g omeomorfismi omotopi di S . Allora, se f e g non sono (isotopi a) una delle due coppie di omeomorfismi omotopi sopra descritti, allora sono anche isotopi.*

In particolare, se consideriamo solo omeomorfismi che preservano l'orientazione, isotopia ed omotopia sono la stessa cosa. La dimostrazione di tale teorema è di Baer [10, 11].

D'ora in poi, salvo esplicita indicazione, intendiamo omeomorfismi ed isotopie sempre *relativi al bordo* delle superfici; cioè, che fissano i punti del bordo. Le classi di isotopia di omeomorfismi relativi al bordo sono dette *mapping classes*.

1.7 Il principio di cambio delle coordinate

Un importante corollario del teorema di classificazione delle superfici è che esiste sempre un omeomorfismo di una superficie (arbitraria) S in sé che porta una curva fissata in un'altra che "si comporta allo stesso modo": è questo il contenuto intuitivo del *principio di cambio delle coordinate*, di cui è difficile dare un enunciato generale.

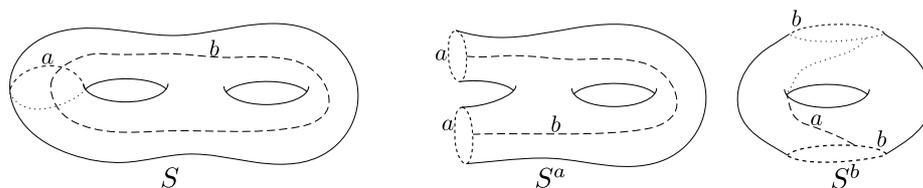


Figura 1.5: La superficie S tagliata lungo la curva a e lungo la curva b . Le superfici ottenute sono omeomorfe.

Per esempio, esiste sempre un omeomorfismo che porta una curva (che qui consideriamo non orientata) che non sconnette S in un'altra: tagliando S lungo ciascuna delle due curve (diciamo a e b), si ottengono delle nuove superfici S^a e S^b ; queste ultime saranno connesse ed avranno uguali caratteristiche di Eulero (tagliare lungo una curva non cambia χ), numero di componenti di bordo e punture: ma allora sono omeomorfe.

Inoltre componendo con un altro omeomorfismo si può fare in modo che i due bordi che corrispondevano a a vadano nei due bordi che corrispondevano a b , e dunque riattaccare da ambo le parti ottenendo un omeomorfismo di S che manda il supporto geometrico di a in quello di b . Da qui, se necessario, si può comporre con un opportuno omeomorfismo di S che cambia l'orientazione di a (vedi lemma 4.3.8), cosicché otteniamo un omeomorfismo che manda a in b almeno a meno di isotopia (che è quello che ci interesserà).

Useremo altre versioni di questa costruzione nel seguito. Per esempio, il discorso precedente si ripete identico se a e b sconnettono S , ma ciascuna componente connessa di S^a ha gli stessi "numeri distintivi" di una componente di S^b .

1. SUPERFICI

Capitolo 2

Teorema di Dehn-Nielsen-Baer, I parte

Introdurremo ora il mapping class group di una superficie, ed enunceremo il *teorema di Dehn-Nielsen-Baer*, alla cui dimostrazione sono dedicati questo ed il prossimo capitolo.

2.1 I mapping class groups ed il teorema di Dehn-Nielsen-Baer

Definizione 2.1.1. Se S è una superficie, il suo *mapping class group* è il gruppo

$$\text{MCG}(S) := \text{Omeo}^+(S)/\text{Omeo}_0(S)$$

dove $\text{Omeo}^+(S)$ denota gli omeomorfismi di S in sé che ne preservano l'orientazione e ne fissano i punti del bordo, $\text{Omeo}_0(S)$ denota il sottogruppo normale degli automorfismi isotopi a id_S tramite isotopie che fissano i punti del bordo. $\text{MCG}(S)$ è quindi il gruppo degli automorfismi che preservano l'orientazione di S considerati modulo isotopia.

Analogamente (per superfici senza bordo) si definisce il *mapping class group generalizzato*

$$\text{MCG}^\pm(S) := \text{Omeo}(S)/\text{Omeo}_0(S)$$

in cui vengono considerati anche omeomorfismi che scambiano l'orientazione.

In base al teorema 1.6.6, per quanto ci riguarda possiamo indifferentemente considerare il mapping class group come il gruppo degli omeomorfismi fissi sul bordo delle superfici, considerati a meno di omotopia reattiva al bordo.

Se $\text{Omeo}(S, x_0)$ è il sottogruppo degli omeomorfismi di S che, oltre a ∂S , fissano il punto $x_0 \in S$, ogni mapping class di S ha un rappresentante in tale sottogruppo. Esiste un omomorfismo naturale $\tilde{\psi} : \text{Omeo}(S, x_0) \rightarrow \text{Aut}(\pi_1(S, x_0))$ che ad ogni omeomorfismo associa l'automorfismo del gruppo fondamentale che esso induce.

Sia $f \in \text{Omeo}(S, x_0) \cap \text{Omeo}_0(S)$. Allora, detta $\gamma \in \pi_1(S, x_0)$ la classe di omotopia con punto base del cammino che compie il punto x_0 “durante l'isotopia” da id_S a f , se

2. TEOREMA DI DEHN-NIELSEN-BAER, I PARTE

$\alpha \in \pi_1(S, x_0)$ è un cammino generico, si ha $f_*(\alpha) = \gamma\alpha\gamma^{-1}$, dunque f_* è un automorfismo interno del gruppo fondamentale. Definiamo il gruppo degli *automorfismi esterni* del π_1 come $\text{Out}(\pi_1(S, x_0)) := \text{Aut}(\pi_1(S, x_0))/\text{Inn}(\pi_1(S, x_0))$. Visto che

$$\text{MCG}^\pm(S) \cong \text{Omeo}(S, x_0) / (\text{Omeo}(S, x_0) \cap \text{Omeo}_0(S)),$$

è possibile definire un'applicazione ψ al quoziente:

$$\begin{array}{ccc} \text{Omeo}(S, x_0) & \xrightarrow{\tilde{\psi}} & \text{Aut}(\pi_1(S, x_0)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{MCG}^\pm(S) & \xrightarrow{\psi} & \text{Out}(\pi_1(S, x_0)) \end{array}$$

Teorema 2.1.2 (Dehn-Nielsen-Baer). *Se S è una superficie chiusa di genere $g \geq 1$, l'applicazione ψ è un isomorfismo di gruppi.*

Una prima dimostrazione completa del teorema è dovuta a Dehn e Nielsen. Baer fu il primo a dimostrare che ψ è iniettiva.

In questo capitolo ci occupiamo di dimostrare l'iniettività di ψ (senza appoggiarci al teorema di Whitehead sui CW-compleksi, tramite il quale essa diventerebbe un facile corollario); la trattazione utilizza dimostrazioni sviluppate in [1]. Nel prossimo capitolo, invece, dimostreremo la surgettività di ψ .

Il teorema di Dehn-Nielsen-Baer in questa forma non è vero per superfici con bordo o punture: un esempio è dato da $S =$ toro con 2 punture (o componenti di bordo). Questo si deforma sul bouquet di 3 circonferenze, dunque $\pi_1(S) \cong F_3$, il gruppo libero su 3 lettere a, b, c . Possiamo prendere come a, b gli elementi corrispondenti alle due curve generatrici "standard" del π_1 del toro, e come c un cammino omotopo ad una delle due punture (ovvero che gira attorno ad essa).

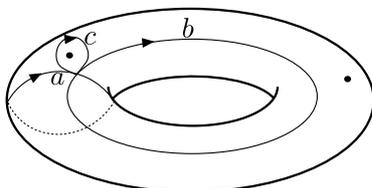


Figura 2.1: Il toro con 2 punture, e gli elementi di $\pi_1(S, x_0)$ che utilizziamo come lettere per descriverlo come gruppo libero.

Sia $\Phi \in \text{Aut}(\pi_1(S, x_0))$ l'automorfismo determinato da $\phi(a) = c, \phi(b) = b, \phi(c) = a$. $[\Phi] \in \text{Out}(\pi_1(S, x_0))$ non è realizzato da nessun elemento di $\text{MCG}^\pm(S)$, perché ogni omeomorfismo porta curve essenziali in curve essenziali; mentre, nella nostra descrizione, a corrisponde ad una curva essenziale e c no.

Vedremo in seguito qual è l'enunciato del teorema di Dehn-Nielsen-Baer per superfici con punture.

2.2 Il metodo di Alexander

Il *metodo di Alexander* è un criterio per stabilire se un omeomorfismo di una superficie è isotopo all'identità, basato sul controllo del suo comportamento su un'opportuna collezione di curve. Alla base del metodo c'è il seguente

Lemma 2.2.1 (di Alexander). *Il mapping class group del disco è banale.*

Dim. Sia $f : D \rightarrow D$ un automorfismo che sia l'identità su $S^1 = \partial D$. Allora un'isotopia con l'identità è data da $F : D \times I \rightarrow I$ definita da

$$F(x, t) = \begin{cases} (1-t)f\left(\frac{x}{1-t}\right) & \text{per } |x| < 1-t \\ x & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Quest'isotopia ha un'interpretazione visuale semplice: l'omeomorfismo iniziale viene applicato ad un disco sempre più stretto, e rimpiazzato con l'identità su una corona sempre più larga. \square

Corollario 2.2.2. *Il mapping class group del disco con una puntura è banale.*

Dim. Possiamo supporre che la puntura sia il centro del disco, e considerarla, piuttosto che come un punto tolto al disco, come un punto marcato. A questo punto l'isotopia utilizzata per il lemma di Alexander funziona anche qui. \square

Prima di venire all'enunciato del metodo di Alexander, ci serve una definizione:

Definizione 2.2.3. Si dice che un insieme di curve semplici chiuse ed archi propri su una superficie S la *riempie* se, tagliando S lungo tali curve ed archi, si ottiene una collezione di dischi chiusi, con al più una puntura ciascuno.

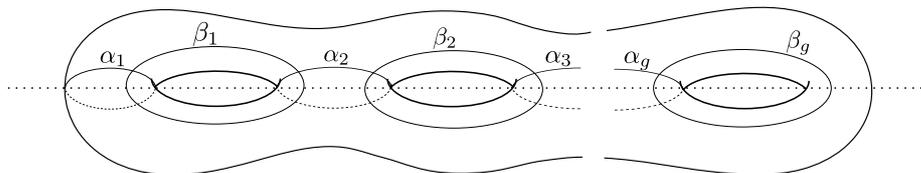


Figura 2.2: Una collezione di curve che riempie Σ_g . Un insieme di curve come in figura viene detto *catena* (vedi definizione 3.2.1).

Esiste un insieme standard di classi di isotopia di curve (a meno di cambiarne l'orientazione) che riempie la superficie chiusa Σ_g , riportato in figura 2.2.

Teorema 2.2.4 (Metodo di Alexander). *Siano S una superficie compatta, $f \in \text{Omeo}^+(S)$. Siano $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ curve semplici chiuse essenziali ed archi propri mutuamente in posizione minimale, tali che non ce ne siano tre che si intersechino a due a due, e non ce ne siano due isotopi.*

Supponiamo che i γ_i riempiano S , e che esista σ permutazione di $\{1, \dots, n\}$ tale che $f(\gamma_i)$ sia isotopo a $\gamma_{\sigma(i)}$ per ogni i . Allora

1. *esiste un'isotopia di S che porta $f(\cup \gamma_i)$ in $\cup \gamma_i$ relativamente al bordo, e che si restringe ad isotopie di $f(\gamma_i)$ con $\gamma_{\sigma(i)}$ (supponiamo allora, a meno di isotopia, che f fissi $\cup \gamma_i$);*
2. *sia \mathcal{G} il grafo ottenuto prendendo come vertici i punti di intersezione fra i γ_i , e i punti finali dei γ_i che sono archi propri; vediamo inoltre le porzioni dei γ_i come i lati del grafo (con l'orientazione data dai γ_i stessi). Sia f_\star l'automorfismo che f induce su \mathcal{G} . Se f_\star è l'identità, allora f è isotopa all'identità; altrimenti, è isotopo ad un omeomorfismo di ordine finito.*

2. TEOREMA DI DEHN-NIELSEN-BAER, I PARTE

È importante che sia fissato ogni lato del grafo (orientazione compresa) piuttosto che, semplicemente, ogni curva. Un controesempio è dato dall'omeomorfismo di Σ_g descrivibile nel seguente modo: consideriamo Σ_g immersa in \mathbb{R}^3 e ruotiamo lo spazio di un angolo π attorno all'asse punteggiato in figura 2.2. Questo si restringe ad un omeomorfismo di Σ_g che ne preserva l'orientazione, ed inoltre fissa il supporto geometrico delle curve γ_i e δ_i , ma ne inverte l'orientazione. Si può verificare che tale omeomorfismo induce l'automorfismo $-id$ su $H_1(\Sigma_g)$, dunque non può essere isotopo all'identità (un omeomorfismo che agisce in questo modo su H_1 è detto *involuzione iperellittica*).

Il metodo di Alexander ha un immediato corollario che dà un criterio per stabilire se due automorfismi di una superficie in sé sono isotopi:

Corollario 2.2.5. *Sia $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ una collezione di curve/archi su una superficie S come nelle ipotesi del metodo di Alexander. Siano $f, g \in \text{Omeo}^+(S)$, e supponiamo che esista σ permutazione di $\{1, \dots, n\}$ tale che $\delta_i := f(\gamma_i)$ sia isotopo a $g(\gamma_{\sigma(i)})$ per ogni i . Allora*

1. *esiste un'isotopia di S che porta $g(\cup \gamma_i)$ in $\cup \delta_i$ relativamente al bordo, analogamente al primo enunciato del metodo di Alexander (supponiamo allora che $g(\gamma_{\sigma(i)}) = \delta_i$ per ogni i);*
2. *definiti analogamente a sopra il grafo \mathcal{G} , e il grafo \mathcal{G}_f costruito sulle curve δ_i , se f_\star e g_\star sono lo stesso isomorfismo di grafi da \mathcal{G} a \mathcal{G}_f , allora f e g sono isotope.*

Per passare a questa forma del metodo di Alexander, basta effettuare poche osservazioni a partire dall'enunciato precedente applicato a $g^{-1} \circ f$.

Per dimostrare il metodo di Alexander ci serve un ulteriore lemma:

Lemma 2.2.6. *Siano γ e γ' curve semplici chiuse essenziali isotope su una superficie S , entrambe in posizione minimale con Δ , che è una collezione (finita) di curve semplici chiuse e/o archi propri a due a due disgiunti, tra i quali nessuno è omotopo a γ né a γ^{-1} .*

Allora esiste un'isotopia di S che fissa le curve della collezione Δ (cioè fissa ciascuna curva complessivamente, preservandone l'orientazione) e porta γ in γ' .

Dim. Come nella dimostrazione della proposizione 1.4.7, supponiamo che S sia munita di una struttura differenziabile, e che l'isotopia $H : S^1 \times I \rightarrow S$ tra γ e γ' sia trasversale a S ; dunque, la preimmagine di Δ su $S^1 \times I$ tramite H è una 1-varietà.

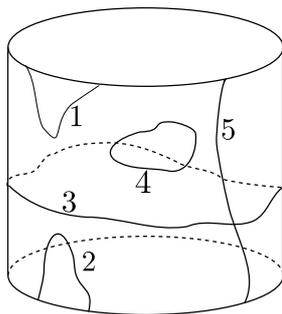


Figura 2.3: Le cinque possibilità (a priori) per le componenti connesse di $H^{-1}(\Delta)$ su $S^1 \times I$ nella dimostrazione del lemma 2.2.6.

Le componenti della preimmagine di Δ possono essere, a meno di isotopie relative al bordo, di 5 tipi, esemplificati in figura 2.3. I tipi 1 e 2 non possono presentarsi,

perché la loro esistenza implicherebbe che γ o γ' non è in posizione minimale con Δ : infatti una curva di questo tipo indica che “durante l’isotopia” tra γ e γ' , si creano o si distruggono bigoni con una curva di Δ , contro il lemma 1.4.7.

Neanche il tipo 3 si può presentare, perché implicherebbe che γ è omotopo ad una potenza di una curva α nella collezione Δ . Poiché non è possibile che γ sia omotopo a $1, \alpha, \alpha^{-1}$ per ipotesi, dovrà essere γ omotopo a α^k per qualche $|k| > 1$. Se S è una delle poche superfici che non ammettono una struttura iperbolica, si verifica direttamente che una curva semplice chiusa non può essere omotopa ad una curva percorsa più volte. Altrimenti, nella classe di isotopia di γ l’unica geodetica è λ_k , dove λ_1 è la geodetica omotopa ad α . Poiché λ_k non è semplice, neanche γ lo è.

Le componenti di tipo 4 possono essere evitate: infatti esse rappresentano un bigono tra una curva α di Δ e la curva $H(\cdot, t)$ che si crea e si distrugge al variare di t ; ed un tale bigono si può “aggirare” modificando l’isotopia.

Rimangono solo componenti di tipo 5: sia S' la superficie ottenuta da S tagliando lungo Δ ; tagliando $S^1 \times I$ lungo $H^{-1}(\Delta)$ otteniamo dei “rettangoli” che danno omotopia tra gli archi in cui si sono spezzati γ e γ' (l’omotopia non fissa gli estremi degli archi, ma consente loro di muoversi sulle componenti di bordo di S' corrispondenti a Δ).

L’applicazione H può essere modificata in modo che queste diventino delle isotopie. Per una versione del teorema 1.6.3 applicata ad una collezione disgiunta di archi, le isotopie fra coppie di archi sono realizzate simultaneamente da un’opportuna isotopia di S' , libera sulle componenti di bordo corrispondenti a Δ . Quest’ultima può essere modificata in modo che sia concorde su due segmenti di bordo ottenuti dallo stesso taglio. Si può allora reincollare S' , ottenendo di nuovo S , e una sua isotopia come nella tesi. \square

La dimostrazione si può facilmente adattare al caso in cui γ, γ' sono archi propri.

Dim. primo enunciato del teorema 2.2.4 Siano $\gamma'_i = f(\gamma_{\sigma^{-1}(i)})$, cosicché $\gamma_i \sim \gamma'_i$.

Procediamo per induzione su n ; il caso $n = 1$ è il teorema 1.6.3. Per il passo induttivo, possiamo supporre $\gamma_i = \gamma'_i$ per $i < n$, ovvero che abbiamo già applicato l’isotopia ambiente che ci è fornita dall’ipotesi induttiva per $n - 1$. Sia Δ la collezione dei $\gamma_i, i < n$, che intersecano γ_n , e sia Δ' la collezione dei $\gamma_i, i < n$, che non intersecano γ_n .

Ricalcando il discorso fatto nella dimostrazione del lemma precedente, la preimmagine di $\Delta \cup \Delta'$ tramite l’isotopia H tra γ_n e γ'_n , a meno di modifiche a quest’ultima, può essere considerata composta solo da componenti di tipo 5 (stavolta a priori non disgiunte). Ma allora una curva/un arco in $\Delta \cup \Delta'$ ha preimmagine non vuota se e soltanto se interseca γ : ovvero, se è un elemento di Δ . Tagliamo allora S lungo le curve di Δ' , ottenendo una superficie S' .

Osserviamo che le curve e gli archi di Δ non si intersecano tra di loro, perché altrimenti esisterebbe una terna di curve a due a due intersecantisi: dunque ci troviamo nelle ipotesi del lemma, che garantisce l’esistenza di un’isotopia ambiente di S' che fissa Δ e porta γ in γ' . Poiché tale isotopia è relativa al bordo, possiamo riattaccare S' in S , ottenendo un’isotopia di S come nell’enunciato. \square

Dim. secondo enunciato del teorema 2.2.4 Poiché un grafo ha un numero finito di “oggetti”, ogni suo automorfismo ha ordine finito. Supponiamo $f_\star^m = id_\Gamma$. Allora f^m è isotopa all’identità su $\bigcup \gamma_i$ (supponiamo che sia uguale).

Ciascuno dei dischi chiusi (eventualmente con una puntura) in cui viene tagliata S da $\bigcup \gamma_i$ viene fissato da f^m : infatti, dal momento che f^m fissa le curve che costituiscono

2. TEOREMA DI DEHN-NIELSEN-BAER, I PARTE

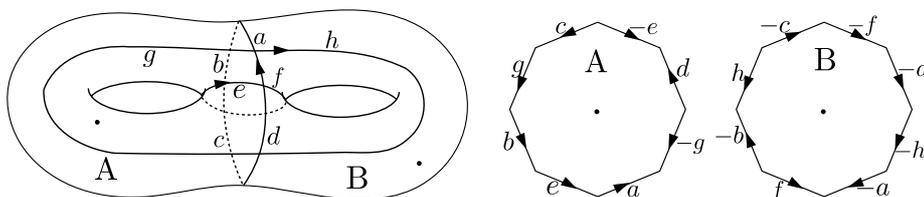


Figura 2.4: Un insieme di curve su una superficie di genere 2 con 2 punture come nell'enunciato del metodo di Alexander, e i dischi puntati in cui dividono la superficie.

il grafo \mathcal{G} , tale omeomorfismo induce un omeomorfismo della collezione dei dischi in cui S viene tagliata da $\bigcup \gamma_i$ (che ne preserva l'orientazione e ne fissa i punti dei bordi); a sua volta, questa induce una permutazione dei dischi di tale collezione.

Tuttavia, essendo fissati i lati del grafo con le rispettive orientazioni, e poiché f^m preserva l'orientazione di S , anche tali dischi sono fissati uno ad uno; a meno di isotopia, inoltre, i punti dei loro bordi vengono fissati. Per il lemma di Alexander, f^m , ristretta a ciascuno dei dischi, è isotopa all'identità. Ma allora, f^m è isotopo a id_S ; in particolare se f_* fissa il grafo, allora $m = 1$. \square

Un'osservazione da fare è che il teorema si riferisce ad omeomorfismi che preservano l'orientazione di S , e lo usa nella dimostrazione dell'enunciato finale. Ma il fatto fondamentale, ovvero che $f_* = id_{\mathcal{G}} \Rightarrow f \sim id_S$, rimane vero, per il semplice fatto che se f inverte l'orientazione, in particolare cambia l'orientazione delle intersezioni fra curve/archi, dunque non può fissare tutto il grafo \mathcal{G} .

Dim. dell'iniettività del morfismo di DNB Supponiamo che $f \in \text{Omeo}(\Sigma_g)$ induca $[f_*] = [1] \in \text{Out}(\pi_1(\Sigma_g; x_0))$. In particolare, l'azione di f_* fissa ogni classe di coniugio in $\pi_1(\Sigma_g; x_0)$: vale a dire, f fissa ogni classe di omotopia libera di curve chiuse, e quindi ogni classe di isotopia di curve semplici.

In particolare f fisserà le classi di isotopia di una catena di curve che riempie Σ_g : consideriamo in particolare quella data in figura 2.2.

Allora, per il primo enunciato del metodo di Alexander, si può supporre che f fissi tutte queste curve con le rispettive orientazioni. Consideriamo il grafo \mathcal{G} che esse originano.

Poiché due di queste curve si intersecano in al più un punto, f dovrà fissare anche tutti i punti di intersezione. Non rimangono possibilità per l'automorfismo f_* di \mathcal{G} : dovrà essere l'identità. Per il secondo enunciato del metodo di Alexander, allora, f è isotopa all'identità. \square

2.3 Il mapping class group del toro

Per dimostrare la surgettività del morfismo di Dehn-Nielsen-Baer per superfici di genere $g \geq 2$, faremo pesante uso del fatto che ammettono una struttura iperbolica. Poiché il toro non la ammette, è necessario trattare questo caso a parte.

2.3 Il mapping class group del toro

Ricordiamo che $\Sigma_1 \cong \mathbb{R}^2/\Gamma$, dove $\Gamma < \text{Isom}^+(\mathbb{R}^2)$ è il gruppo generato dalle traslazioni lungo i vettori $(1, 0)$ e $(0, 1)$ rispettivamente. Sia $x_0 \in \Sigma_1$ il punto su cui si proietta $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$

Com'è noto, $\pi_1(\Sigma_1) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ che è abeliano; dunque

$$\text{Out}(\pi_1(\Sigma_1)) \cong \text{Aut}(\pi_1(\Sigma_1)) \cong \text{GL}(2, \mathbb{Z}).$$

Comunque preso $\phi \in \text{Aut}(\pi_1(\Sigma_1))$ si trova facilmente un omeomorfismo di Σ_1 che lo realizza: ϕ è dato da una matrice non singolare a coefficienti in \mathbb{Z} , che quindi è anche un isomorfismo lineare di \mathbb{R}^2 , che passa al quoziente come una mappa (omeomorfismo) $\tilde{\phi}$ di \mathbb{R}^2/Γ in sé, in quanto, oltre ad essere lineare, per definizione preserva il reticolo \mathbb{Z}^2 .

Quest'ultimo si trova in bigezione naturale con gli elementi di $\pi_1(\Sigma_1, x_0)$ e dunque, quasi in modo tautologico, $\tilde{\phi}$ realizza l'automorfismo ϕ .

2. TEOREMA DI DEHN-NIELSEN-BAER, I PARTE

Capitolo 3

Teorema di Dehn-Nielsen-Baer, II parte

Ci accingiamo ora a dimostrare la surgettività del morfismo di Dehn-Nielsen-Baer per superfici chiuse di genere $g \geq 2$. Tale dimostrazione richiede di indagare sul comportamento geometrico di automorfismi che, a priori, sono puramente algebrici; e alcune parti saranno abbastanza tecniche. La trattazione qui proposta è quella di [8].

3.1 Quasi-isometrie

Definizione 3.1.1. Siano (X, d) e (Y, ρ) due spazi metrici. Un'applicazione $f : X \rightarrow Y$ è un *embedding quasi-isometrico* se esistono costanti $k \geq 1, c \geq 0$ tali che

$$\frac{1}{k}d(a, b) - c \leq \rho(f(a), f(b)) \leq kd(a, b) + c \quad \text{per ogni } a, b \in X.$$

Un embedding quasi-isometrico $f : X \rightarrow Y$ è una *quasi-isometria* se esistono un embedding quasi-isometrico $g : Y \rightarrow X$ ed una costante $q \geq 0$ tali che $\rho(f(g(y)), y) \leq q$ per ogni $y \in Y$ e $d(g(f(x)), x) \leq q$ per ogni $x \in X$.

Due distanze d, ρ su uno stesso spazio X si dicono *quasi-isometriche* se $id_X : (X, d) \rightarrow (X, \rho)$ è una quasi-isometria.

Si vede facilmente che:

- un embedding quasi-isometrico f è una quasi-isometria se e soltanto se, per qualche $q \geq 0$, f ha immagine *q-densa*, ovvero per ogni $y \in Y$ esiste $x \in X$ tale che $\rho(f(x), y) \leq q$; in particolare se f è invertibile è una quasi-isometria;
- l'essere quasi-isometriche è una relazione di equivalenza fra le distanze su X .

Poiché nel seguito in questa sezione avremo soltanto applicazioni invertibili, per verificare che sono quasi-isometrie ci limiteremo a verificare che sono embedding quasi-isometrici.

Dato un gruppo Γ con un insieme finito di generatori \mathcal{A} , il suo *grafo di Cayley* è un grafo i cui vertici sono i suoi elementi di Γ e c'è un lato tra due vertici g e h se e solo se $g = ha^{\pm 1}$ per qualche $a \in \mathcal{A}$.

3. TEOREMA DI DEHN-NIELSEN-BAER, II PARTE

Su Γ si può allora definire la metrica $d_{\mathcal{A}}(g, h) =$ distanza fra i vertici g e h nel grafo di Cayley = minima lunghezza di una parola che rappresenta $g^{-1}h$ con lettere in \mathcal{A} . È facile verificare che questa è effettivamente una distanza e che, se \mathcal{A} e \mathcal{B} sono due insiemi di generatori di Γ , allora le distanze che essi definiscono, $d_{\mathcal{A}}$ e $d_{\mathcal{B}}$, sono quasi-isometriche.

Nello specifico, ci interesserà il caso in cui $\Gamma < \text{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ è tale che $\mathbb{H}^2/\Gamma \cong \Sigma_g$, dunque Γ agisce in modo propriamente discontinuo e con quoziente compatto.

Fissato un punto base $\tilde{x}_0 \in \mathbb{H}^2$, su Γ si può introdurre un'ulteriore distanza

$$d_H(g, h) := d(g \cdot \tilde{x}_0, h \cdot \tilde{x}_0) = d(\tilde{x}_0, g^{-1}h \cdot \tilde{x}_0).$$

dove $x_0 \in \mathbb{H}^2$ è un punto base fissato.

Anche qui, al variare del punto base si ottengono distanze quasi-isometriche. Vedremo ora che una qualunque metrica di parole/grafi di Cayley su Γ è quasi-isometrica a d_H : ciò è conseguenza del seguente teorema, molto più generale.

Teorema 3.1.2 (Lemma di Švarc-Milnor). *Sia Γ un gruppo che agisce in modo proprio tramite isometrie su uno spazio metrico geodetico proprio X , e supponiamo che X/Γ sia compatto. Allora Γ è finitamente generato e, per ogni scelta di un insieme finito \mathcal{A} di generatori, si ha che su Γ sono quasi-isometriche la metrica della parola $d_{\mathcal{A}}$ e la metrica d_X indotta dall'azione di Γ su X (per qualunque scelta del punto base x_0).*

Qualche precisazione: uno spazio metrico è *geodetico* se per ogni coppia di punti esiste un arco che li congiunge la cui lunghezza è pari alla loro distanza (una geodetica, appunto); è *proprio* se la chiusura di ogni palla è compatta. Un'azione *propria* è un'azione tale che per ogni $x \in X$ esiste un $r > 0$ tale che $g \cdot B(x, r) \cap B(x, r) \neq \emptyset$ solo per un numero finito di $g \in \Gamma$. Nel caso di spazi localmente compatti come \mathbb{H}^2 , ciò equivale a dire che l'azione è propriamente discontinua.

La seguente dimostrazione è sostanzialmente quella data in [5].

Dim. Sia $x_0 \in X$, sia C una regione fondamentale compatta per l'azione di Γ , e sia D un numero tale che $C \subseteq B(x_0, D/3)$. Sia poi $\mathcal{A} = \{g \in \Gamma \mid B(g \cdot x_0, D) \cap B(x_0, D) \neq \emptyset\}$. Poiché Γ agisce in modo proprio e X è proprio, \mathcal{A} è un insieme finito.

Dimostriamo che \mathcal{A} genera Γ e che esistono costanti k_1, c_1 tali che $d_{\mathcal{A}} \leq k_1 d_X + c_1$. Ci basterà vedere che $d_{\mathcal{A}}$ soddisfa tale disuguaglianza per le distanze tra 1 ed un altro elemento di Γ , perché $d_X(g, h) = d_X(1, g^{-1}h)$ ed analogamente per $d_{\mathcal{A}}$.

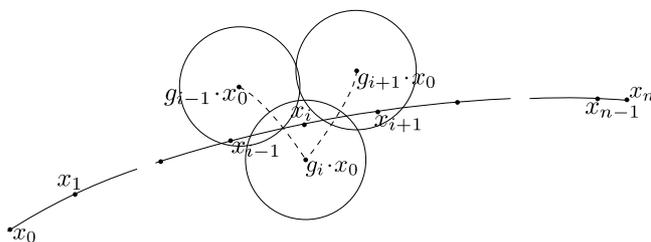


Figura 3.1: Lemma di Švarc-Milnor: la geodetica tra x_0 e $g \cdot x_0$, suddivisa come nella prima parte della dimostrazione. Sono disegnate le palle di raggio $D/3$ e le geodetiche (tratteggiate) fra i $g_i \cdot x_0$, lunghe al più D .

Fissato un $g \in \Gamma$, consideriamo la geodetica tra x_0 e $g \cdot x_0$; la suddividiamo in segmenti lunghi esattamente $D/3$ (tranne l'ultimo che può essere più corto). Siano

3.1 Quasi-isometrie

$x_0, x_1, \dots, x_n = g \cdot x_0$ gli estremi di tali segmenti, in successione. Per ogni x_i esisterà un $g_i \in \Gamma$ tale che $d(g_i \cdot x_0, x_i) \leq D/3$ (con $g_0 = 1$ e $g_n = g$). Allora $D \geq d(g_i \cdot x_0, g_{i+1} \cdot x_0) = d_X(g_i, g_{i+1}) \Rightarrow g_{i+1}g_i^{-1} \in \mathcal{A}$, e si può scrivere $g = (g_n g_{n-1}^{-1}) \cdots (g_1 g_0^{-1})g_0$. Ovvero, \mathcal{A} genera Γ .

Inoltre, vale $D(n-1)/3 \leq d(x_0, g \cdot x_0)$ (ovvero, somma delle lunghezze dei primi $n-1$ segmenti di geodetica \leq lunghezza della geodetica). Ma $d_{\mathcal{A}}(1, g) \leq n$, dunque $d_{\mathcal{A}}(1, g) \leq (3/D)(d_X(1, g) + 1)$.

Vediamo ora che esiste un'altra costante k_2 tale che $d_X \leq k_2 d_{\mathcal{A}}$. Poniamo $k_2 = \max\{d_X(x_0, a \cdot x_0) | a \in \mathcal{A}\}$; fissati $g, h \in \Gamma$, se $gh^{-1} = \prod_{i=1}^n a_i$ è una scrittura di lunghezza minima con lettere in \mathcal{A} , si ha

$$d_X(g, h) \leq \sum_{i=1}^n d_X \left(\left(\prod_{j=1}^{i-1} a_j \right) h, \left(\prod_{j=1}^i a_j \right) h \right) \leq nk_2 = d_{\mathcal{A}}(g, h)k_2.$$

Infine, come costanti da usare nella definizione di quasi-isometria fra $d_{\mathcal{A}}$ e d_X basteranno $k = \max\{k_1, k_2\}$ e $c = c_1$. Abbiamo già osservato che variando l'insieme finito di generatori da una parte, o il punto base dall'altra, si ottengono ancora distanze quasi-isometriche. \square

Il lemma di Švarc-Milnor fornisce una prima indicazione sul comportamento geometrico degli automorfismi del gruppo fondamentale:

Lemma 3.1.3. *Siano $\Gamma < \text{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ tale che $\mathbb{H}^2/\Gamma \cong \Sigma_g$ ($g \geq 2$), $\Phi \in \text{Aut}(\Gamma)$. Allora Φ è una quasi-isometria su Γ (con la metrica di parola, e quindi anche con la metrica d_H).*

Dim. Sia \mathcal{A} un insieme finito di generatori per Γ , e sia $\mu = \max_{s \in \mathcal{A}} d_{\mathcal{A}}(\Phi(s), 1)$. Allora banalmente, per ogni $g, h \in \Gamma$, vale $d_{\mathcal{A}}(\Phi(g), \Phi(h)) \leq \mu d_{\mathcal{A}}(g, h)$.

Ripetiamo il discorso per l'automorfismo Φ^{-1} , definendo un'analogha costante $\tilde{\mu}$. Per ogni $\tilde{g}, \tilde{h} \in \Gamma$, $d_{\mathcal{A}}(\Phi^{-1}(\tilde{g}), \Phi^{-1}(\tilde{h})) \leq \tilde{\mu} d_{\mathcal{A}}(\tilde{g}, \tilde{h})$, da cui, ponendo $\tilde{g} = \Phi(g)$, $\tilde{h} = \Phi(h)$, si ha l'altra stima. Prendiamo come costanti di quasi-isometria $k = \max\{\mu, \tilde{\mu}\}$ e $c = 0$. \square

Diremo che $\alpha, \beta \in \pi_1(\Sigma_g, x_0)$ non banali sono linkati all'infinito se lo sono $Ax(\alpha)$ e $Ax(\beta)$ come geodetiche di \mathbb{H}^2 (ovviamente, stiamo supponendo di aver fissato un punto base \tilde{x}_0 di \mathbb{H}^2 , scegliendolo fra i sollevamenti di x_0).

Proposizione 3.1.4. *Sia $\Phi \in \text{Aut}(\pi_1(\Sigma_g, x_0))$. Allora, comunque presi $\alpha, \beta \in \pi_1(\Sigma_g, x_0) \setminus \{id\}$ con assi distinti, vale $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \Phi(\alpha) \sim \Phi(\beta)$.*

Dim. Basta dimostrare \Leftarrow : vedremo che se α e β non sono linkati all'infinito, neanche $\Phi(\alpha)$ e $\Phi(\beta)$ lo sono. Per il viceversa, basterà usare il risultato analogo per gli elementi $\Phi(\alpha)$ e $\Phi(\beta)$ del gruppo fondamentale, e l'automorfismo Φ^{-1} .

Siano $C \subseteq \mathbb{H}^2$ una regione limitata e fondamentale per l'azione di Γ su \mathbb{H}^2 , e $\tilde{x}_0 \in C$ un punto che si proietta su x_0 . Fissiamo coerentemente un isomorfismo tra Γ e $\pi_1(\Sigma_g, x_0)$ (dato dall'azione di monodromia una volta fissati i punti base \tilde{x}_0 e x_0), e poniamo su $\Gamma \cong \pi_1(\Sigma_g, x_0)$ la metrica d_H prima definita. Siano k, c delle costanti di quasi-isometria per Φ (visto come automorfismo di Γ , che nel seguito identificheremo con $\pi_1(\Sigma_g, x_0)$).

Sia D il diametro della regione $C \subseteq \mathbb{H}^2$; e sia $\mathcal{O} = (\Delta_{\alpha}^k(\tilde{x}_0))_{k \in \mathbb{Z}}$. Poiché Δ_{α} è un'isometria iperbolica, questa successione di punti, per $k \rightarrow \pm\infty$, convergerà rispettivamente

3. TEOREMA DI DEHN-NIELSEN-BAER, II PARTE

ai due punti all'infinito di $Ax(\alpha)$. Costruiamo un arco γ tra \tilde{x}_0 e $\Delta_\alpha(\tilde{x}_0)$, congiungendo tramite segmenti geodetici sollevamenti del punto base \tilde{x}_0 che distano meno di $2D$; chiameremo $\mathcal{G} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \Delta_\alpha^k(\gamma)$, che risulterà essere una spezzata geodetica illimitata, che tenderà anch'essa ai punti estremi di $Ax(\alpha)$.

Consideriamo ora $\mathcal{O}' = \left(\Delta_\beta^{N(2k+1)}(\tilde{x}_0) \right)_{k \in \mathbb{Z}}$, dove N è abbastanza grande affinché ogni punto di \mathcal{O}' disti almeno $2Dk^2 + 2ck + D + 1$ da ogni vertice degli archi di \mathcal{G} (è possibile perché gli iterati tramite Δ_β vanno verso i punti all'infinito di $Ax(\beta)$, che sono entrambi diversi da quelli di $Ax(\alpha)$ per la proposizione 1.3.6).

Connettiamo quindi ogni coppia di punti consecutivi di \mathcal{O}' con un arco tale che ogni punto mantiene la stessa distanza minima da \mathcal{G} (ricordiamo che α e β non sono linkati all'infinito per cui, scegliendo N abbastanza grande, ciò è possibile); poi li rimpiazziamo considerando per ogni punto di un arco il sollevamento di x_0 più vicino (che, quindi, non disterà più di D), e poi creando una spezzata geodetica che connette sollevamenti di x_0 situati in traslati di C contigui. In questo modo otteniamo un'altra spezzata geodetica illimitata \mathcal{G}' , ogni cui vertice è a distanza di almeno $2Dk^2 + 2ck + 1$ da ogni vertice di \mathcal{G} .

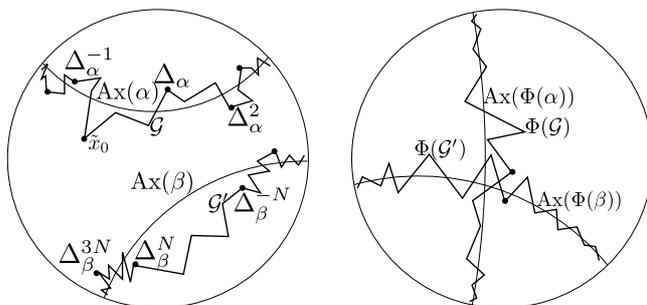


Figura 3.2: A sinistra, gli assi di α e β nella dimostrazione, e le spezzate \mathcal{G} e \mathcal{G}' (abbiamo indicato ogni punto $f(\tilde{x}_0)$ semplicemente con f). A destra, l'assurdo: se $\Phi(\alpha) \sim \Phi(\beta)$, i vertici evidenziati distano al massimo $2Dk + c$.

L'automorfismo Φ induce una trasformazione di \mathcal{G} e \mathcal{G}' in questo modo: ad ogni vertice delle due spezzate, che sarà un $\Delta_\delta(\tilde{x}_0)$ ($\delta \in \pi_1(\Sigma_g, x_0)$), associamo il relativo $\Delta_{\Phi(\delta)}(\tilde{x}_0)$, e successivamente connettiamo con un segmento geodetico $\Delta_{\Phi(\delta)}(\tilde{x}_0)$ e $\Delta_{\Phi(\eta)}(\tilde{x}_0)$ ogni volta che, in \mathcal{G} o \mathcal{G}' rispettivamente, c'era un segmento geodetico tra $\Delta_\delta(\tilde{x}_0)$ e $\Delta_\eta(\tilde{x}_0)$.

Avremo allora due nuove spezzate geodetiche $\Phi(\mathcal{G})$ e $\Phi(\mathcal{G}')$, che tenderanno ai punti all'infinito di $Ax(\Phi(\alpha))$ e $Ax(\Phi(\beta))$ rispettivamente. Supponiamo per assurdo che $\Phi(\alpha)$ e $\Phi(\beta)$ siano linkati all'infinito: allora queste due spezzate si intersecano.

Se $\Delta_\delta(\tilde{x}_0)$ e $\Delta_\eta(\tilde{x}_0)$ erano connessi da un segmento geodetico in \mathcal{G} o \mathcal{G}' , allora $d_H(\delta, \eta) \leq 2D$ e dunque, essendo Φ una quasi-isometria di Γ , $d_H(\Phi(\delta), \Phi(\eta)) \leq k(2D) + c$: dunque, ogni segmento geodetico nelle due spezzate $\Phi(\mathcal{G})$ e $\Phi(\mathcal{G}')$ è lungo al massimo $k(2D) + c$.

Se $\Phi(\mathcal{G})$ e $\Phi(\mathcal{G}')$ si intersecano, quindi, ci sono un vertice $\Delta_{\Phi(\delta)}(\tilde{x}_0)$ in \mathcal{G} ed uno $\Delta_{\Phi(\eta)}(\tilde{x}_0)$ in \mathcal{G}' che distano non più di $2Dk + c$, ovvero $d_H(\Phi(\delta), \Phi(\eta)) \leq 2Dk + c$.

Tuttavia, per com'è stata costruita \mathcal{G}' , $d_H(\delta, \eta) \geq 2Dk^2 + 2ck + 1$; dunque

$$d_H(\Phi(\delta), \Phi(\eta)) \geq (2Dk^2 + 2ck + 1)/k - c > 2Dk + c, \text{ assurdo.}$$

□

OSSERVAZIONE 3.1.5. Gli automorfismi del gruppo fondamentale, oltre a preservare le intersezioni fra gli assi degli elementi di Γ , conservano anche altre proprietà di posizione relativa. Infatti, per esempio, consideriamo $\alpha, \beta, \gamma \in \pi_1(\Sigma_g, x_0)$ a due a due non linkati all'infinito; allora ha senso dire che α e β si trovano da parti opposte rispetto a γ . Ciò equivale a dire che, per ogni δ linkato con α e β , δ è linkato anche con γ ; e questa proprietà rimarrà vera considerando $\Phi(\alpha), \Phi(\beta), \Phi(\gamma)$, dunque anche $\Phi(\alpha)$ e $\Phi(\beta)$ si trovano da parti opposte rispetto a $\Phi(\gamma)$.

Proprietà analoghe possono essere poste in termini di link all'infinito, e quindi vengono preservate dagli automorfismi del gruppo fondamentale. \diamond

3.2 Catene di curve

In questa sezione vedremo che gli automorfismi del gruppo fondamentale hanno un comportamento che è realizzabile tramite omeomorfismi di Σ_g almeno per quanto riguarda un opportuno tipo di collezione di curve. Osserviamo preliminarmente che, dal momento che le classi di omotopia libera di curve corrispondono alle classi di coniugio del gruppo fondamentale, $\text{Aut}(\pi_1(\Sigma_g, x_0))$ agisce naturalmente sull'insieme delle classi di omotopia libera. Se a è una classe di omotopia libera e $\Phi \in \text{Aut}(\pi_1(\Sigma_g, x_0))$, con $\Phi(a)$ faremo riferimento a tale azione.

Definizione 3.2.1. Una *catena orientata di curve* su Σ_g è una n -upla ordinata (c_1, \dots, c_n) di classi di isotopia di curve chiuse semplici su Σ_g tale che

- $i(c_1, c_{i+1}) = 1 \forall i$, ed inoltre $\hat{i}(c_i, c_{i+1}) = 1 \forall i$ oppure $\hat{i}(c_i, c_{i+1}) = -1 \forall i$;
- $\hat{i}(c_i, c_j) = 0$ per $|i - j| \neq 1$;
- Σ_g non sia sconnessa dall'insieme di tali curve.

Le curve in figura 2.2, con opportune orientazioni, costituiscono una catena orientata.

Lemma 3.2.2. *Un numero pari di curve che si intersecano come una catena non sconnette Σ_g .*

Dim. Siano c_1, \dots, c_n le curve in questione, e sia U l'unione di intorni tubolari (chiusi) delle varie c_i (che esistono perché Σ_g è orientabile). Dimosteremo per induzione su n che se n è dispari, tagliare lungo le curve sconnette U in 2 componenti omeomorfe ad anelli chiusi; se invece è pari, non si sconnette U ed a maggior ragione Σ_g . Sia \tilde{U} la collezione di superfici con bordo che si ottiene tagliando U lungo le c_i .

Osserviamo che ogni componente connessa di \tilde{U} sarà in qualunque caso un anello (lo si può vedere osservando che la retrazione di U su $\bigcup c_i$, dopo aver effettuato il taglio, diventa una retrazione di ogni componente connessa di \tilde{U} su di un S^1).

Per $n = 1$ la tesi è ovvia. Per $n > 1$, sia U' l'unione di intorni tubolari delle prime $n - 1$ curve (e definiamo il relativo \tilde{U}'); definiamo invece \tilde{U}^* la superficie che si ottiene da U tagliando solo lungo le prime $n - 1$ curve. Per ipotesi induttiva possiamo supporre che \tilde{U}' sia costituito da uno o due anelli.

Se \tilde{U}' è costituito da 2 anelli, allora, in \tilde{U}^* , c_n è diventato un arco che va da un anello all'altro (altrimenti si ottengono situazioni impossibili reincollando), dunque tagliando \tilde{U}^* lungo c_n , otteniamo che \tilde{U} è costituito da un solo anello (vedi parte sinistra della figura 3.3).

3. TEOREMA DI DEHN-NIELSEN-BAER, II PARTE

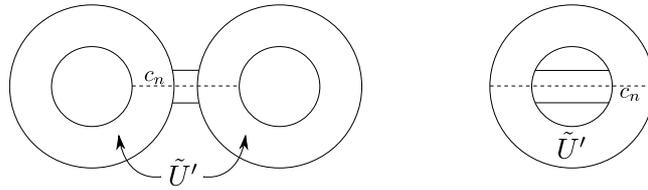


Figura 3.3: Le due situazioni possibili nel passo induttivo della dimostrazione del lemma 3.2.2.

Se \tilde{U}' è costituito da un anello solo, allora, in \tilde{U}^* , c_n è un arco che parte dall'anello, ne esce e poi rientra. Tagliando lungo di esso si ottengono 2 anelli (vedi parte destra della figura 3.3). \square

Proposizione 3.2.3. *Se $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ e $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ sono due collezioni di curve chiuse semplici su Σ_g , mutuamente in posizione minimale, le cui classi di isotopia costituiscono due catene orientate, esiste un omeomorfismo di Σ_g che manda una nell'altra.*

Dim. Costruiamo dapprima un omeomorfismo che porta una catena nell'altra senza badare all'orientazione degli α_i e dei β_i ; questa è un'applicazione del principio di cambio delle coordinate. Procediamo per induzione.

Per $n = 1$, è l'utilizzo standard del principio di cambio delle coordinate, illustrato già nella sezione 1.7. Per quanto riguarda il passo induttivo, supponiamo di avere un omeomorfismo f che manda α_i in β_i per $i = 1, \dots, n-1$. Una volta applicata f , tagliamo Σ_g lungo $\beta_1, \dots, \beta_{n-1}$; sia S la superficie ottenuta. In particolare, poiché β_{n-1} al più si interseca una sola volta con β_{n-2} , diventa una coppia di componenti di bordo, oppure una coppia di archi sul bordo che corrispondono entrambi a *tutta* la curva iniziale.

Su S , $f(\alpha_n)$ e β_n sono due archi che connettono le stesse componenti di bordo e non separano. Ancora applicando il principio di cambio delle coordinate, si trova un omeomorfismo \tilde{f}_n che fissa le parti di bordo che corrispondevano alle varie curve (storcendo eventualmente i "pezzi" che corrispondono a β_{n-1}) e porta $f(\alpha_n)$ in β_n . Con qualche cautela, \tilde{f}_n induce un omeomorfismo f_n di Σ_g ; e $f_n \circ f$ è l'omeomorfismo cercato.

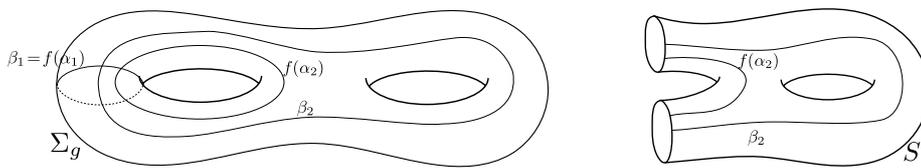


Figura 3.4: Il passo induttivo nel caso semplice di 2 curve: in S si può applicare il principio di cambio delle coordinate

Per quanto riguarda il rispetto dell'orientazione, ci limitiamo ad una dimostrazione rivolta a ciò che effettivamente useremo, cioè a catene lunghe al massimo $2g$. Osserviamo che il numero di intersezione algebrico tra due curve corrisponde al loro prodotto cap/cup (via la dualità di Poincaré); se f_* è l'automorfismo in omologia indotto dall'omeomorfismo sopra trovato f , si ha $f_*(\alpha_i \cap \alpha_{i+1}) = \beta_i \cap \beta_{i+1}$ (dove \cap è il prodotto

cap e β_i, β_{i+1} sono considerati come (co)cicli!). Dal momento che l'immagine del prodotto cap è $H_0(\Sigma_g) \cong \mathbb{Z}$, f_* può essere solo l'identità o un cambio di segno. Ovvero, l'omeomorfismo f cambia segno a tutti i numeri di intersezione, o li lascia tutti uguali.

Da ciò si vede facilmente che l'omeomorfismo trovato può fare solo una tra le seguenti: portare tutti gli α_i nei β_i con le orientazioni giuste; sbagliare tutte le orientazioni; sbagliare solo quelle pari; sbagliare solo quelle dispari.

Per correggere questi comportamenti, agiamo in questo modo: sia g_1 un omeomorfismo che manda la catena degli α_i nella catena di curve standard di figura 2.2 (o nelle prime curve di questa); e g_2 un omeomorfismo che manda quest'ultima catena in quella dei β_i . Se $g_2 \circ g_1$ ha sbagliato l'orientazione delle curve pari, chiamiamo h la simmetria rispetto al piano del foglio sempre in figura 2.2; allora $g_2 \circ h \circ g_1$ rispetterà tutte le orientazioni. Analogamente per gli altri casi. \square

Nel prossimo risultato e nella conclusione della dimostrazione del teorema di Dehn-Nielsen-Baer sfrutteremo a fondo la proposizione 3.1.4.

Proposizione 3.2.4. *Sia $\Phi \in \text{Aut}(\pi_1(\Sigma_g))$, e sia $\Lambda = (c_1, \dots, c_{2g})$ una catena di curve. Allora $\Phi(\Lambda) = (\Phi(c_1), \dots, \Phi(c_{2g}))$ è ancora una catena.*

Dim. Ci sono 4 fatti da verificare:

1. Φ manda classi di omotopia libera di curve semplici in classi di curve semplici;
2. Φ preserva il numero di intersezione geometrico 0;
3. Φ preserva il numero di intersezione geometrico 1;
4. $\hat{i}(\Phi(c_i), \Phi(c_{i+1}))$ è sempre uguale a 1 oppure a -1 .

Non serve verificare che $\Phi(\Lambda)$ non sconnette Σ_g , perché ha lunghezza pari (vedi lemma 3.2.2).

Fatto 1. Se a è una classe di omotopia libera in cui vi sono delle curve semplici, in particolare la geodetica rappresentante ha periodo minimale ed è semplice (vedi prop. 1.5.1); ciò implica che nella classe di coniugio a ci sono solo elementi primitivi di π_1 (se ce ne fossero di non primitivi, la relativa geodetica, per l'unicità, non potrebbe avere periodo minimale).

Ma allora anche nella classe di coniugio $\Phi(a)$ ci sono solo elementi primitivi, dunque la geodetica rappresentante di tale classe di omotopia ha periodo minimale. Che sia semplice segue questa catena di implicazioni: la geodetica in a è semplice \Rightarrow due sollevamenti di quest'ultima non si intersecano, dunque gli assi di due elementi della classe di coniugio a non sono mai linkati all'infinito \Rightarrow lo stesso per $\Phi(a)$, per quanto visto \Rightarrow la geodetica in $\Phi(a)$ è semplice.

Fatto 2. Se $i(a, b) = 0$, comunque presi α e β elementi del π_1 rappresentanti delle due classi di omotopia libera, $Ax(\alpha)$ e $Ax(\beta)$ non sono linkati all'infinito, dunque non lo sono $Ax(\Phi(\alpha))$ e $Ax(\Phi(\beta))$. Poiché ciò è vero al variare di α e β , anche $i(\Phi(a), \Phi(b)) = 0$ (se fosse > 0 , qualche coppia di sollevamenti delle geodetiche rappresentanti dovrebbe intersecarsi).

Fatto 3. Riformuliamo $i(a, b) = 1$ in termini in link all'infinito, che viene preservato da Φ . Dimostriamo ora che $i(a, b) = 1$ se e solo se, fissati $\alpha \in a, \beta \in b$ elementi del π_1 che siano linkati all'infinito, i rappresentanti di a che siano linkati all'infinito con β sono tutti e soli quelli in $A = \{\beta^k \alpha \beta^{-k} | k \in \mathbb{Z}\}$ (vedi figura 3.5 a sinistra).

3. TEOREMA DI DEHN-NIELSEN-BAER, II PARTE

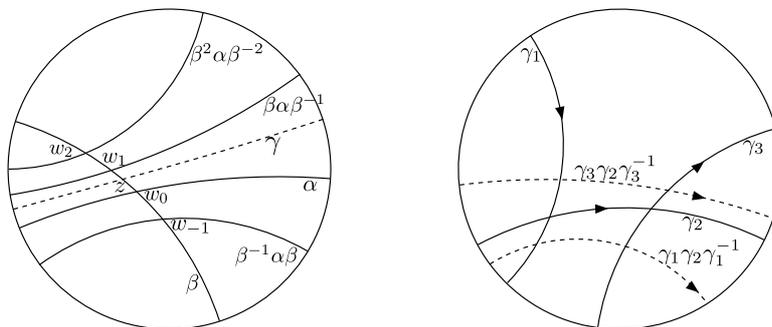


Figura 3.5: Fatti 3 e 4 della proposizione 3.2.4. Abbiamo omesso ovunque la dicitura Ax .

Prima di tutto osserviamo che, ogni volta che $i(a, b) \neq 0$, tutti gli elementi di A sono linkati con β , in quanto $Ax(\beta^k \alpha \beta^{-k}) = \Delta_\beta^k(Ax(\alpha))$; siano w_k i rispettivi punti di intersezione. Se $i(a, b) = 1$, supponiamo per assurdo che $\gamma = \delta \alpha \delta^{-1} \sim \beta$ per qualche $\delta \neq \beta^k$.

L'asse di γ non può intersecare nessuno fra gli $Ax(\beta^k \alpha \beta^{-k})$ (in quanto assi che corrispondono alla stessa geodetica semplice in Σ_g , quella che rappresenta a); dunque il suo punto di intersezione con $Ax(\beta)$ (che chiamiamo z) è compreso su $Ax(\beta)$ fra qualche coppia w_k e w_{k+1} . Tuttavia, la porzione di $Ax(\beta)$ tra tali due punti è un sollevamento della geodetica rappresentante di b , in quanto b è una classe di curve semplici, e quindi tra w_k e $\Delta_\beta(w_k) = w_{k+1}$ non ci sono punti che si identificano al quoziente.

Dunque z e w_k si proiettano su punti distinti di intersezione con la geodetica rappresentante di a . Questo è assurdo, perché le geodetiche sono sempre in posizione minimale.

Al contrario, se $i(a, b) > 1$, si vede facilmente che l'insieme dei coniugati di α linkati con β contiene strettamente A : infatti, prese le due geodetiche rappresentanti, uno dei loro punti di intersezione si solleva ad un punto z che non è nessuno dei w_k , e da qui troviamo un $\gamma \in a$ come nell'assurdo di sopra.

Fatto 4. Ci basta dimostrare che ciò è vero per 3 curve, c_1, c_2, c_3 , che saranno rappresentate da qualche terna $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ disposta come in figura 3.5 a destra (eventualmente con $Ax(\gamma_2)$ orientato in modo opposto a quanto indicato). Tale disposizione si esprime in termini di link dicendo che $Ax(\gamma_2)$ si trova tra $\Delta_{\gamma_1} Ax(\gamma_2) = Ax(\gamma_1 \gamma_2 \gamma_1^{-1})$ e $\Delta_{\gamma_3} Ax(\gamma_2) = Ax(\gamma_3 \gamma_2 \gamma_3^{-1})$. Dunque la disposizione è preservata da Φ , e dà luogo ad una catena di 3 curve, con numeri di intersezione entrambi $+1$ o -1 . \square

3.3 Conclusione

Concludiamo ora la dimostrazione del teorema di Dehn-Nielsen-Baer.

Passo 1. Se otteniamo Σ_g come quoziente di un $4g$ -gono, dal teorema di Van Kampen abbiamo che $\pi_1(\Sigma_g, x_0)$ è generato dalle curve chiuse $\gamma_1, \dots, \gamma_{2g}$ in cui si sono quozientati i lati del $4g$ -gono (con qualche orientazione).

Si può vedere che si ha la situazione in figura 3.6, ovvero che la $2g$ -upla delle rispettive classi di isotopia (libera) $\Lambda = (c_1, \dots, c_{2g})$ è la solita catena di curve. Se $\Phi \in \text{Aut}(\pi_1(\Sigma_g))$, $\Phi(\Lambda)$ è ancora una catena di curve e dunque esiste $f \in \text{Omeo}(\Sigma_g)$ che

3.3 Conclusion

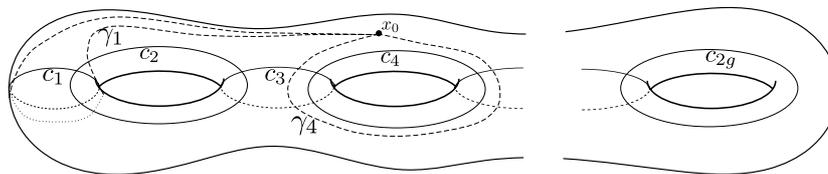


Figura 3.6: c_1, \dots, c_{2g} sono le classi di isotopia (libera) dei generatori $\gamma_1, \dots, \gamma_{2g}$ di $\pi_1(\Sigma_g, x_0)$ descritti nella dimostrazione. Per non confondere il disegno abbiamo disegnato solo due dei γ_i .

porta Λ in $\Phi(\Lambda)$. Richiediamo che i γ_i riproducano con i loro link all'infinito in \mathbb{H}^2 le intersezioni fra i c_i (se sostituiamo i γ_i con loro opportuni coniugati, possiamo ottenere ciò analogamente a quanto visto nella dimostrazione della proposizione 3.2.4).

Vogliamo dimostrare che $[f] \in \text{MCG}^\pm(\Sigma_g)$ induce $[\Phi] \in \text{Out}(\pi_1(\Sigma_g))$. Se f_* è l'automorfismo di π_1 indotto da f , vogliamo dire che $\Psi := f_*^{-1} \circ \Phi \in \text{Inn}(\pi_1(\Sigma_g))$. Basterà dimostrare che $\Psi(\gamma_i) = \delta \gamma_i \delta^{-1}$ per ogni i , per qualche $\delta \in \pi_1(\Sigma_g, x_0)$ fissato.

Denotiamo con I_α l'automorfismo di coniugio per $\alpha \in \pi_1(\Sigma_g, x_0)$. Vale $\Psi(\Lambda) = \Lambda$; in particolare $\Psi(c_1) = c_1$, dunque si ha $\Psi(\gamma_1) = \alpha \gamma_1 \alpha^{-1} \Rightarrow I_{\alpha^{-1}} \circ \Psi(\gamma_1) = \gamma_1$ per qualche $\alpha \in \pi_1(\Sigma_g, x_0)$. Poiché $i(c_1, c_2) = 1$ e $I_{\alpha^{-1}} \circ \Psi$ è un automorfismo (dunque preserva i link) che fissa γ_1 , dalla dimostrazione del fatto 3 della proposizione 3.2.4 si ha $I_{\alpha^{-1}} \circ \Psi(\gamma_2) = \gamma_1^k \gamma_2 \gamma_1^{-k}$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$. Ma allora $I_{\gamma_1^{-k} \alpha^{-1}} \circ \Psi(\gamma_2) = \gamma_2$, e d'altra parte anche $I_{\gamma_1^{-k} \alpha^{-1}} \circ \Psi(\gamma_1) = \gamma_1^{-k+1+k} = \gamma_1$.

Passo 2. Dimostreremo il seguente fatto: $\text{Ax}(\gamma_3)$ si trova tra $\text{Ax}(\gamma_2^m \gamma_1 \gamma_2^{-m})$ e $\text{Ax}(\gamma_2^{m+1} \gamma_1 \gamma_2^{-(m+1)})$ per qualche $m \in \mathbb{Z}$, e questa proprietà lo caratterizza univocamente fra gli elementi linkati con γ_2 all'interno della sua classe di coniugio (c_3).

Gli assi di γ_3 e $\gamma_2^i \gamma_1 \gamma_2^{-i}$ non possono linkarsi all'infinito per nessun $i \in \mathbb{Z}$, perché $i(c_1, c_3) = 0$. Poiché $\text{Ax}(\gamma_2^i \gamma_1 \gamma_2^{-i}) = \Delta_{\gamma_2}^i(\text{Ax}(\gamma_1))$, al tendere di i a $+\infty$ o a $-\infty$, il punto di intersezione tra $\text{Ax}(\gamma_2^i \gamma_1 \gamma_2^{-i})$ e $\text{Ax}(\gamma_2)$ tende rispettivamente ai due punti estremi di $\text{Ax}(\gamma_2)$ (si ripropone la situazione della figura 3.5 a sinistra, dove sostituiamo i nomi $\alpha \rightsquigarrow \gamma_1, \beta \rightsquigarrow \gamma_2, \gamma \rightsquigarrow \gamma_3$).

In particolare, esisteranno due valori di i , diciamo m e $m+1$, tali che il punto di intersezione fra gli assi di γ_2 e γ_3 si trova fra le intersezioni di $\text{Ax}(\gamma_2)$ con $\text{Ax}(\gamma_2^m \gamma_1 \gamma_2^{-m})$ e $\text{Ax}(\gamma_2^{m+1} \gamma_1 \gamma_2^{-(m+1)})$: ma allora $\text{Ax}(\gamma_3)$ si trova fra questi due assi.

Inoltre, essendo $i(c_2, c_3) = 1$, vale ancora quanto detto nella dimostrazione del fatto 3 della prop. 3.2.4, dunque ogni altro elemento in c_3 linkato con γ_2 sarà della forma $\gamma_2^n \gamma_3 \gamma_2^{-n}$, il cui asse giace dunque tra $\text{Ax}(\gamma_2^{m+n} \gamma_1 \gamma_2^{-m-n})$ e $\text{Ax}(\gamma_2^{m+n+1} \gamma_1 \gamma_2^{-m-n-1})$.

Passo 3. $I_{\gamma_1^{-k} \alpha^{-1}}(\gamma_3)$ sarà un elemento della classe di coniugio c_3 linkato con γ_2 (perché γ_2 viene fissato da $I_{\gamma_1^{-k} \alpha^{-1}}$ e i link sono preservati), il cui asse si trova fra gli stessi $\text{Ax}(\gamma_2^m \gamma_1 \gamma_2^{-m})$ e $\text{Ax}(\gamma_2^{m+1} \gamma_1 \gamma_2^{-(m+1)})$ fra cui si trova $\text{Ax}(\gamma_3)$ (in quanto anche γ_1 viene fissato e il "trovarsi tra" si esprime in termini di link).

Per il passo 2, allora, γ_3 viene fissato da $I_{\gamma_1^{-k} \alpha^{-1}} \circ \Psi$. Possiamo vedere tutto ciò come un passo induttivo, che possiamo ripetere per dimostrare che γ_4 viene fissato, e così via per tutti i γ_i . \square

Nel caso di superfici S con punture, l'enunciato del teorema di Dehn-Nielsen-Baer si modifica nel modo seguente:

3. TEOREMA DI DEHN-NIELSEN-BAER, II PARTE

Teorema 3.3.1 (Dehn-Nielsen-Baer per superfici con punture). *Sia S una superficie con punture, e sia $\text{Out}^*(\pi_1(S)) < \text{Out}(\pi_1(S))$ il sottogruppo degli automorfismi esterni che fissano l'insieme delle classi di coniugio che corrispondono a classi di isotopia di curve semplici chiuse che girano attorno ad una puntura. Allora la mappa naturale $\psi : \text{MCG}^\pm(S) \rightarrow \text{Out}(\pi_1(S))$ è iniettiva e la sua immagine è $\text{Out}^*(\pi_1(S))$.*

Capitolo 4

Dehn twists

4.1 Definizione di Dehn twist

Dopo aver dimostrato il teorema di Dehn-Nielsen-Baer, ci occupiamo ora di trovare un insieme di generatori del mapping class group di facile espressione: saranno i *Dehn twists*. I risultati di questo capitolo e del prossimo sono tratti quasi tutti da [1].

Sia $A = S^1 \times I$ il cilindro (diffeomorfo all'anello chiuso), e consideriamo su di esso il diffeomorfismo

$$\begin{aligned} T : \quad A &\longrightarrow A \\ (\theta, t) &\longmapsto (\theta + 2\pi t, t) \end{aligned} \tag{4.1}$$

T è sostanzialmente uno "storcimento" del cilindro, ed è l'identità su ∂A .

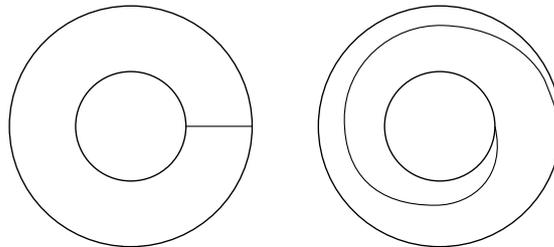


Figura 4.1: Il modo in cui il diffeomorfismo T trasforma un arco che connette ortogonalmente le due componenti di bordo di A (visto come anello anziché come cilindro).

Definizione 4.1.1. Sia S una superficie, e sia a la classe di isotopia di una curva semplice chiusa α su S . Sia U un intorno tubolare chiuso di α , e sia $\phi : A \rightarrow U$ un omeomorfismo con cui immergiamo A in S preservandone l'orientazione. Definiamo il *Dehn twist attorno ad a* come la mapping class T_a dell'omeomorfismo di S dato da

$$f(x) = \begin{cases} \phi \circ T \circ \phi^{-1} & \text{se } x \in U; \\ x & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{4.2}$$

4. DEHN TWISTS

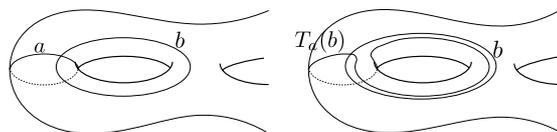


Figura 4.2: Il modo in cui il Dehn twist attorno ad una curva rappresentante di una classe di isotopia a trasforma un'altra classe di isotopia b .

Una prima osservazione da fare è che T_a è ben definito: nella definizione viene lasciata libera scelta della curva chiusa rappresentante α , del suo intorno tubolare U , dell'immersione ϕ . Gli omeomorfismi che si ottengono, tuttavia, sono tutti isotopi.

OSSERVAZIONE 4.1.2. Il Dehn twist attorno ad una curva la cui classe di isotopia è a , e quello attorno a a^{-1} , sono la stessa mapping class: infatti, il vincolo dato nella definizione, cioè che l'embedding $\phi : A \rightarrow U$ rispetti l'orientazione, prescinde dall'orientazione delle curve della classe a . Per questo motivo ci sarà utile, parlando di Dehn twist, utilizzare classi di isotopia *non orientata* fra curve semplici chiuse: ovvero, parleremo di isotopia fra i soli supporti geometrici delle curve. Tra classi di isotopia non orientata è possibile ancora definire il numero di intersezione geometrico (ma ovviamente non quello algebrico).

Il Dehn twist attorno ad a modifica una curva b che interseca a come si può vedere in figura 4.2: percorrendo b in qualche verso, ogni volta che si incontra un'intersezione con a si segue tutto il percorso di a girando “verso sinistra”, e poi si torna a seguire b fino all'intersezione successiva. (Tutto questo parlando in modo soltanto qualitativo: infatti con i Dehn twists non si creano autointersezioni.)

La descrizione di T_a^{-1} è identica, salvo che si gira “verso destra”. \diamond

OSSERVAZIONE 4.1.3. Chiarifichiamo qui una notazione che verrà spesso usata nel seguito. Se f, g sono omeomorfismi isotopi di S ed α, β sono curve chiuse liberamente omotope su S , allora $f(\alpha), f(\beta), g(\alpha), g(\beta)$ lo sono. Allora, se \tilde{f} è una mapping class ed a è una classe di omotopia libera di curve chiuse (di isotopia, se sono semplici), ha senso parlare della classe di omotopia libera/isotopia $\tilde{f}(a)$. \diamond

4.2 Motivazione

Introduciamo un nuovo oggetto algebrico che ci interesserà nel seguito:

Definizione 4.2.1. Sia S una superficie. Il *mapping class group puro* di S è il sottogruppo normale $\text{PMCG}(S) < \text{MCG}(S)$ delle mapping classes che fissano ogni puntura di S .

Nel seguito denoteremo $\Sigma_{g,n}$ la superficie (senza bordo) di genere g con n punture. Se \mathfrak{S}_n è il gruppo simmetrico su n elementi, si ha (vedi sezione 5.7)

$$\text{MCG}(S)/\text{PMCG}(S) \cong \mathfrak{S}_n.$$

Talvolta, se c è una classe di isotopia di una curva γ semplice chiusa su S , denoteremo $S \setminus c$ la superficie con punture $S \setminus \gamma$: per il teorema 1.6.3, al variare della curva semplice $\gamma \in c$, si ottengono superfici omeomorfe, e dunque tale notazione ha senso.

Il nostro scopo sarà dimostrare il seguente teorema. La prima dimostrazione è stata data nel 1922 da Max Dehn.

Teorema 4.2.2 (Dehn). *Se $g \geq 1$, il gruppo $\text{PMCG}(\Sigma_{g,n})$ è finitamente generato da Dehn twists attorno a curve che non sconnettono $\Sigma_{g,n}$.*

In particolare, i Dehn twists generano $\text{MCG}(\Sigma_g)$ per $g \geq 1$. Osserviamo che qualunque Dehn twist preserva l'orientazione, dunque non c'è speranza di avere un risultato simile per $\text{MCG}^\pm(\Sigma_g)$. Analogamente, poiché tutti i Dehn twists sono elementi del mapping class group puro, per generare tutto il mapping class group di una superficie puntata è necessario avere anche altri tipi di mapping classes (definiremo successivamente gli *half twists*).

OSSERVAZIONE 4.2.3. Abbiamo dimostrato che $\text{MCG}^\pm(\Sigma_1) \cong \text{GL}(2, \mathbb{Z})$ in un modo naturale. Tale isomorfismo induce un isomorfismo $\text{MCG}(\Sigma_1) \cong \text{SL}(2, \mathbb{Z})$, e quest'ultimo è generato dalle applicazioni lineari

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Queste ultime, viste come automorfismi di $\pi_1(\Sigma_1, x_0)$, corrispondono alle mapping classes degli omeomorfismi rappresentati in figura 4.3.

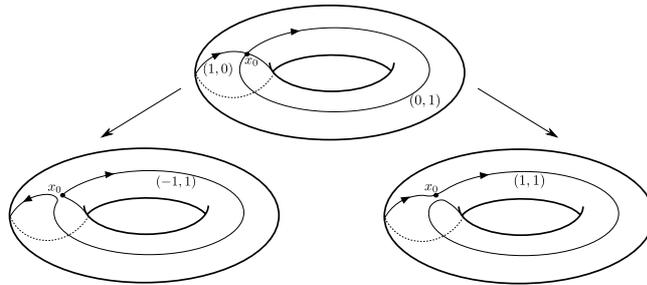


Figura 4.3: Due mapping classes di Σ_1 che ne generano il mapping class group. Nel primo disegno in basso non abbiamo ridisegnato la curva $(1, 0)$, che resta fissata, ed idem per la curva $(0, 1)$ nel secondo.

Osserviamo che il comportamento di queste due mappe sulle curve corrispondenti agli elementi $(1, 0)$ e $(0, 1)$ è lo stesso dei Dehn twist attorno a queste due curve: poiché esiste una bigezione fra mapping classes ed automorfismi (esterni) del gruppo fondamentale per il teorema di Dehn-Nielsen-Baer, tali due Dehn twists genereranno il mapping class group del toro. \diamond

4.3 Proprietà dei Dehn twists

Denotiamo il prodotto di elementi del mapping class group analogamente a come si fa per la composizione di funzioni: ovvero, si intende che le mapping classes sono applicate da destra verso sinistra.

Il seguente lemma è un'osservazione facile da verificare:

Lemma 4.3.1. *Se $f \in \text{MCG}(S)$, allora $T_{f(a)} = fT_a f^{-1}$.*

OSSERVAZIONE 4.3.2. Se a, b sono classi di isotopia di curve semplici chiuse che non separano, per il principio di cambio delle coordinate esiste $f \in \text{MCG}(S)$ tale che $f(a) = b$. Dunque $T_b = fT_a f^{-1}$, ovvero T_a e T_b sono elementi coniugati in $\text{MCG}(S)$. \diamond

4. DEHN TWISTS

Proposizione 4.3.3. *Se a è la classe di isotopia non orientata di una curva essenziale in una superficie S , allora il Dehn twist T_a è un elemento non banale di $\text{MCG}(S)$.*

Dim. Se a è una classe di isotopia di curve che non sconnettono S , per il principio di cambio delle coordinate esiste un omeomorfismo f di S tale che $f(a)$ sia la classe della curva denotata con a in figura 4.2: se dimostreremo essere non banale il Dehn twist attorno a questa curva, non lo sarà neanche quello attorno alla curva a originaria, in quanto è coniugato ad esso (vedi lemma 4.3.1).

Sempre riferendoci alla figura 4.2, abbiamo che $i(T_a(b), b) = 1$: infatti, poiché i rappresentanti delle due classi in figura hanno un solo punto di intersezione, non possono originare bigoni (vedi proposizione 1.4.7). Ma allora $T_a(b) \neq b$, perché $i(b, b) = 0$ sempre. Dunque T_a è non banale.

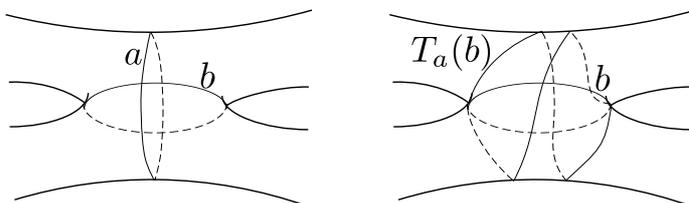


Figura 4.4: Le curve a e b nel secondo caso della dimostrazione della proposizione 4.3.3.

Se invece a è una classe di isotopia di curve che sconnettono S , ancora utilizzando il principio di cambio delle coordinate possiamo supporre che a sia la curva in figura 4.4; esisterà allora una curva b tale che $i(a, b) = 2$. I rappresentanti per $T_a(b)$ e b in figura si intersecano 4 volte, e per ogni arco in cui si divide il rappresentante di b c'è un arco del rappresentante di $T_a(b)$ che ha gli stessi estremi; ma si vede dalla figura che ognuna di queste coppie di archi dà luogo ad una curva che non sconnette S , quindi non ad un bigono. Dunque $i(T_a(b), b) = 4 \neq 0$. La conclusione è la stessa di sopra. \square

OSSERVAZIONE 4.3.4. È il caso di notare che, se S è una superficie con bordo, anche le curve omotope alle componenti di bordo danno luogo a Dehn twists non banali: con il solito procedimento di attaccamento di più copie di S in modo da eliminare il bordo, una curva di bordo diventa una curva essenziale e quindi, nella nuova superficie, il relativo Dehn twist non è isotopo all'identità. Se lo fosse in S , l'isotopia indurrebbe un'isotopia della nuova superficie.

Nel caso delle punture, questo non è più vero: infatti per annullare l'effetto di un Dehn twist attorno ad una curva omotopa ad una puntura basta ruotare il disco puntato che essa delimita (per lo stesso motivo, un Dehn twist attorno ad una curva omotopicamente banale è l'identità in $\text{MCG}(S)$). \diamond

Proposizione 4.3.5. *Siano a, b classi di isotopia non orientata di curve chiuse semplici non omotopicamente banali su S , $k \in \mathbb{Z}$. Allora $i(T_a^k(b), b) = |k|i(a, b)^2$.*

Da ciò segue facilmente, fra l'altro, che i Dehn twists attorno a curve essenziali sono elementi di ordine infinito in $\text{MCG}(S)$; infatti per una tale classe di isotopia non orientata a ne esiste un'altra b con $i(a, b) > 0$, e dunque $T_a^k(b) \neq b \forall k \neq 0$.

Dim. Tralasciamo casi banali come $i(a, b) = 0$ oppure $k = 0$. Siano α e β curve (orientate) rappresentanti delle due classi in posizione minimale e trasversali. In figura 4.5 a

4.3 Proprietà dei Dehn twists

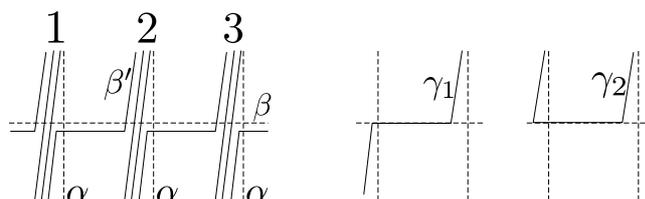


Figura 4.5: La figura relativa alla dimostrazione della proposizione 4.3.5, nel caso $k = 1$ e $i(a, b) = 3$.

sinistra è rappresentato schematicamente come sono poste localmente le intersezioni fra β e β' , che è un rappresentante di $T_a(b)$ facile da ottenere visualmente (ricordiamo che si deve “girare verso sinistra”. Si ha $\#\beta \cap \beta' = |k|\#\alpha \cap \beta = |k|i(a, b)^2$. Bisogna solo verificare che non possono esserci bigoni.

Selezioniamo due intersezioni consecutive di β con β' , e vediamo quali bigoni potrebbero formarsi: se scegliamo due intersezioni nella stessa delle regioni che in figura abbiamo numerato 1, 2, 3, il bigono sarebbe forzatamente bordato da due archi che costituiscono una curva isotopa ad α , che però non è omotopicamente banale.

Prendiamo ora due intersezioni in regioni diverse. Se queste hanno la stessa orientazione, la curva γ_1 nella parte destra di figura 4.5 è l'unico potenziale bigono; ma un bigono richiede che gli archi si intersechino in due punti con orientazioni opposte.

Quest'ultimo caso è rappresentato dalla curva γ_2 ; se essa bordasse un bigono tra β e β' , fuori dalla figura dovrebbe seguire sempre α , altrimenti sarebbe costretta ad intersecare β da qualche altra parte. Dunque ci sarebbe un bigono anche tra α e β , contro la nostra assunzione. \square

Proposizione 4.3.6. *Siano a, b classi di isotopia non orientata di curve semplici chiuse non omotopicamente banali su una superficie S , $f \in \text{MCG}(S)$. Allora*

1. $T_a = T_b \iff a = b$;
2. f commuta con $T_a \iff f(a) = a$;
3. $i(a, b) = 0 \iff T_b(a) = a \iff T_a T_b = T_b T_a$;
4. (Relazione d'intreccio) $i(a, b) = 1$ oppure $a = b \iff T_a T_b(a) = b \iff T_a T_b T_a = T_b T_a T_b$.

Dim. 1. Se $T_a = T_b$, supponiamo per assurdo che $a \neq b$. Cerchiamo una classe di isotopia c tale che $i(a, c) > 0$ e $i(b, c) = 0$. Se $i(a, b) > 0$, va bene $c = b$. Altrimenti, tramite il principio di cambio delle coordinate, tenendo conto di se e come a e b siconnettono S , ci si riconduce a pochi casi particolari in cui è facile vedere l'esistenza di una tale c .

Allora, per la proposizione 4.3.5, $i(T_a(c), c) = i(a, c)^2 > 0$, mentre $T_b(c) = c$ perché b e c non si intersecano. Allora $T_a(c) \neq T_b(c)$, assurdo.

2. È sufficiente la seguente catena di coimplicazioni: $f T_a = T_a f \iff f T_a f^{-1} = T_a \iff T_{f(a)} = T_a$ (vedi lemma 4.3.1) $\iff f(a) = a$ per il punto 1.

3. La seconda complicazione è il punto 2 dove poniamo $f = T_b$, mentre la prima freccia \implies è banale.

4. DEHN TWISTS

Per la prima freccia \Leftarrow , invece, osserviamo che se $i(a, b) > 0$ allora $i(T_a(b), b) = i(a, b)^2 > 0$, dunque $T_a(b) \neq b$.

4. Per l'equivalenza del secondo e del terzo fatto, osserviamo che

$$\begin{aligned} T_a T_b T_a &= T_b T_a T_b \Leftrightarrow T_a T_b T_a T_b^{-1} T_a^{-1} = T_b \Leftrightarrow T_a T_{T_b(a)} T_a^{-1} = T_b \\ &\Leftrightarrow T_{T_a T_b(a)} = T_b \Leftrightarrow T_a T_b(a) = b. \end{aligned}$$

Vediamo ora la freccia \Rightarrow della prima implicazione. Il caso $a = b$ è banale. Se $i(a, b) = 1$, consideriamo una coppia di rappresentanti in posizione minimale. Se si taglia S lungo uno dei due, l'altro deve diventare un arco che connette le due nuove componenti di bordo; da ciò si evince che a e b non sconnettono S . Tramite il principio di cambio delle coordinate, ci si riconduce alla situazione in figura 4.6.

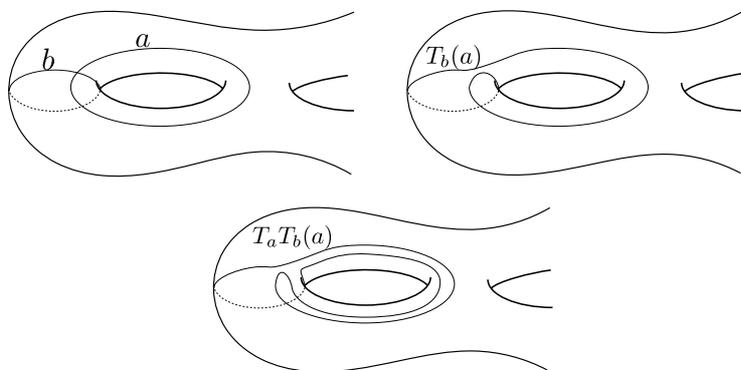


Figura 4.6: Se $i(a, b) = 1$, allora $T_a T_b(a) = b$.

Per la freccia \Leftarrow , supponiamo $a \neq b$. Abbiamo che $T_a T_b(a) = b \Rightarrow i(a, T_a T_b(a)) = i(a, b)$; applicando T_a^{-1} alle due curve a sinistra il numero di intersezione non cambia, dunque $i(a, T_b(a)) = i(a, b)$, e d'altra parte $i(a, T_b(a)) = i(a, b)^2$ per la proposizione 4.3.5. Dunque $i(a, b) = 0$ oppure 1, e la prima ipotesi è da scartare perché altrimenti $T_a T_b(a) = a$. \square

Riportiamo inoltre due conseguenze della relazione d'intreccio prima descritta:

Lemma 4.3.7. *Siano a, b classi di isotopia non orientata di curve semplici chiuse essenziali su una superficie S , che non la sconnettono, con $i(a, b) = 0$. Allora esiste un prodotto di Dehn twists attorno a curve che non sconnettono S che porta la classe a nella classe b .*

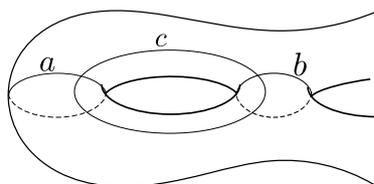


Figura 4.7: Le curve del lemma 4.3.7.

4.4 La mappa di spinta di un punto

Dim. Supponiamo $a \neq b$. Come di consueto, utilizziamo il principio di cambio delle coordinate per ricondurci al caso in cui a e b sono le classi delle curve in figura 4.7, e dunque vediamo che esiste una classe c che non sconnette S con $i(a, c) = i(b, c) = 1$ (e questo, allora, sarà vero qualunque siano a e b). Allora, per la relazione di intreccio (vedi fatto 4 della proposizione 4.3.6), $(T_c T_b)(T_a T_c)(a) = (T_c T_b)(c) = b$. \square

Lemma 4.3.8. *Siano a una classe di isotopia orientata di curve semplici chiuse essenziali su una superficie S di genere ≥ 1 , che non è sconnessa da a . Allora esiste un prodotto di Dehn twists attorno a curve che non sconnettono S che porta la classe a nella classe a^{-1} .*

Dim. Consideriamo una classe di isotopia b essenziale, che non sconnette S , con $i(a, b) = 1$ (che troviamo tramite il principio di cambio delle coordinate). Dalla relazione di intreccio si ha $(T_b T_a^2 T_b)(a) = a$ come classe non orientata, ma si verifica direttamente che l'orientazione viene invertita da tale mapping class. \square

4.4 La mappa di spinta di un punto

Nel prossimo capitolo parleremo della successione esatta di Birman, nella quale viene coinvolta la *mappa di spinta di un punto* (point pushing map). Ne descriviamo qui le proprietà che ci serviranno nel seguito.

Sia $B = S^1 \times I \setminus \{(0, 1/2)\}$ (S^1 è parametrizzato in coordinate polari): B è diffeomorfo all'anello chiuso meno un punto. Definiamo un omeomorfismo di B in sé:

$$P(\theta, t) = \begin{cases} (\theta + 4\pi t, t) & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2; \\ (\theta - 4\pi t, t) & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

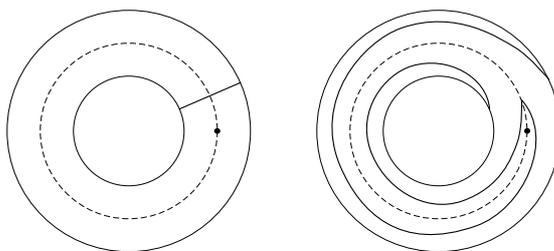


Figura 4.8: L'applicazione P sull'anello chiuso meno un punto: il modo in cui viene trasformato un arco che connette le due componenti di bordo.

Consideriamo ora una superficie S con un punto base x_0 nell'interno di S , α una curva semplice chiusa su S basata in x_0 . Sia U un intorno tubolare chiuso di α , e $\phi : S^1 \times I \rightarrow U$ un omeomorfismo che rispetta l'orientazione, tale che $\phi(0, 1/2) = x_0$ e $\phi|_{S^1 \times 1/2} = \alpha$ (cioè, la restrizione di ϕ è la parametrizzazione di α , o quantomeno ne rispetta l'orientazione). Allora, detti $S' = S \setminus \{x_0\}$ e $U' = U \setminus \{x_0\} \subseteq S$, definiamo su S' l'omeomorfismo

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \phi \circ P \circ \phi^{-1}(x) & \text{se } x \in U'; \\ x & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

4. DEHN TWISTS

La mapping class di f_α è un elemento di $\text{PMCG}(S')$ e si denota $\text{Push}(\alpha)$. Analogamente per quanto accadeva per i Dehn twists, la mapping class che si ottiene è la stessa al variare della scelta dell'intorno tubolare U e dell'embedding ϕ ; e si può anche considerare, al posto della curva α , qualunque altra curva semplice chiusa ad essa omotopa relativamente al punto x_0 . Ovvero, α può essere considerato un elemento di $\pi_1(S, x_0)$.

Da un punto di vista intuitivo, la mappa $\text{Push}(\alpha)$ può essere vista come quella che si ottiene su S “spingendo” il punto x_0 lungo α fino a tornare su se stesso, e distorcendo con continuità un suo intorno. Chiaramente tale mappa è omotopicamente banale su S , ma l'omotopia ovvia non è più applicabile quando si considera tale mappa su S' .

Osserviamo che, se a è la classe di isotopia non orientata della curva semplice chiusa $\phi(S^1 \times \{0\})$, e b è quella di $\phi(S^1 \times \{1\})$ (a e b sono le componenti di bordo di U'), allora $\text{Push}(\alpha) = T_a T_b^{-1} = T_b^{-1} T_a$.

Lemma 4.4.1. *Il gruppo fondamentale di una superficie S di genere positivo è finitamente generato da classi di curve chiuse semplici essenziali che non sconnettono S .*

Dim. (traccia) Basta dimostrarlo per superfici senza bordo, perché in omotopia ogni componente di bordo ha lo stesso ruolo di una puntura. Per superfici chiuse, abbiamo osservato che la tesi è vera all'inizio della sezione 3.3.

Otteniamo $\Sigma_{g,n}$ come quoziente di un $4g$ -gono con n punture, nel solito modo. Per il teorema di Van Kampen, un insieme di generatori di $\pi_1(\Sigma_g)$ è dato dalle curve chiuse su cui si sono quotientati i lati del $4g$ -gono $\gamma_1, \dots, \gamma_{2g}$, e da n curve chiuse $\delta_1, \dots, \delta_n$ basate nel punto x_0 , ciascuna omotopa ad una puntura.

Mentre le prime sono essenziali, semplici e non sconnettono S , le seconde non sono essenziali per definizione. Ma le classi di omotopia (basata in x_0) delle curve $\gamma_1 \delta_1, \dots, \gamma_n \delta_n$ invece rispettano le ipotesi: se non fossero essenziali, “rimuovendo le punture” dovrebbero divenire omotopicamente banali, il che non è vero perché diventano omotope a γ_1 ; e se sconnetterebbero $\Sigma_{g,n}$, ancora rimuovendo le punture vediamo che γ_1 dovrebbe sconnettere Σ_g . Che in tali classi di omotopia ci siano delle curve semplici si vede facilmente. \square

Abbiamo quindi a disposizione un insieme di generatori semplici per $\pi_1(S)$, sui quali è possibile definire la mappa di spinta del punto x_0 . Si può vedere che è possibile estendere tale definizione ad un omomorfismo di gruppi

$$\text{Push} : \pi_1(S, x_0) \longrightarrow \text{PMCG}(S').$$

Proposizione 4.4.2. *Sia S una superficie di genere positivo, $x_0 \in S$ un punto interno, e sia $S' = S \setminus \{x_0\}$. Allora il sottogruppo $\text{Push}(\pi_1(S, x_0)) < \text{PMCG}(S')$ è contenuto in un sottogruppo generato da un numero finito di Dehn twists attorno a curve essenziali che non sconnettono S' .*

Dim. Consideriamo un insieme di generatori \mathcal{A} di $\pi_1(S, x_0)$ come quello dato dal lemma 4.4.1. Abbiamo già osservato che per ogni elemento α di tale insieme, vale $\text{Push}(\alpha) = T_a T_b^{-1}$ dove a, b sono le classi di isotopia delle componenti di bordo di un intorno tubolare di α . Allora $\text{Push}(\pi_1(S, x_0))$ è contenuto nel sottogruppo generato dai Dehn twists attorno a componenti di bordo di intorni tubolari di curve in \mathcal{A} .

Poiché ogni elemento di \mathcal{A} corrisponde a curve semplici essenziali che non sconnettono S , lo stesso si potrà dire delle relative componenti di bordo degli intorni tubolari. \square

Capitolo 5

Generatori del mapping class group

5.1 Prodotti fibrati

Nel seguito, faremo abbondante uso della *successione esatta in omotopia per prodotti fibrati*. Introdurremo brevemente l'argomento, prima di usarlo: qui è dato un breve riassunto di quanto esposto in [2].

Innanzitutto, avremo bisogno del concetto di *omotopia relativa*. Date due coppie puntate di spazi topologici $(\tilde{X}, \tilde{A}, \tilde{x}_0)$ e (X, A, x_0) (con $x_0 \in A \subseteq X$ e $\tilde{x}_0 \in \tilde{A} \subseteq \tilde{X}$), consideriamo due applicazioni $f, g : (\tilde{X}, \tilde{A}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, A, x_0)$ (con questa notazione intendiamo che f, g hanno per dominio \tilde{X} , ed inoltre $f(\tilde{A}), g(\tilde{A}) \subseteq A$ e $f(\tilde{x}_0) = g(\tilde{x}_0) = x_0$); f, g sono omotope con punto base x_0 relativamente ad A se esiste un'omotopia $F : (\tilde{X} \times I, \tilde{A} \times I, \{\tilde{x}_0\} \times I) \rightarrow (X, A, x_0)$ tale che $F(\cdot, 0) = f$ e $F(\cdot, 1) = g$.

Definiamo allora $\pi_n(X, A, x_0)$ come l'insieme delle classi di omotopia di applicazioni continue $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$, dove $J^{n-1} = \overline{\partial I^n} \setminus I^{n-1}$. I π_n assoluti sono un caso particolare di questi, quello in cui $A = \{x_0\}$.

Per $n \geq 2$, $\pi_n(X, A, x_0)$ è munito di una struttura di gruppo analoga a quella del caso assoluto. Se x è la prima coordinata di I^n , e \mathbf{y} è il vettore delle altre (supponendo di aver numerato le coordinate in modo che I^{n-1} si identifichi con una faccia di I^n che contenga $I \times \{\mathbf{0}\}$) il prodotto delle classi delle applicazioni f, g è dato dalla classe dell'applicazione

$$(f * g)(x, \mathbf{y}) := \begin{cases} f(2x, \mathbf{y}) & \text{se } 0 \leq x \leq 1/2; \\ g(2x - 1, \mathbf{y}) & \text{se } 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

È chiaro che, per $n = 1$, un tale prodotto non è ben definito.

Si dimostra che i gruppi di omotopia relativa di una coppia (X, A, x_0) sono collegati a quelli assoluti in questo modo:

Proposizione 5.1.1. *Sia (X, A, x_0) una coppia puntata di spazi topologici. Allora la seguente successione:*

$$\cdots \rightarrow \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_n} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_n} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0) \xrightarrow{i_{n-1}} \cdots \rightarrow \pi_0(X, x_0)$$

è esatta.

5. GENERATORI DEL MAPPING CLASS GROUP

Anche se non tutti gli insiemi che compaiono nella successione sono gruppi, si ha esattezza nel senso che l'immagine di un'applicazione coincide con gli elementi che vengono inviati nella classe della mappa costante dall'applicazione successiva.

Più nel dettaglio, l'applicazione i_* è quella indotta dall'inclusione $i : A \hookrightarrow X$; j_* è indotta dall'identità $j : (X, x_0, x_0) \rightarrow (X, A, x_0)$; ∂ si ottiene dalla restrizione delle mappe, definite su I_n , a I_{n-1} .

Un'altra definizione utile è la seguente: si dice che una terna $p : E \rightarrow B$ ha la *proprietà del sollevamento delle omotopie* rispetto ad uno spazio X se per ogni mappa $f : X \rightarrow B$, che sia omotopa a qualche altra applicazione tramite un'omotopia $F : X \times I \rightarrow B$, e per ogni sollevamento $\tilde{f} : X \rightarrow E$ di f (tale che $f = p \circ \tilde{f}$), esiste un sollevamento dell'intera omotopia $\tilde{F} : X \times I \rightarrow E$.

Proposizione 5.1.2. *Supponiamo che $p : E \rightarrow B$, dove B è connesso per archi, abbia la proprietà del sollevamento delle omotopie rispetto ai dischi D^k per ogni $k \geq 0$; sia $b_0 \in B$ un punto base, e $x_0 \in F := p^{-1}(b_0)$. Allora la mappa $p_* : \pi_n(E, F, x_0) \rightarrow \pi_n(B, b_0)$ è un isomorfismo per ogni $n \geq 1$.*

Questo significa che, a partire dalla successione esatta dell'omotopia relativa, si può ottenere una nuova successione esatta

$$\cdots \rightarrow \pi_n(F, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, x_0) \xrightarrow{i_*} \cdots \rightarrow \pi_0(E, x_0) \rightarrow 1 \quad (5.1)$$

L'1 alla fine, ovvero la surgettività dell'applicazione $\pi_0(F, x_0) \rightarrow \pi_0(E, x_0)$, si può dimostrare a partire dall'ipotesi che B sia connesso per archi: infatti, sia C una componente connessa per archi in E . Sia $c \in C$, e consideriamo un cammino in B da $p(c)$ a x_0 . Questo può essere sollevato ad un cammino che parte da c ed arriva in un punto di $C \cap F$; ma allora tale intersezione non è vuota, dunque l'elemento di $\pi_0(E, x_0)$ corrispondente a C è nell'immagine dell'applicazione.

Veniamo ora al punto:

Definizione 5.1.3. Una terna $p : E \rightarrow B$, con B connesso per archi (che supponiamo dotato di un punto base x_0) e p continua e surgettiva, è un *prodotto fibrato* con fibra $F := p^{-1}(x_0) \subset E$ se per ogni $x \in B$ esiste un suo intorno $U \subseteq B$ tale che il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{h} & F \times U \\ & \searrow p & \downarrow \\ & & U \end{array}$$

dove h è un omeomorfismo, e la mappa $F \times U \rightarrow U$ è la proiezione sulla seconda componente.

Si dimostra la seguente:

Proposizione 5.1.4. *I prodotti fibrati hanno la proprietà del sollevamento delle omotopie rispetto a tutti i CW-complessi.*

Dunque, per i prodotti fibrati vale la successione esatta 5.1.

5.2 La successione esatta di Birman

La dimostrazione del teorema di Dehn avverrà essenzialmente per induzione sul genere g della superficie, e sul numero n di punture. La *successione esatta di Birman* sarà lo strumento fondamentale tramite cui costruiremo questo procedimento induttivo.

Useremo il seguente fatto (dimostrato da M.E. Hamstrom in [14, 15, 16]):

Teorema 5.2.1. *Sia S una superficie con $\chi(S) < 0$. Allora, posta su $\text{Omeo}(S)$ la topologia compatta-aperta, la componente connessa cui appartiene l'identità, $\text{Omeo}_0(S)$, è contraibile.*

Teorema 5.2.2. *Siano S una superficie con $\chi(S) < 0$ (anche con punture e/o bordo), $x_0 \in S$ un punto interno. Detta $S' = S \setminus \{x_0\}$, la seguente successione corta è esatta:*

$$1 \rightarrow \pi_1(S, x_0) \xrightarrow{\text{Push}} \text{PMCG}(S') \xrightarrow{\iota} \text{PMCG}(S) \rightarrow 1$$

dove ι è la rilettura di una mapping class pura su S' come una su S , reinserendo il punto x_0 eliminato.

Dim. Sia $\text{POmeo}^+(S) < \text{Omeo}^+(S)$ il sottogruppo degli omeomorfismi di S che, oltre ai punti del bordo, ne fissano le punture; e sia inoltre $\text{Omeo}^+(S, x)$ il sottogruppo degli omeomorfismi che fissano un dato punto $x \in S$.

Consideriamo l'applicazione $p : \text{POmeo}^+(S) \rightarrow S$ data dalla valutazione nel punto x_0 . Allora $p^{-1}(x_0) = \text{Omeo}^+(S, x_0)$, e definiamo $\text{Omeo}^+(S, x_0 \mapsto y) := p^{-1}(y)$. Si vede facilmente che, per ogni $y \in S$, $\text{Omeo}^+(S, x_0 \mapsto y)$ è omeomorfo a $\text{Omeo}^+(S, x_0)$.

Dimostriamo ora che l'applicazione p definisce un prodotto fibrato. Fissato $y \in S$, sia U_y un suo intorno omeomorfo ad un disco aperto; per ogni $u \in U_y$, sia $f_u \in \text{Omeo}^+(U_y)$ tale che $f_u(y) = u$; scegliamo tale f_u con continuità al variare di u , in modo che la mappa $u \mapsto f_u$ sia un omeomorfismo con l'immagine, che denotiamo $f(U_y)$.

Allora la mappa

$$\begin{array}{ccc} \text{Omeo}^+(S, x_0 \mapsto y) \times f(U_y) & \longrightarrow & p^{-1}(U_y) \\ (\phi, f_u) & \longmapsto & f_u \circ \phi \end{array}$$

è un omeomorfismo, in quanto ne troviamo un'inversa, data da

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U_y) & \longrightarrow & \text{Omeo}^+(S, x_0 \mapsto y) \times f(U_y) \\ \psi & \longmapsto & (f_{\psi(y)}^{-1} \circ \psi, f_{\psi(y)}) \end{array} \quad (5.2)$$

Dunque, $p^{-1}(U_y)$ è omeomorfo a $p^{-1}(x_0) \times U_y$; inoltre, usando l'espressione 5.2, si può vedere anche che tale omeomorfismo fa anche commutare il diagramma nella definizione di prodotto fibrato.

Allora vale la successione esatta 5.1, dove scegliamo come punti base $x_0 \in S$ e $id_S \in p^{-1}(x_0)$. In particolare ci concentriamo sul tratto

$$\begin{array}{c} \pi_1(\text{POmeo}^+(S), id_S) \rightarrow \pi_1(S, x_0) \rightarrow \pi_0(\text{POmeo}^+(S, x_0), id_S) \\ \rightarrow \pi_0(\text{POmeo}^+(S), id_S) \rightarrow \pi_0(S, x_0). \end{array}$$

Come già evidenziato precedentemente, in tale successione gli insiemi che compaiono non sono tutti dotati di una struttura naturale di gruppo, ma l'esattezza ha comunque senso.

Si avrà $\pi_1(\text{POmeo}^+(S), id_S) = 1$ per il teorema 5.2.1 (la componente connessa per archi dell'identità in $(\text{Omeo}(S))$ è la stessa che nel sottospazio $\text{POmeo}^+(S)$);

e $\pi_0(S, x_0) = 1$ perché S è connessa per archi. Inoltre $\pi_0(\text{POmeo}^+(S, x_0), id_S)$ e $\pi_0(\text{POmeo}^+(S), id_S)$ si identificano con $\text{PMCG}(S')$ e $\text{PMCG}(S)$ rispettivamente, in modo naturale (le componenti connesse per archi di uno spazio di omeomorfismi sono proprio le classi di isotopia).

Dunque c' è una successione esatta

$$1 \rightarrow \pi_1(S, x_0) \rightarrow \text{PMCG}(S') \rightarrow \text{PMCG}(S) \rightarrow 1,$$

stavolta anche tenendo conto delle strutture di gruppo.

Che le mappe siano quelle indicate nell'enunciato segue dalla canonicità di queste, di quelle che compaiono nella successione esatta per prodotti fibrati, e delle identificazioni trovate. \square

5.3 Il complesso delle curve

Un altro strumento tecnico che ci servirà nella dimostrazione del teorema di Dehn è la connessione di un complesso simpliciale che adesso definiremo.

Definizione 5.3.1. Data una superficie S , il *complesso delle curve* su S è il complesso simpliciale $C(S)$ costruito a partire da un insieme di vertici in bigezione con le classi di isotopia non orientata di curve semplici chiuse essenziali su S . Due vertici corrispondenti a due classi a, b sono collegati da un lato (1-simplesso) se e solo se $i(a, b) = 0$. Nel complesso, inoltre, ci sarà un k -simplesso su $k + 1$ vertici fissati se e solo se tali vertici sono due a due connessi da 1-simplessi.

Definiamo inoltre il *sottocomplesso delle curve che non sconnettono* $\mathcal{N}(S) \subseteq C(S)$, costruito nello stesso modo a partire dalle sole classi di isotopia di curve semplici chiuse essenziali che non sconnettono la superficie S .

Per quanto ci riguarda, consideriamo i complessi $C(S)$ e $\mathcal{N}(S)$ limitati al solo 1-scheletro, cioè sostanzialmente sono dei grafi. In questa sezione dimostreremo che i complessi $C(S)$ e $\mathcal{N}(S)$ sono connessi per quasi tutte le superfici senza bordo; questo ci consentirà di ottenere un primo risultato verso la dimostrazione del teorema di Dehn.

Proposizione 5.3.2. *Il complesso delle curve $C(\Sigma_{g,n})$ è connesso se $3(g - 1) + n \geq 2$.*

Dim. Dobbiamo dimostrare che, comunque prese due classi di isotopia non orientata a, b di curve semplici chiuse essenziali su $\Sigma_{g,n}$, esiste una sequenza $a = c_0, c_1, \dots, c_{m-1}, c_m = b$ di classi di isotopia tali che $i(c_j, c_{j+1}) = 0$ per $j = 0, \dots, m - 1$.

Se $i(a, b) = 0$, abbiamo finito. Se $i(a, b) = 1$, ripetiamo quanto detto nella dimostrazione del fatto 4 della proposizione 4.3.6 per ricondurci al caso in cui sono poste come in figura 4.6. Ciò significa che l'unione di loro opportuni intorni tubolari chiusi è omeomorfa al toro con una componente di bordo. Sia c la classe di tale componente di bordo: se non fosse essenziale, allora dovrebbe bordare un disco o un disco con una puntura. Ma allora la superficie su cui stiamo lavorando è Σ_1 oppure $\Sigma_{1,1}$, e nessuna delle due rispetta le ipotesi dell'enunciato. Allora c è essenziale e $i(a, c) = i(c, b) = 0$.

Se $i(a, b) > 1$, procediamo per induzione su tale numero di intersezione: cercheremo una classe c tale che $i(a, c), i(c, b) < i(a, b)$: a questo punto, per l'ipotesi induttiva, sapremo che esistono due sequenze tra a e c , e tra c e b , come desiderate.

Siano α e β rappresentanti di a e b in posizione minimale, e consideriamo due punti di intersezione consecutivi lungo β (vedi figura 5.1 per una rappresentazione

5.3 Il complesso delle curve

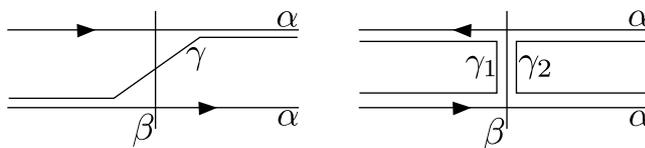


Figura 5.1: Le curve che si possono scegliere per applicare il passo induttivo nella proposizione 5.3.2.

schematica). Se l'orientazione di tali punti di intersezione è la stessa (vedi parte sinistra della figura), si può prendere come c la classe della curva γ : tra α e γ ci sarà esattamente un punto di intersezione, perché γ deve passare da un lato di α all'altro. Questo, per la proposizione 1.4.7, implica che $i(a, c) = 1$; dunque c è una curva essenziale. E si ha quindi $i(a, c), i(c, b) < i(a, b)$.

Se invece i due punti di intersezione hanno orientazioni opposte (vedi figura a destra), consideriamo le due curve γ_1 e γ_2 : queste non potranno essere omotopicamente banali, altrimenti tra α e β c'è un bigono; tuttavia potrebbero essere entrambe omotope ad una puntura: cioè, α borda un disco con due punture. Se ciò accade, $i(a, b) = 2$: infatti α , da entrambe le parti, può essere modificata tramite omotopia in modo da evitare intersezioni con β oltre a quelle in figura. Consideriamo allora le curve γ_3 e γ_4 che si ottengono analogamente alla figura, ma dalla parte esterna rispetto al disco con due punture bordato da α . Queste due non possono essere di nuovo entrambe omotope a punture, altrimenti la superficie su cui ci troviamo è la sfera con 4 punture, che viola la condizione $3(g - 1) + n \geq 2$. In conclusione, si può scegliere c come la classe di isotopia di una delle curve γ_i che sia essenziale. Avremo $i(a, c) = 0$, e $i(c, b) < i(a, b)$. \square

Le uniche superfici con punture che trasgrediscono $3(g - 1) + n \geq 2$ sono la sfera con al massimo 4 punture, e il toro con al più una puntura. Per la sfera con al più 3 punture, il complesso delle curve è vuoto; per le altre, è sconnesso.

Corollario 5.3.3. *Se $g \geq 2$, allora $\mathcal{N}(\Sigma_{g,n})$ è connesso.*

Dim. La proposizione precedente garantisce che, comunque prese due classi di isotopia non orientata che non sconnettono a, b , esiste una sequenza $a = c_0, c_1, \dots, c_{m-1}, c_m = b$ con $i(c_j, c_{j+1}) = 0$. Bisogna solo vedere che si può scegliere tale sequenza in modo che c_j non sconnetta $\Sigma_{g,n}$ per nessun j : cioè, in essa si può sostituire oppure eliminare ogni classe c_j che sconnetta S . Nella dimostrazione a seguire, in realtà, ammettiamo anche a e/o b possano sconnettere la superficie: ciò ci servirà nel passo induttivo.

Vediamo prima il caso in cui $n \leq 1$. Sia c_j una classe di isotopia che sconnetta nella sequenza trovata. Allora $\Sigma_{g,n} \setminus c_j$ è costituito da due componenti connesse S, S' , entrambe di genere positivo perché c_j è essenziale e $n \leq 1$. Se c_{j-1}, c_{j+1} sono classi di isotopia di curve contenute in componenti connesse diverse, si può eliminare c_j dalla sequenza: la nuova sequenza avrà ancora classi di isotopia consecutive che non si intersecano.

Se invece c_{j-1} e c_{j+1} sono classi di isotopia di curve che si trovano sulla stessa componente connessa, diciamo S , rimpiazziamo c_j con una qualunque classe di isotopia essenziale su S' che non sconnetta (questa esiste perché S' ha genere positivo).

Per $n > 1$, procediamo per induzione. Il procedimento precedente può essere attuato quasi senza modifiche: l'unico problema si ha quando il genere di S' è 0, ovvero S è

una sfera con almeno 3 punture. In tal caso, però, c_{j-1} e c_{j+1} sono classi di isotopia di curve su S , che ha genere ancora $g \geq 2$, ma un numero di punture minore di n ; dunque tramite l'ipotesi induttiva sappiamo che possiamo rimpiazzare c_j con una sequenza di curve che non sconnettono S che va da c_{j-1} a c_{j+1} (anche se una o entrambe queste ultime due, invece, dovessero sconnettere S , perché non sono state ancora rimpazzate). A maggior ragione, nessuna delle curve della nuova sottosequenza sconetterà $\Sigma_{g,n}$. \square

5.4 Passaggio da una componente di bordo ad una puntura

Sia S una superficie con almeno una componente di bordo B . La superficie $S' = S \setminus B$ avrà una componente di bordo in meno di S , ed una puntura in più. Se b è la classe di isotopia non orientata della curva semplice chiusa B , osserviamo che il Dehn twist $T_b \in \text{PMCG}(S)$ è una mapping class non banale; tuttavia, lo diventa il corrispettivo $T_b \in \text{PMCG}(S')$, perché b è una classe di curve omotope ad una puntura. In qualche modo, questa è l'unica differenza che passa tra i mapping class group delle due superfici:

Proposizione 5.4.1. *Siano S e S' come sopra, con $\chi(S) \leq -2$, e sia $\langle T_b \rangle < \text{PMCG}(S)$ il sottogruppo generato da T_b . Allora la successione naturale*

$$1 \rightarrow \langle T_b \rangle \rightarrow \text{PMCG}(S) \rightarrow \text{PMCG}(S') \rightarrow 1$$

è esatta (ovvero, $\text{PMCG}(S') \cong \text{PMCG}(S)/\langle T_b \rangle$). In particolare, $\langle T_b \rangle$ è un sottogruppo normale di $\text{PMCG}(S)$.

La dimostrazione della proposizione fa riferimento al seguente risultato, che non dimostriamo:

Teorema 5.4.2. *Ogni omeomorfismo di una superficie dotata di una struttura differenziabile è isotopo ad un diffeomorfismo. Ogni isotopia tra due diffeomorfismi può essere realizzata con una mappa che sia un diffeomorfismo ad ogni "tempo".*

La dimostrazione di tale fatto è dovuta a Munkres [12] e Whitehead [13].

Dunque, nulla ci vieta di considerare il mapping class group e gruppi analoghi definiti a partire da diffeomorfismi, piuttosto che da omeomorfismi.

Dim. Sia \tilde{S} la superficie che si ottiene da S eliminando la componente di bordo B , cioè ottenuta dall'unione di S e di un disco chiuso D identificando B con il bordo del disco; si avrà $\chi(\tilde{S}) = \chi(S) + 1 < 0$. Dotiamo \tilde{S} di una struttura differenziabile, in modo che D sia un disco immerso in modo liscio.

Allora $\text{PMCG}(S) \cong \text{PMCG}(\tilde{S}, D)$, ovvero il mapping class group dei diffeomorfismi di \tilde{S} che fissano i punti di D .

Siano $p \in \mathring{D}$, $v \in T_p^1 \tilde{S}$ un vettore tangente unitario in p ; dimostreremo ora che $\text{PMCG}(\tilde{S}, D) \cong \text{PMCG}(\tilde{S}, (p, v))$, ovvero il mapping class group dei diffeomorfismi di \tilde{S} che fissano il punto p e il vettore tangente v (stiamo richiedendo che un'isotopia fra due tali diffeomorfismi fissi il punto p con il vettore tangente v ad ogni tempo; e richieste analoghe varranno per i mapping class group "relativi" che compariranno in questa ed in altre dimostrazioni a seguire).

Sia $\text{Emb}^+((D, \tilde{S}), (p, v))$ lo spazio delle immersioni del disco D in \tilde{S} che preservano l'orientazione, ed inoltre fissano il punto p e il vettore tangente v . Sia $\text{PDiffo}^+(\tilde{S}, (p, v))$

5.4 Passaggio da una componente di bordo ad una puntura

il gruppo dei diffeomorfismi di \tilde{S} che ne fissano ogni puntura, ed inoltre fissano il punto p con il vettore tangente v . Si può vedere che l'applicazione naturale $\text{PDiffeo}^+(\tilde{S}, (p, v)) \rightarrow \text{Emb}^+(D, \tilde{S}, (p, v))$ data dalla restrizione dei diffeomorfismi è un prodotto fibrato. Come punti base dei due spazi, che non scriveremo in seguito, prendiamo $id_{\tilde{S}}$ e id_D . La fibra di tale applicazione è $\text{PDiffeo}^+(\tilde{S}, D)$ (i differomorfismi che fissano tutti i punti di D).

Un pezzo della successione esatta 5.1 è

$$\begin{aligned} \pi_1(\text{Emb}^+(D, \tilde{S}, (p, v))) &\rightarrow \pi_0(\text{PDiffeo}^+(\tilde{S}, D)) \rightarrow \\ \pi_0(\text{PDiffeo}^+(\tilde{S}, (p, v))) &\rightarrow \pi_0(\text{Emb}^+(D, \tilde{S}, (p, v))). \end{aligned}$$

Si può dimostrare che $\text{Emb}^+(D, \tilde{S}, (p, v))$ è connesso per archi e semplicemente connesso. Dunque, la successione esatta di cui sopra diventa

$$1 \rightarrow \text{PMCG}(\tilde{S}, D) \rightarrow \text{PMCG}(\tilde{S}, (p, v)) \rightarrow 1$$

ed abbiamo dimostrato l'isomorfismo.

Ora, si può dimostrare che è un prodotto fibrato anche l'applicazione $\text{PDiffeo}^+(\tilde{S}, p) \rightarrow T_p\tilde{S} \setminus \{0\}$ che ad ogni diffeomorfismo f associa $df_p(v)$; sui due spazi fissiamo come punti base $id_{\tilde{S}}$ e v rispettivamente, dunque la fibra sarà $\text{PDiffeo}^+(\tilde{S}, (p, v))$.

Ancora applicando la successione esatta 5.1,

$$\begin{aligned} \pi_1(\text{PDiffeo}^+(\tilde{S}, p)) &\rightarrow \pi_1(T_p\tilde{S} \setminus \{0\}) \rightarrow \pi_0(\text{PDiffeo}^+(\tilde{S}, (p, v))) \rightarrow \\ \pi_0(\text{PDiffeo}^+(\tilde{S}, p)) &\rightarrow \pi_0(T_p\tilde{S} \setminus \{0\}). \end{aligned}$$

Il primo e l'ultimo termine sono banali (in particolare lo è il primo perché si sta considerando la componente connessa di $id_{\tilde{S}}$; poiché $\chi(\tilde{S}) < 0$, vale una variante del teorema 5.2.1). Esiste inoltre un isomorfismo naturale $\pi_0(\text{PDiffeo}^+(\tilde{S}, p)) \cong \text{PMCG}(S')$.

Il secondo termine, $\pi_1(T_p\tilde{S} \setminus \{0\})$, è isomorfo a \mathbb{Z} . Abbiamo già discusso come $\text{PMCG}(S) \cong \text{PMCG}(\tilde{S}, (p, v)) \cong \pi_0(\text{PDiffeo}^+(\tilde{S}, (p, v)))$. Ovviamente vale $\mathbb{Z} \cong \langle T_b \rangle$.

Tralasciamo di dimostrare che tutti gli isomorfismi di gruppi e le mappe trovate riconducono alla successione esatta data nell'enunciato. \square

Otteniamo così un altro lemma fondamentale per la dimostrazione del teorema di Dehn:

Lemma 5.4.3. *Sia S una superficie con $\chi(S) \leq -2$, e siano $f, g \in \text{PMCG}(S)$ mapping classes che fissano una classe di isotopia c di curve semplici chiuse che non sconnettono S , e tali da indurre lo stesso elemento $f_c = g_c \in \text{PMCG}(S \setminus c)$. Allora $f = T_c^k g$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$, ovvero c è una successione esatta*

$$1 \rightarrow \langle T_c \rangle \rightarrow \text{PMCG}(S, c) \rightarrow \text{PMCG}(S \setminus c) \rightarrow 1$$

dove $\text{PMCG}(S, c) < \text{PMCG}(S)$ è il sottogruppo delle mapping classes che fissano la classe di isotopia c .

Dim. Sia S^c la superficie che si ottiene da S tagliando lungo un rappresentante γ della classe di isotopia c . Se A e B sono le nuove componenti di bordo che si sono create, a, b le rispettive classi di isotopia non orientata, sia $S' = S^c \setminus A$. Date le operazioni che sono state fatte per ottenere questa nuova superficie, $\chi(S') = \chi(S)$.

5. GENERATORI DEL MAPPING CLASS GROUP

Su S' varrà il lemma precedente, dunque c' è una successione esatta

$$1 \rightarrow \langle T_b \rangle \rightarrow \text{PMCG}(S') \rightarrow \text{PMCG}(S \setminus c) \rightarrow 1$$

(ricordiamo che la superficie $S \setminus c$ ha due punture “al posto di c ”, differentemente da S^c che invece ha due componenti di bordo).

Siano f', g' due mapping classes su S' che inducono f, g su S (esistono perché f e g fissano la classe di isotopia orientata c). Se queste inducono la stessa $f_c = g_c$ su $S \setminus c$, allora per la successione esatta di sopra si ha $f' = T_b^k g'$ in $\text{PMCG}(S')$. Dunque $f = T_b^k g = T_c^k g$ in $\text{PMCG}(S)$. \square

5.5 Dimostrazione del teorema di Dehn

Lemma 5.5.1. *Siano C un complesso simpliciale connesso, D un suo sottocomplesso, e sia Γ un gruppo che agisce su C tramite automorfismi simpliciali, in modo che i Γ -traslati di D ricoprono tutto il complesso C . Allora Γ è generato dal suo sottoinsieme*

$$\mathcal{A} = \{g \in \Gamma \mid g \cdot D \cap D \neq \emptyset\}.$$

Dim. La dimostrazione ricalca una parte di quella del lemma di Švarc-Milnor (3.1.2). Tuttavia l'analogia non è del tutto immediata, quindi dimostriamo il lemma esplicitamente.

Sia $g \in \Gamma$; poiché X è connesso, esiste un percorso lungo l'1-scheletro X che connette un vertice in D con uno in $g \cdot D$. Ciascun lato di tale percorso si trova in qualche Γ -traslato di D , diciamo nell'ordine $D = g_0 \cdot D, g_1 \cdot D, \dots, g_{n-1} \cdot D, g_n \cdot D = g \cdot D$. Allora, per ogni i , $g_i \cdot D \cap g_{i+1} \cdot D \neq \emptyset$ ovvero $g_{i+1} g_i^{-1} \in \mathcal{A}$. Poiché $g = (g_n g_{n-1}^{-1}) \dots (g_2 g_1^{-1}) g_1$, g si scrive come prodotto di elementi di \mathcal{A} . \square

Abbiamo ora tutti gli strumenti per dimostrare il teorema di Dehn. Nella sezione 4.2 abbiamo mostrato che esso è vero per Σ_1 ; è facile vedere che $\text{MCG}(\Sigma_{1,1}) \cong \text{MCG}(\Sigma_1)$ in modo canonico, e quindi la tesi è vera anche per $\Sigma_{1,1}$.

Si procede adesso per induzione sul numero di punture a genere fissato, e quindi per induzione sul genere. I casi $g = 1$ e $n = 0, 1$ serviranno da passi base.

Passo 1. Se il teorema è vero per $\Sigma_{g,n}$, è vero per $\Sigma_{g,n+1}$.

Dalla successione esatta di Birman (5.2.2; infatti sicuramente $g > 1$ oppure $n > 0$, dunque $\chi(\Sigma_{g,n}) < 0$) sappiamo che esiste una successione esatta

$$1 \rightarrow \pi_1(\Sigma_{g,n}, x_0) \xrightarrow{\text{Push}} \text{PMCG}(\Sigma_{g,n+1}) \xrightarrow{\iota} \text{PMCG}(\Sigma_{g,n}) \rightarrow 1$$

dove identifichiamo la $(n+1)$ -esima puntura di $\Sigma_{g,n+1}$ con il punto base x_0 preso in $\Sigma_{g,n}$.

Per l'ipotesi induttiva, $\text{PMCG}(\Sigma_{g,n})$ è finitamente generato da Dehn twists (lungo curve che non sconnettono; nel seguito non lo ripeteremo), che proverranno da Dehn twists in $\text{PMCG}(\Sigma_{g,n+1})$; inoltre sappiamo dal lemma 4.4.1 e dalla proposizione 4.4.2 che $\text{Push}(\pi_1(\Sigma_{g,n}, x_0))$ è finitamente generato da prodotti di Dehn twists in $\text{PMCG}(\Sigma_{g,n+1})$. Dunque, per proprietà delle successioni esatte corte, $\text{PMCG}(\Sigma_{g,n+1})$ è finitamente generato da Dehn twists.

Passo 2. Ci dedichiamo ora al passo induttivo sul genere. Supponiamo la tesi vera per superfici per genere $< g$ con un numero arbitrario di punture, e la dimostriamo per Σ_g .

5.5 Dimostrazione del teorema di Dehn

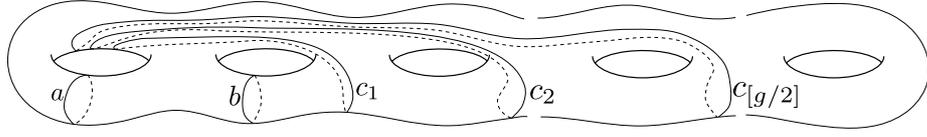


Figura 5.2: Le curve in figura rappresentano tutte le posizioni reciproche possibili di due classi di isotopia curve semplici che non sconnettono e non si intersecano: a e b insieme non sconnettono Σ_g , mentre a e c_i insieme la sconnettono in due superfici di genere rispettivamente i e $g - i - 1$. In ogni caso, le superfici che si ottengono dal taglio hanno 2 componenti di bordo ciascuna.

In figura 5.2 sono rappresentate alcune classi di isotopia non orientata di curve semplici essenziali su Σ_g che non separano (la notazione $[\cdot]$ denota la parte intera); usando il principio di cambio di coordinate, vediamo che qualunque coppia di tali classi di isotopia con numero di intersezione nullo corrisponde, tramite qualche omeomorfismo di Σ_g , ad una coppia di classi delle curve in figura.

Denominiamo $v_0, \dots, v_{[g/2]+1}$ i vertici in $\mathcal{N}(S)$ corrispondenti a tali classi. L'osservazione precedente si riformula in questi termini: se $D \subseteq \mathcal{N}(S)$ è il sottocomplesso costruito sui v_i , i traslati di D tramite elementi di $\text{MCG}(\Sigma_g)$ ricoprono tutto $\mathcal{N}(\Sigma_g)$. Poiché $g \geq 2$, $\mathcal{N}(\Sigma_g)$ è connesso (vedi corollario 5.3.3). Dunque, per il lemma 5.5.1, $\text{MCG}(\Sigma_g)$ è generato dalle mapping classes f tali che $f \cdot D \cap D \neq \emptyset$. Sia \mathcal{A} l'insieme di tali mapping classes.

Basta allora dimostrare che \mathcal{A} è contenuto in un sottogruppo finitamente generato da Dehn twists attorno a curve essenziali che non separano Σ_g . Innanzitutto, se $f \in \mathcal{A}$, esisteranno $i, j \in \{0, \dots, [g/2] + 1\}$ tali che $f(v_i) = v_j$.

Per il lemma 4.3.7, per ogni $i = 0, \dots, [g/2] + 1$ esiste una mapping class ϕ_i data da un prodotto di Dehn twists che porta v_0 in v_i . Detto $\text{Stab}(v_0) < \text{MCG}(\Sigma_g)$ lo stabilizzatore di v_0 , si ha $f \in \phi_j \text{Stab}(v_0) \phi_i^{-1}$.

Dimostriamo quindi che $\text{Stab}(v_0)$ è finitamente generato da Dehn twists: se a questi aggiungiamo quelli che, combinati, consentono di ottenere i vari ϕ_i , otteniamo una famiglia finita di Dehn twists tali che ogni elemento di \mathcal{A} si può scrivere come un loro prodotto.

Passo 3. Siano a, a^{-1} le classi di isotopia orientata di curve che corrispondono al vertice v_0 (quindi non sconnettono Σ_g), e sia $\psi \in \text{MCG}(\Sigma_g)$ un prodotto di Dehn twists che inverte l'orientazione di a (vedi lemma 4.3.8). Allora $\text{Stab}(v_0) = \text{MCG}(\Sigma_g, a) \cup \psi \text{MCG}(\Sigma_g, a)$ (dove $\text{MCG}(\Sigma_g, a)$ è il sottogruppo di $\text{MCG}(\Sigma_g)$ che fissa la classe di isotopia a). Ci siamo ricondotti a dimostrare che $\text{MCG}(\Sigma_g, a)$ è finitamente generato da Dehn twists.

Per il lemma 5.4.3, esiste una successione esatta

$$1 \rightarrow \langle T_a \rangle \rightarrow \text{MCG}(\Sigma_g, a) \rightarrow \text{PMCG}(\Sigma_g \setminus a) \rightarrow 1.$$

Ma $\Sigma_g \setminus a$ è omeomorfa a $\Sigma_{g-1,2}$ e, per l'ipotesi induttiva, sappiamo che il mapping class group di quest'ultima è finitamente generato da Dehn twists attorno a curve che non sconnettono $\Sigma_{g-1,2}$. Tramite la successione esatta di sopra, questi saranno indotti da Dehn twists in $\text{PMCG}(\Sigma_g, a)$ attorno a curve che non sconnettono Σ_g . Ancora per proprietà delle successioni esatte corte, abbiamo che $\text{PMCG}(\Sigma_g, a)$ è finitamente generato da Dehn twists. \square

5.6 Generatori espliciti per $MCG(\Sigma_g)$

In figura 5.3 è rappresentato un insieme di curve tali che i Dehn twists attorno ad esse generano $MCG(\Sigma_g)$: questi sono detti i *generatori di Lickorish*, o *Lickorish twists*.

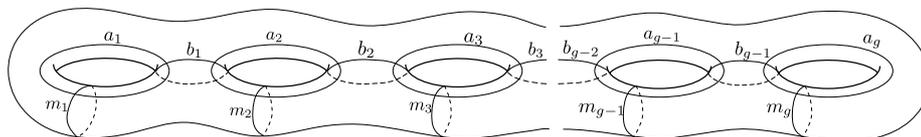


Figura 5.3: I generatori di Lickorish.

Indichiamo brevemente come si dimostra che questo è effettivamente un insieme di generatori. La dimostrazione ricalca il passo induttivo sul genere del teorema di Dehn (per il toro, i generatori trovati precedentemente sono proprio i Lickorish twists).

Si può vedere che le mapping classes ϕ_i usate per far corrispondere fra loro le curve di figura 5.2 possono essere scelte come un prodotto di Lickorish twists, e lo stesso per la mapping class che inverte l'orientazione della curva a di figura 5.2.

Rimane quindi da vedere che $MCG(\Sigma_g, a)$ è contenuto in un sottogruppo generato da Lickorish twists. Dette p, q le due punture di $\Sigma_g \setminus a$, sia S' la superficie che si ottiene eliminando la puntura in p , e S'' quella che si ottiene eliminandole entrambe.

Utilizzando due volte la successione esatta di Birman,

$$1 \rightarrow \pi_1(S', p) \xrightarrow{\text{Push}} \text{PMCG}(\Sigma_g \setminus a) \xrightarrow{\iota} \text{PMCG}(S') \rightarrow 1$$

$$1 \rightarrow \pi_1(S'', q) \xrightarrow{\text{Push}'} \text{PMCG}(S') \xrightarrow{\iota'} \text{PMCG}(S'') \rightarrow 1.$$

Si sfruttano quindi l'ipotesi induttiva sul genere (il genere di S', S'' è $g - 1$) e le proprietà delle successioni esatte. Basterà far vedere che $\text{Push}'(\pi_1(S'', q))$ è generato da Lickorish twists affinché lo sia $\text{PMCG}(S')$; e, da qui, che $\text{Push}(\pi_1(S', p))$ lo sia per avere la tesi.

In questi due ultimi passaggi interviene la relazione d'intreccio per una catena di curve (c_1, \dots, c_k) : consideriamo un'unione U di intorni tubolari chiusi delle curve della catena. Se k è pari e d è la classe di isotopia di ∂U (che è connesso: vedi il lemma 3.2.2), si ha

$$(T_{c_1} \cdots T_{c_k})^{2k+2} = T_d$$

mentre se k è dispari e le componenti di bordo di un intorno tubolare della catena sono d_1 e d_2 , si ha

$$(T_{c_1} \cdots T_{c_k})^{k+1} = T_{d_1} T_{d_2}.$$

Entrambe le relazioni si dimostrano con il metodo di Alexander (2.2.4) applicato su U , prendendo come curve di riferimento le c_i e un arco trasversale a c_1 .

5.7 Caso generale: come si genera tutto il mapping class group

Abbiamo dimostrato l'esistenza di un insieme finito di generatori di semplice descrizione per $\text{PMCG}(\Sigma_{g,n})$: ci proponiamo adesso di completare l'opera per generare tutto il mapping class group, e per includere anche le componenti di bordo.

5.7 Caso generale: come si genera tutto il mapping class group

Esiste una successione esatta naturale

$$1 \rightarrow \text{PMCG}(\Sigma_{g,n}) \rightarrow \text{MCG}(\Sigma_{g,n}) \rightarrow \mathfrak{S}_n \rightarrow 1$$

dove \mathfrak{S}_n è il gruppo delle permutazioni di n elementi: vedremo ora l'unico fatto non immediato, ovvero che la mappa $\text{MCG}(\Sigma_{g,n}) \rightarrow \mathfrak{S}_n$ è surgettiva. Esibiremo ora delle mapping classes che effettuano uno "scambio" fra due punture (cioè una trasposizione in \mathfrak{S}_n), e quindi, combinate in modo opportuno, effettuano una qualunque loro permutazione.

Selezionate due punture in S , consideriamo un loro intorno chiuso $D \subset \Sigma_{g,n}$, omeomorfo ad un disco con due punture. Su tale disco (fissato un omeomorfismo con un disco con due punture "standard") applichiamo la trasformazione in figura:

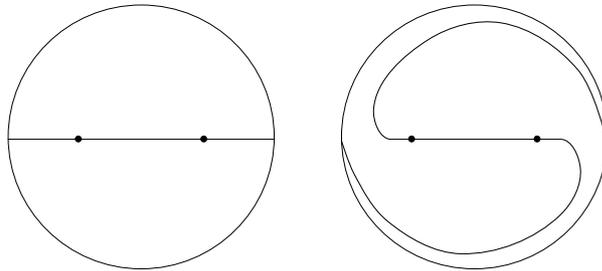


Figura 5.4: Uno half twist.

L'idea intuitiva sarebbe di ruotare di un angolo π una regione interna del disco, in modo da far prendere ad una puntura il posto dell'altra; e di lasciare fissato il bordo del disco, in modo da poter incollare tale omeomorfismo con l'identità su $\overline{S \setminus D}$. Una tale mappa è detta *half twist*.

Ora, data la natura della successione esatta prima esibita, è chiaro che si può realizzare tutto il mapping class group di $\Sigma_{g,n}$ se ad un opportuno insieme finito di Dehn twists che servirà a generare $\text{PMCG}(\Sigma_{g,n})$ aggiungiamo uno half twist per ogni coppia di punture.

Sia ora S una superficie con bordo, di genere ≥ 2 . Un utilizzo ripetuto della proposizione 5.4.1, partendo dalla superficie ottenuta trasformando tutte le componenti di bordo in punture, e reinserendo una ad una le componenti di bordo eliminate, consente di dire che $\text{MCG}(S)$ è generato da un numero finito di Dehn twists attorno a curve che non sconnettono, più i Dehn twists attorno alle componenti di bordo.

Varrà ancora la successione esatta di cui sopra, da cui otteniamo che tutto il mapping class group è generato dai Dehn twists di cui sopra più gli opportuni half twists.

5. GENERATORI DEL MAPPING CLASS GROUP

Bibliografia

- [1] Benson Farb, Dan Margalit
A primer on mapping class groups
Princeton University Press, 2010
- [2] Allen Hatcher
Algebraic Topology
Cambridge University Press, 2002
- [3] Riccardo Benedetti, Carlo Petronio
Lectures on Hyperbolic Geometry
Springer-Verlag, 1992
- [4] Andrew J. Casson, Steven A. Bleiler
Automorphisms of Surfaces after Nielsen and Thurston
Cambridge University Press, 1988
- [5] Martin R. Bridson, André Haefliger
Metric Spaces of Non-Positive Curvature
Springer-Verlag, 1999
- [6] John Ratcliffe
Foundations of Hyperbolic Manifolds
Springer-Verlag, 1994
- [7] Morris W. Hirsch
Differential topology
Springer-Verlag, 1994
- [8] Jeff Frazier, Andy Sanders
The Dehn-Nielsen-Baer Theorem
October 6, 2008
- [9] D.B.A. Epstein
Curves on 2-manifolds and isotopies
Acta Math. 115:83–107, 1966
- [10] R. Baer
Kurventypen auf Flächen
J. reine angew. Math., 156:231–246, 1927

BIBLIOGRAFIA

- [11] R. Baer
Isotopie von Kurven auf orientierbaren, geschlossenen Flächen und ihr Zusammenhang mit der topologischen Deformation der Flächen
J. reine angew. Math., 159:101–111, 1928
- [12] James Munkres
Obstructions to the smoothing of piecewise differentiable homeomorphisms
Ann. of Math. (2), 72:521–554, 1960
- [13] J. H. C. Whitehead
Manifolds with transverse fields in euclidean space
Ann. of Math. (2), 73:154–212, 1961
- [14] Mary-Elizabeth Hamstrom
Some global properties of the space of homeomorphisms on a disc with holes
Duke Math. J., 29:657–662, 1962
- [15] Mary-Elizabeth Hamstrom
The space of homeomorphisms on a torus
Illinois J. Math., 9:59–65, 1965
- [16] Mary-Elizabeth Hamstrom
Homotopy groups of the space of homeomorphisms on a 2-manifold
Illinois J. Math., 10:563–573, 1966

Ringraziamenti

Grazie al sostegno di mio padre Francesco e di mia madre Michelina, tutto quello che sono lo devo a loro.

Grazie a mia madre per aver sentito per più di un'ora la mia presentazione, senza capirci un'acca.

Grazie a mio padre perché mi ha fatto capire il punto di vista dell'ingegnere.

Grazie a mia sorella Maria, perché tutte le volte che mi chiede qualcosa di matematica attacco e non la smetto più.

Grazie al dottor Frigerio, è stato un relatore disponibile ed affabile.

Grazie a tutti gli amici a cui ho raccontato cosa avrei fatto nella mia tesi (a volte senza che me lo chiedessero), perché il loro gradimento mi ha convinto a portarla avanti.

Grazie a tutti gli amici che mi hanno chiesto di raccontarla, ma non ho potuto neanche provarci.

Grazie a Paolo, per tutte le sue risposte ai dubbi che mi sono venuti a scriverla.

Grazie a Nico e agli altri che pazientemente hanno placato i miei momenti di isterismo.

Grazie ad Umberto per i consigli di stile.

Grazie a Luca che mi ringrazia nella sua tesi.

Grazie a Valentina per avermi fatto scoprire un libro utilissimo.

Grazie a chi crede in me.

Grazie a chi non crede in me, perché l'idea di sfidarlo è una motivazione in più per impegnarmi.

Grazie ad Ubuntu, che finalmente ho imparato ad usare.

Grazie a Giovanni Sfarlocca, sempre e comunque.