Risoluzione Esercitazione Covid-19

Matteo Del Vecchio

1 Esercizio 1

1.1 a

Vero. Infatti se supponiamo per assurdo f non strettamente monotona, allora

$$\exists\, x_1 < x_2 \;:\; f(x_1) < f(x_2)$$

$$\exists\, x_3 < x_4 \;:\; f(x_3) > f(x_4)$$

Osserviamo che f è monotona crescente in $[x_1, x_2]$, monotona decrescente in $[x_3, x_4]$, pertanto i due intervalli sono disgiunti. Infatti, su $[x_1, x_2]$ per Weierstrass la funzione ha un punto di massimo M e un punto di minimo m.

Se per assurdo $M < x_2$, allora per valori intermedi su (x_1, M) la funzione assume tutti i valori in $(f(x_1), f(M))$, mentre su (M, x_2) assume tutti i valori in $(f(x_2), f(M))$. Quindi f assume due volte i valori in $(f(x_2), f(M))$ e non può essere iniettiva. Si arriva allo stesso assurdo se si suppone $m > x_1$.

Quindi f è monotona crescente in $[x_1, x_2]$, perché $\forall \bar{x} \in [x_1, x_2]$, dal teorema dei valori intermedi su $[x_1, \bar{x}]$ e su $[\bar{x}, x_2]$ insieme all'iniettività della funzione si deduce che $f > f(\bar{x})$ in $(\bar{x}, x_2]$, $f < f(\bar{x})$ in $[x_1, \bar{x})$.

Con un ragionamento simmetrico, f è strettamente monotona decrescente su $[x_3, x_4]$.

Possiamo quindi supporre senza perdita di generalità $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, perché il caso $x_3 < x_4 < x_1 < x_2$ è simmetrico. Se $f(x_2) > f(x_3)$, allora per valori intermedi f assume tutti i valori in $(f(x_3), f(x_2))$ su (x_2, x_3), ma quindi assume due volte i valori tra $(\max\{f(x_1), f(x_3)\}, f(x_2))$ e non è iniettiva. Analogamente, se $f(x_2) < f(x_3)$, allora per valori intermedi f assume tutti i valori in $(f(x_2), f(x_3))$ su (x_2, x_3), ma quindi assume due volte i valori tra $(\max\{f(x_2), f(x_4)\}, f(x_3))$ e non è iniettiva. Quindi in ogni caso si arriva a un assurdo.

1.2 b

Non può esistere una funzione con queste caratteristiche. Infatti, funzioni pari hanno derivata dispari e viceversa. Il termine di grado 1 del polinomio di Taylor di f centrato in 0 è $f'(0) \cdot x$, ma f' è dispari, quindi

$$f'(0) = -f'(-0) = -f'(0)$$

cioè $f'(0) = 0$ e il polinomio di Taylor di f non può essere $1 + x + x^2$.

1.3 c

Consideriamo la funzione $f(x) = 2 - \cos(\sqrt{2} \cdot x)$. È di classe C^∞, infatti la sua derivata n-esima è un seno o un coseno moltiplicato per una costante. È pari, infatti

$$f(-x) = 2 - \cos(\sqrt{2}(-x)) = 2 - \cos(-\sqrt{2} \cdot x) = 2 - \cos(\sqrt{2} \cdot x) = f(x)$$

Inoltre $f(0) = 2 - \cos(0) = 1$. Calcoliamo il polinomio di Taylor di ordine 2 centrato in 0 di f.

$$T_2(f, 0) = f(0) + f'(0) \cdot (x - 0) + \frac{f''(0)}{2!} \cdot (x - 0)^2 = 1 + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2} \cdot x^2$$

Calcoliamo la derivata prima e seconda della funzione in 0

$$f'(x) = \sqrt{2} \cdot \sin(\sqrt{2} \cdot x) \implies f'(0) = 0$$

$$f''(x) = 2 \cdot \cos(\sqrt{2} \cdot x) \implies f''(0) = 2$$

Pertanto

$$T_2(f, 0) = 1 + x^2$$

come richiesto. Quindi esiste una funzione che rispetta le ipotesi assegnate.

2 Esercizio 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\log\left(319 + \frac{1}{n^\alpha}\right) - \beta \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}\right)\right)$$

Osserviamo innanzitutto che $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos(\theta)$. Pertanto la serie si può scrivere come

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\log\left(319 + \frac{1}{n^\alpha}\right) - \beta \cdot \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Caso $\alpha < 0$ In questo caso osserviamo che

$$\lim_{n\to\infty} \log\left(319 + \frac{1}{n^\alpha}\right) = +\infty$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \beta \cos\frac{1}{n} = \beta$$

quindi la serie non può convergere perché il suo termine generale non è infinitesimo (infatti il modulo del termine generale tende a $+\infty$).

Caso $\alpha = 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \left(\log(320) - \beta \cdot \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

In modulo, il termine generale tende a $\log(320) - \beta$, quindi una condizione necessaria alla convergenza è $\beta = \log(320)$. In questo caso la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log(320) \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Mostriamo che questa serie converge assolutamente, quindi converge. La serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

è a termini positivi, quindi possiamo applicare il confronto asintotico con la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$$

che converge (serie armonica generalizzata). Infatti

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) \cdot 2n^2 =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \cdot 2n^2 =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (1 + o(1)) = 1$$

Caso $\alpha > 0$ Il modulo del termine generale della serie va a $\log(319) - \beta$, quindi abbiamo come condizione necessaria alla convergenza $\beta = \log(319)$. Osserviamo inoltre che $\log\left(319 + \frac{1}{n^\alpha}\right) = \log\left(319\left(1 + \frac{1}{319n^\alpha}\right)\right) = \log(319) + \log\left(1 + \frac{1}{319n^\alpha}\right)$. Sviluppando con Taylor si ottiene, per $n \to \infty$,

$$\log(319) + \frac{1}{319n^\alpha} + o\left(\frac{1}{319n^\alpha}\right)$$

Possiamo fare lo stesso per

$$\cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{2n^2}\right)$$

Quindi possiamo sostituire β e le due espressioni nella serie di partenza e studiare il comportamento di

$$\sum(-1)^n \cdot \left(\log(319) + \frac{1}{319n^\alpha} + o(\frac{1}{n^\alpha}) - \log(319) + \frac{\log(319)}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) =$$

$$= \sum(-1)^n \cdot \left(\frac{1}{319n^\alpha} + \frac{\log(319)}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^{\min(\alpha,2)}}\right)\right)$$

In ogni caso, il secondo fattore è definitivamente decrescente, positivo e infinitesimo, quindi la serie converge per Leibnitz.

Riepilogo dei risultati La serie converge nei seguenti casi:

- $\alpha = 0 \wedge \beta = \log(320)$
- $\alpha > 0 \wedge \beta = \log(319)$

3 Esercizio 3

$$\int_0^1 \sqrt{2-x^2}dx$$

La funzione integranda è continua tra gli estremi di integrazione, quindi si può procedere calcolando una primitiva e valutandola agli estremi.

$$\int_0^1 \sqrt{2-x^2}dx = \sqrt{2}\int_0^1 \sqrt{1-\frac{x^2}{2}}$$

Ponendo $\sin(t)^2 = \frac{x^2}{2}$, $x = \sqrt{2\cdot\sin(t)^2}$, e scegliendo $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$, per sostituzione l'integrale diventa

$$\sqrt{2}\int_0^{\pi/4} \frac{2\sin(t)\cos(t)\cdot\sqrt{1-\sin t^2}}{\sqrt{2\cdot\sin(t)^2}} = 2\int_0^{\pi/4} \cos(t)^2 dt$$

ricordando che nell'intervallo di integrazione seno e coseno sono positivi per ogni valore.

Possiamo risolvere questo integrale separatamente per parti

$$\int_0^{\pi/4} \cos(t)^2 dt = \sin(t)\cos(t)\Big|_0^{\pi/4} + \int_0^{\pi/4} \sin(t)^2 dt = \frac{1}{2} + t\Big|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \cos(t^2)dt$$

$$2\int_0^{\pi/4} \cos(t)^2 dt = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$$

4 Esercizio 4

Studiare la convergenza di

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{|x^5+8x^3-1|}}dx$$

Studiamo la funzione integranda. Sia $g(x) = x^5 + 8x^3 - 1$. Cerchiamo, in particolare, se esistono valori reali positivi $\bar{x}$ tali che $g(\bar{x}) = 0$. In tal caso, l'integranda non sarebbe definita in quel punto. Si osserva che $g(0) = -1 < 0$. Inoltre, la sua derivata $g'(x) = 5x^4 + 24x^2 = x^2(5x^2+24) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. Poiché $g(1) = 8 > 0$, esiste un unico valore reale positivo α per cui l'integranda non è definita. Inoltre abbiamo osservato che $\alpha \in (0, 1)$.

La funzione integranda è strettamente positiva, quindi basta studiare separatamente la convergenza in α e all'infinito. Per $x \to \infty$,

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{|x^5+8x^3-1|}}dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^5+8x^3-1}}dx \sim \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{5/2}}dx$$

quindi l'integrale converge per confronto asintotico ($\frac{5}{2} > 1$). Infatti

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^{5/2}}{\sqrt{x^5 + 8x^3 - 1}} = 1$$

L'integrale converge in α se e solo se esistono finiti i limiti

$$\lim_{R \to \alpha^-} \int_0^R \frac{1}{\sqrt{|x^5 + 8x^3 - 1|}} dx \qquad \lim_{R \to \alpha^+} \int_R^1 \frac{1}{\sqrt{|x^5 + 8x^3 - 1|}} dx$$

Osserviamo che dal teorema di Ruffini $x^5 + 8x^3 - 1 = (x - \alpha)p(x)$ con $deg\, p = 4$. Inoltre p non ha radici reali perché dal criterio della derivata α non è una radice multipla del polinomio di partenza, quindi p è sempre positivo. Di conseguenza, la funzione $\frac{1}{\sqrt{p(x)}}$ è continua e quindi ha un massimo M (positivo) in $[0, 1]$ (Weierstrass).

$$\frac{1}{\sqrt{|\alpha - x| \cdot p(x)}} \;\leq\; M \cdot \frac{1}{\sqrt{|\alpha - x|}}$$

Quindi per confronto affinché l'integrale converga è sufficiente che convergano

$$\int_0^\alpha \frac{1}{\sqrt{\alpha - x}} dx \qquad \int_\alpha^1 \frac{1}{\sqrt{x - \alpha}} dx$$

Con il cambio di variabile $t = \alpha - x$ il primo integrale diventa

$$\int_\alpha^0 \frac{-1}{\sqrt{t}} dt = \int_0^\alpha \frac{1}{\sqrt{t}} dt$$

che converge ($\frac{1}{2} < 1$).

Per il secondo integrale cambiamo variabile con $y = x - \alpha$ e otteniamo

$$\int_0^{1-\alpha} \frac{1}{\sqrt{y}} dy$$

che converge come prima.

Quindi l'integrale di partenza converge.