

Cinematica del punto materiale

Alessio Del Vigna

27 febbraio 2023

Tutte le leggi orarie, se non diversamente specificato, sono espresse rispetto alle unità di misura del Sistema Internazionale.

1 Moti unidimensionali

Esercizio 1.1. Un punto materiale si muove seguendo la legge oraria $x(t) = 8 - 4t$. Calcolare la velocità istantanea e l'accelerazione istantanea del punto. Tracciare poi il grafico velocità-tempo, la traiettoria del punto e il grafico posizione-tempo.

Esercizio 1.2. Rispondere alle stesse domande dell'Esercizio 1.1 per un punto materiale che si muove seguendo la legge oraria $x(t) = -1 + 3t$.

Esercizio 1.3. Un punto materiale si muove seguendo la legge oraria

$$x(t) = 3t^2 - 6t + 1.$$

- (i) Calcolare la posizione del punto agli istanti $t_1 = 0$ s e $t_2 = 3$ s.
- (ii) A quali istanti di tempo il punto si trova ad una posizione pari alla sua posizione iniziale?
- (iii) Calcolare il modulo dello spostamento e la velocità media tra t_1 e t_2 .
- (iv) Calcolare la velocità istantanea e l'accelerazione istantanea del punto materiale.
- (v) Studiare i punti di inversione del moto, determinando i corrispondenti istanti di tempo e le corrispondenti posizioni del punto.
- (vi) Tracciare i grafici velocità-tempo e accelerazione-tempo.
- (vii) Tracciare la traiettoria del punto materiale e, utilizzando le informazioni ricavate ai punti (i) e (ii), tracciare qualitativamente il grafico posizione-tempo.

Esercizio 1.4. Rispondere alle stesse domande dell'Esercizio 1.3 per un punto che si muove seguendo la legge oraria

$$x(t) = 5t - 2t^2.$$

Esercizio 1.5. Un punto materiale si muove seguendo la legge oraria

$$x(t) = t^3 - 2t^2.$$

- (i) A quali istanti di tempo il punto occupa la stessa posizione che ha per $t = 0$ s?
- (ii) Calcolare la velocità istantanea del punto materiale come funzione del tempo e calcolare la velocità agli istanti $t_1 = 1$ s e $t_2 = 2$ s.
- (iii) Studiare i punti di inversione del moto, determinando il corrispondente istante di tempo e la corrispondente posizione del punto.
- (iv) Sfruttando le informazioni ottenute ai punti (ii) e (iii) tracciare qualitativamente il grafico velocità-tempo.
- (v) Utilizzando quanto determinato ai punti (i) e (iii), tracciare qualitativamente il grafico posizione-tempo.

Esercizio 1.6. Rispondere alle stesse domande dell'Esercizio 1.5 per un punto che si muove seguendo la legge oraria

$$x(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 9t.$$

Esercizio 1.7. Rispondere alle stesse domande dell'Esercizio 1.5 per un punto che si muove seguendo la legge oraria

$$x(t) = \frac{1}{2}t^4 - 4t^2.$$

Per la domanda (ii) considerare gli istanti di tempo $t_1 = -1$ s e $t_2 = 1$ s.

Esercizio 1.8. Rispondere alle stesse domande dell'Esercizio 1.5 per un punto che si muove seguendo la legge oraria

$$x(t) = -t^4 + 4t^3.$$

Per la domanda (ii) considerare gli istanti di tempo $t_1 = 1$ s e $t_2 = 2$ s.

2 Moti bidimensionali

Esercizio 2.1. Un punto si muove secondo la legge oraria

$$\begin{cases} x(t) = 1 - 2t \\ y(t) = t + 3 \end{cases} .$$

- (i) Calcolare la posizione del punto materiale agli istanti $t_1 = 0$ s e $t_2 = 3$ s.
- (ii) Determinare l'equazione cartesiana della traiettoria e descriverla geometricamente.
- (iii) Calcolare la velocità istantanea del punto materiale e descrivere in che modo è percorsa la traiettoria. Ci sono punti di inversione del moto?
- (iv) Calcolare il vettore spostamento fra gli istanti t_1 e t_2 , il suo modulo e lo spazio percorso dal punto in quell'intervallo di tempo.

Esercizio 2.2. Un punto si muove secondo la legge oraria

$$\begin{cases} x(t) = t + 2 \\ y(t) = 3t \end{cases} .$$

Rispondere alle stesse domande dell'Esercizio 2.1.

Esercizio 2.3. Un punto si muove secondo la legge oraria

$$\begin{cases} x(t) = t^2 + 2 \\ y(t) = 3t^2 \end{cases} .$$

- (i) Calcolare la posizione del punto materiale agli istanti $t_1 = 0$ s e $t_2 = 3$ s.
- (ii) Determinare l'equazione cartesiana della traiettoria e descriverla geometricamente.
- (iii) Calcolare la velocità istantanea del punto materiale, studiare i punti di inversione del moto, specificando i corrispondenti istanti di tempo e le corrispondenti posizioni. Descrivere in che modo è percorsa la traiettoria.

Esercizio 2.4. Un punto si muove secondo la legge oraria

$$\begin{cases} x(t) = 1 + t^2 \\ y(t) = 2t^2 - 1. \end{cases} .$$

Rispondere alle stesse domande dell'Esercizio 2.3.

Esercizio 2.5. Un punto si muove secondo la legge oraria

$$\begin{cases} x(t) = 1 - t \\ y(t) = t^2 - 1 \end{cases}$$

- (i) Determinare l'equazione cartesiana della traiettoria e tracciare il suo grafico.
(*Suggerimento:* il grafico è una parabola e per tracciarlo può essere utile determinare le intersezioni della traiettoria con l'asse x e anche altri punti opportunamente scelti.)
- (ii) Calcolare la velocità istantanea e l'accelerazione istantanea del punto materiale.
- (iii) Studiare i punti di inversione del moto, specificando i corrispondenti istanti di tempo e le corrispondenti posizioni. Descrivere in che modo è percorsa la traiettoria.
- (iv) Disegnare la posizione del punto materiale lungo la traiettoria al tempo $t = 0$ s e disegnare i vettori velocità e accelerazione a quell'istante.

Esercizio 2.6. Un punto si muove secondo la legge oraria

$$\begin{cases} x(t) = 3t \\ y(t) = 4 - 9t^2 \end{cases} .$$

- (i) Calcolare la posizione iniziale del punto materiale.
- (ii) Determinare gli istanti di tempo in cui il punto si trova sull'asse x e i corrispondenti vettori posizione. Idem per gli istanti in cui il punto si trova sull'asse y .
- (iii) Determinare l'equazione cartesiana della traiettoria e tracciare il suo grafico, avvalendosi anche delle informazioni determinate al punto precedente.
- (iv) Calcolare la velocità istantanea e l'accelerazione istantanea del punto materiale.
- (v) Studiare i punti di inversione del moto, specificando i corrispondenti istanti di tempo e le corrispondenti posizioni. Descrivere in che modo è percorsa la traiettoria.
- (vi) Disegnare la posizione del punto materiale lungo la traiettoria al tempo $t = 0$ s e disegnare i vettori velocità e accelerazione a quell'istante.

Esercizio 2.7. Un punto si muove secondo la legge oraria

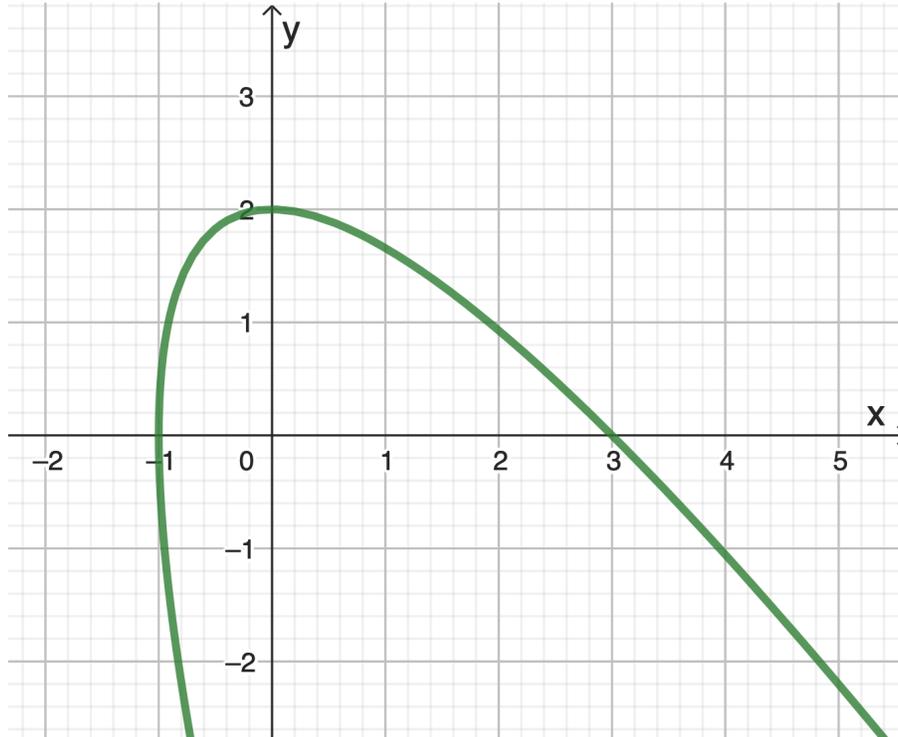
$$\begin{cases} x(t) = -2t \\ y(t) = 1 - 4t^2 \end{cases} .$$

Rispondere alle stesse domande dell'Esercizio 2.6.

Esercizio 2.8. Un punto si muove secondo la legge oraria

$$\begin{cases} x(t) = t^2 - 1 \\ y(t) = 4t - 2t^2 \end{cases} .$$

La figura seguente mostra la traiettoria del punto.



- (i) Calcolare la posizione iniziale del punto materiale. Determinare gli istanti di tempo in cui il punto si trova sull'asse x e i corrispondenti vettori posizione, verificandoli sul grafico della traiettoria.
- (ii) Determinare l'equazione cartesiana della traiettoria.
- (iii) Calcolare la velocità istantanea e l'accelerazione istantanea del punto materiale.
- (iv) Studiare i punti di inversione del moto, determinandone l'istante di tempo e la corrispondente posizione del punto. Verificare quanto ottenuto sul grafico della traiettoria.
- (v) Disegnare la posizione del punto materiale lungo la traiettoria ai tempi $t = 0$ s e $t = 1$ s e disegnare i vettori velocità e accelerazione a quegli istanti.
- (vi) (*Difficile*) Il vettore accelerazione richiesto al punto (iii) è $\vec{a} = 2\hat{i} - 4\hat{j}$. Tale vettore è in qualche modo legato alla forma della traiettoria?

Esercizio 2.9. Un punto si muove secondo la legge oraria

$$\begin{cases} x(t) = 2t \\ y(t) = 18t - 8t^3 \end{cases} .$$

- (i) Calcolare la posizione iniziale del punto materiale. Determinare gli istanti di tempo in cui il punto si trova sull'asse x e i corrispondenti vettori posizione. Idem per gli istanti in cui si trova sull'asse y .
- (ii) Calcolare la velocità istantanea e l'accelerazione istantanea del punto materiale.
- (iii) Studiare i punti di inversione del moto, determinandone tempo e corrispondente posizione del punto.
- (iv) Determinare l'equazione cartesiana della traiettoria e tracciare qualitativamente il suo grafico, avvalendosi delle informazioni ricavate ai punti precedenti.
- (v) Disegnare il vettore velocità e il vettore accelerazione del punto materiale in corrispondenza degli istanti di inversione del moto.

Esercizio 2.10. Un punto si muove secondo la legge oraria

$$\begin{cases} x(t) = 4t \\ y(t) = t^4 - 4t^3 \end{cases} .$$

Rispondere alle stesse domande dell'Esercizio 2.9.

Esercizio 2.11. Un punto si muove secondo la legge oraria

$$\begin{cases} x(t) = -t \\ y(t) = 3t^3 - t^4 \end{cases} .$$

Rispondere alle stesse domande dell'Esercizio 2.9.