Nome e cognome: ______________________________ Classe: ________

Liceo Scientifico "A. Vallisneri"

Prova scritta di matematica

Esercizio 1 (5 punti). Determinare il campo di esistenza delle seguenti frazioni algebriche e poi ridurle ai minimi termini:

$$\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2-y^2}, \qquad \frac{x^2-x-2}{x^3-2x^2+2x-1}, \qquad \frac{x^2y^2}{x^2y+x}.$$

Esercizio 2 (15 punti). Determinare il campo di esistenza e semplificare la seguente espressione ad un'unica frazione algebrica ridotta ai minimi termini:

$$\left[\left(\frac{2}{3x-1}-\frac{x}{x^2+1}\right)\cdot\left(\frac{x+1}{x-2}-\frac{x}{x+1}-\frac{x+2}{x^2-x-2}\right)+\frac{1}{2x^2+2}\right]:\frac{x}{x^2+1}.$$

Esercizio 3 (15 punti). Risolvere in $\mathbb{R}$ le seguenti equazioni:

(a) $\dfrac{1}{x^2-2x-3}-\dfrac{3}{2x^2-18}=\dfrac{1}{x^2+4x+3}$

(b) $\dfrac{1}{x^2-4x}=\dfrac{2x+8}{x^2+8x}-\dfrac{1}{x+8}$

Esercizio 4 (10 punti). Si consideri la famiglia di equazioni

$$\frac{ax+x}{x^2-1}-\frac{a}{x+1}=\frac{a}{x-1}+\frac{a^2-1}{x^2-1} \qquad \text{con } a\in\mathbb{R}.$$

Discutere l'esistenza di soluzioni al variare di a.

Esercizio 5 (10 punti). Risolvere in $\mathbb{R}$ le seguenti disequazioni:

(a) $\dfrac{1}{x^2-x}-\dfrac{1}{x}\geq\dfrac{2}{x-1}$

(b) $\dfrac{(x+1)(x-2)^{20}}{(x-1)^5}\leq 0$

Esercizio 6 (10 punti). Risolvere in $\mathbb{R}$ il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} x^3 - x^2 - 4x + 4 < 0 \\ \dfrac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - 2x} \leq 0 \end{cases}.$$

Esercizio 7 (10 punti). Si consideri il polinomio di secondo grado

$$p(x) = 9x^2 - 6x + 2.$$

(a) Dimostrare che $p(x)$ non si annulla per nessun valore di $x \in \mathbb{R}$.

(b) Dimostrare che $p(x)$ ha segno positivo per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 8 (5 punti). Siano a, b, c tre numeri reali tali che $abc = 1$. Dimostrare che allora vale

$$ab + bc + ac - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 0.$$

Es. 1	**Es. 2**	**Es. 3**	**Es. 4**	**Es. 5**	**Es. 6**	**Es. 7**	**Es. 8**

Voto: ________