Funzioni

Alessio Del Vigna

23 gennaio 2023

1 Prime definizioni

Una relazione tra due insiemi X e Y è una corrispondenza tra gli elementi di X e gli elementi di Y. Quando $x \in X$ e $y \in Y$ sono messi in corrispondenza da una relazione viene formata la coppia ordinata (x, y) e la relazione è l'insieme di tutte le coppie così formate.

Definizione 1.1. Una *relazione* fra due insiemi X e Y è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $X \times Y$.

Definizione 1.2. Una relazione tra due insiemi X e Y si dice *funzione* se ad ogni elemento di X si fa corrispondere un unico elemento di Y. Una funzione f da X a Y si denota attraverso

$$f : X \to Y,$$

con l'insieme X detto *dominio* di f e l'insieme Y detto *codominio* di f.

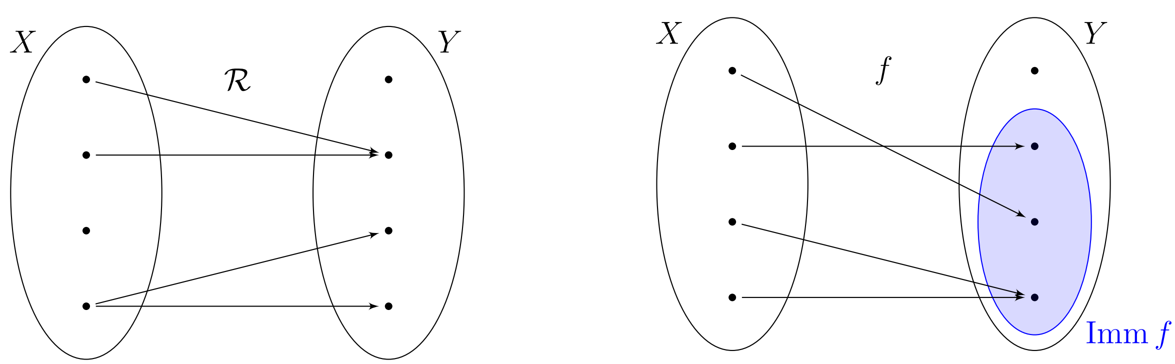

Figura 1. *A sinistra*: una relazione $\mathcal{R}$ che non è una funzione (perché?). *A destra*: una funzione f e, in blu, la sua immagine.

Se $x \in X$ è un elemento del dominio e $y \in Y$ è l'elemento del codominio che la funzione f associa ad x si scrive

$$f(x) = y$$

e tale y è detto *immagine di x tramite* f.

Definizione 1.3. Sia $f : X \to Y$ una funzione. L'*immagine* di f è l'insieme $\operatorname{Imm} f$ delle immagini di tutti gli elementi del dominio, ossia

$$\operatorname{Imm} f = \{f(x) \,:\, x \in X\}\,.$$

Osserviamo che l'immagine di una funzione è sempre un sottoinsieme (non necessariamente proprio) del codominio Y. Si osservi la Figura 1, diagramma di destra.

Esempio 1.4. Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la funzione definita da

$$f(n) = 2n.$$

Anzitutto osserviamo che f è una funzione in quanto ad ogni numero naturale è per costruzione associato un unico numero naturale. Le immagini dei primi numeri naturali sono le seguenti:

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 2, \quad f(2) = 4, \quad \ldots$$

e non è difficile provare che l'immagine di f è l'insieme dei numeri pari.

Esempio 1.5. Sia $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

Anzitutto osserviamo che f è una funzione in quanto ad ogni elemento del dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ è associato un unico numero reale. A titolo di esempio mostriamo le immagini di alcuni elementi:

$$f(3) = \frac{1}{3}, \quad f\left(-\sqrt{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad f(\pi) = \frac{1}{\pi}, \quad \ldots$$

Vogliamo ora determinare l'immagine della funzione f. Dobbiamo dunque capire quali y nel codominio $\mathbb{R}$ sono immagine di un qualche elemento x del dominio. Ciò accade se e solo se $y = \frac{1}{x}$, che equivale a $xy = 1$ poiché $x \neq 0$. L'equazione precedente equivale a $x = \frac{1}{y}$ se e solo se $y \neq 0$. Abbiamo dunque dimostrato che l'immagine della funzione è

$$\operatorname{Imm} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Esempio 1.6. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \sqrt{x}.$$

Dal fatto che le radici quadrate siano per definizione positive o nulle si ha che nessun $y < 0$ appartiene all'immagine di f. Affermiamo invece che ogni $y \geq 0$ vi appartiene: infatti se $y \geq 0$ e $y = \sqrt{x}$ allora $x = y^2$ e viceversa, e dunque y è immagine di un (solo!) elemento del dominio. Abbiamo dunque dimostrato che

$$\operatorname{Imm} f = \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

2 Grafico di una funzione

Una funzione $f : X \to Y$, essendo in particolare una relazione, è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $X \times Y$. In termini più formali

$$f = \{(x, f(x)) \,:\, x \in X\}\,,$$

ossia f è l'insieme delle coppie ordinate che hanno al primo posto un qualsiasi elemento del dominio e per secondo posto l'unico corrispondente elemento del codominio. Tale insieme è anche detto *grafico* della funzione.

Se $X \subseteq \mathbb{R}$, una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ si dice *funzione reale di variabile reale*, il suo grafico è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ e pertanto può essere rappresentato sul piano cartesiano.

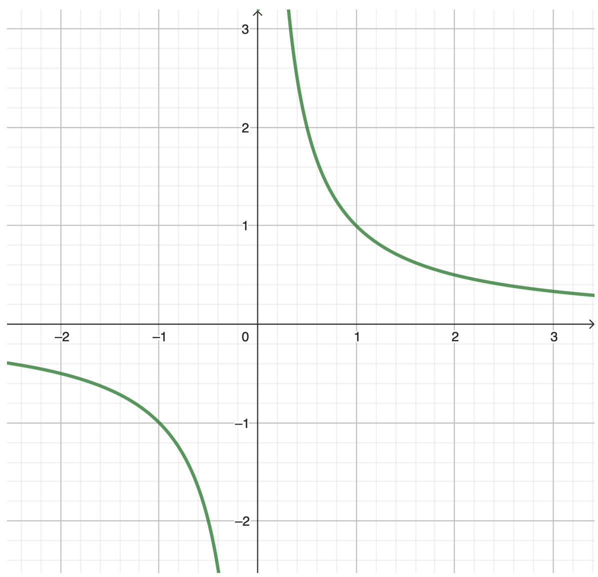

Figura 2. Grafico della funzione $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = \frac{1}{x}$.

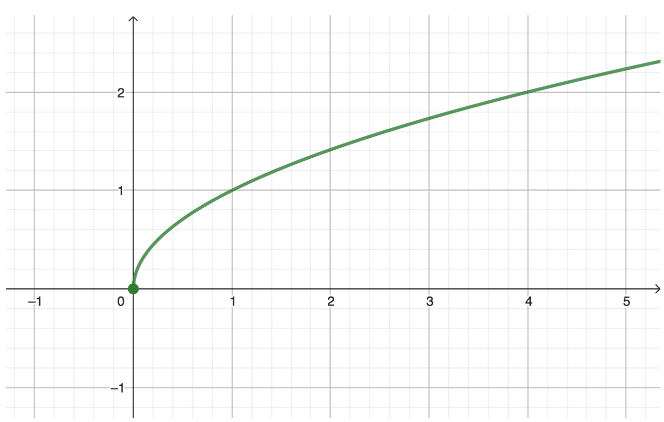

Figura 3. Grafico della funzione $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = \sqrt{x}$.

I punti del grafico cartesiano di una funzione f, dunque, sono tutti e soli quelli le cui coordinate sono legate dalla corrispondenza che definita da f tra gli elementi del dominio e quelli del codominio. In altre parole, i punti del grafico sono tutti e soli quelli le cui coordinate soddisfano l'equazione che definisce la funzione. Si verifichi questa affermazione osservando i grafici delle due funzioni mostrati nelle Figure 2 e 3.