

Nome e cognome: _____

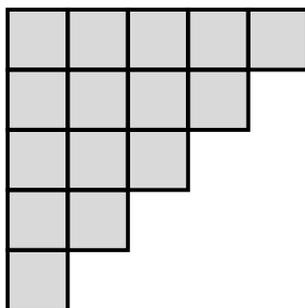
Classe: _____

Liceo Scientifico "A. Vallisneri"
Prova scritta di matematica

Esercizio 1 (15 punti). Dimostrare che per ogni $n \geq 1$ si ha

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Esercizio 2 (20 punti + 🧠). Un mosaico è fatto da tessere quadrate di lato $\ell = 1$ disposte per righe come nella figura seguente:



La prima riga contiene 5 tessere e ogni riga contiene una tessera in meno della precedente. Chiamiamo questo un mosaico di *taglia* 5.

- Quante tessere sono necessarie per realizzare un mosaico di taglia 200?
 - Immaginiamo che il mosaico di taglia 200 sia usato per ricoprire un quadrato di lato 200. Quale frazione del quadrato risulta coperta? Esprimere poi il risultato sotto forma di percentuale.
 - Quante tessere sono necessarie per realizzare un mosaico di taglia $n \geq 1$?
 - Quale frazione di un quadrato di lato n viene coperta? Esprimere il risultato come somma di due frazioni ridotte ai minimi termini.
- (🧠) Cosa accade all'espressione del punto precedente quando $n \rightarrow +\infty$? Commentare il risultato ottenuto.

Esercizio 3 (20 punti). Si consideri la successione $(a_n)_{n \geq 1}$ definita per ricorrenza come

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n} \quad \text{se } n \geq 0 \end{cases} .$$

- (a) Dimostrare che la successione è strettamente crescente.
- (b) Spiegare perché la successione è limitata inferiormente e dire qual è il “miglior” limite inferiore.
- (c) Dimostrare che la successione è limitata superiormente da 2.

Esercizio 4 (15 punti). Rispondere ai seguenti quesiti, giustificando opportunamente le risposte date.

- (a) La successione $a_n = (-1)^n$ con $n \geq 1$ è monotona?
- (b) Tre numeri interi a , b e c sono in progressione aritmetica. Dimostrare che la loro somma è multipla di 3.
- (c) Sia $(a_n)_{n \geq 1}$ una progressione aritmetica di ragione d . Dimostrare che la successione $(2^{a_n})_{n \geq 1}$ è una progressione geometrica.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4

Voto: _____