

Liceo Scientifico "A. Vallisneri"
Prova scritta di matematica

Esercizio 1 (40 punti). Fattorizzare i polinomi seguenti.

- (a) $a^3b^4 - a^2b^5 - 4a + 4b$
- (b) $16x^5y - 8x^3y + xy$
- (c) $4x^2 - 4x + 1 - y^2$
- (d) $3a^2 - 3a + 2ab - 2b - ac + c$
- (e) $3abx^2 - 6abxy - 6abx + 3aby^2 + 6aby + 3ab$
- (f) $a^3x^2 + 3a^3x + 2a^3 + 8x^2 + 24x + 16$
- (g) $a^3x^3 + a^3 + 3a^2x^3 + 3a^2 + 3ax^3 + 3a + x^3 + 1$
- (h) $x^5 - 8x^2$
- (i) $a^2x^2 - 3a^2x - 4a^2 - x^2 + 3x + 4$
- (j) $x^4 - 3x^2 - 4$

Esercizio 2 (15 punti). Si consideri il polinomio

$$p(x) = 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2.$$

- (a) Determinare tutte le radici razionali di p .
- (b) Fattorizzare p in fattori irriducibili in $\mathbb{Z}[x]$ e in $\mathbb{R}[x]$.
- (c) Risolvere in \mathbb{R} l'equazione $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = 0$.

Esercizio 3 (15 punti). Si consideri il polinomio

$$p(x) = x^4 - x^2 - 2x + 2.$$

- (a) Fattorizzare p in fattori irriducibili in $\mathbb{Z}[x]$ e in $\mathbb{R}[x]$.
- (b) Determinare le soluzioni reali dell'equazione $x^4 - x^2 - 2x + 2 = 0$.

Esercizio 4 (10 punti). Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti reali.

- (a) Se p è di terzo grado, quali sono le possibilità per la sua fattorizzazione in $\mathbb{R}[x]$? Si può concludere che p deve avere almeno una radice reale?
- (b) Rispondere alle stesse domande nel caso in cui p sia di quinto grado.
- (c) Dimostrare che se p ha grado dispari allora ha almeno una radice reale.

Esercizio 5 (10 punti). Rispondere ai seguenti quesiti, giustificando opportunamente le risposte.

- (a) Esibire un polinomio di terzo grado a coefficienti interi che abbia come radici 1, -1 e 2.
- (b) Esibire un polinomio di terzo grado a coefficienti interi che abbia come radici soltanto 1 e -1 .
- (c) Esibire un polinomio di quarto grado a coefficienti interi che abbia quattro radici reali e come radici razionali solo 1 e -1 .
- (d) Fattorizzare il “falso quadrato” $x^4 + 4x^2 + 16$ in fattori irriducibili in $\mathbb{R}[x]$.

Esercizio 6 (2). Dimostrare che il polinomio $xy + 1$ è irriducibile in $\mathbb{R}[x, y]$.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6

Voto: _____