

Nome e cognome: _____

Classe: _____

Liceo Scientifico "A. Vallisneri"
Prova scritta di matematica

Esercizio 1 (15 punti). Risolvere le seguenti equazioni logaritmiche:

(a) $\log_{\frac{1}{2}} \log_2(x^2 - 2x + 8) = -2$

(b) $\frac{\ln x^2}{\ln(x-1)} = 2$

(c) $\log(1-x) + \log(1+x) = 2\log(-x)$

Esercizio 2 (20 punti). Risolvere le seguenti disequazioni esponenziali:

(a) $2 + \log_{\frac{1}{2}}(|x^2 - 1| + 1) \leq 0$

(b) $\frac{\ln x + 1}{\ln^2 x - \ln x} \leq 0$

Esercizio 3 (15 punti). Si consideri la funzione

$$f(x) = e - e^{x-1}.$$

- (a) Tracciare il grafico di f , individuandone in particolare le intersezioni con gli assi cartesiani e l'asintoto.
- (b) Determinare dominio e immagine di f . Dimostrare che f è invertibile e determinare la funzione inversa.
- (c) Tracciare il grafico della retta $y = x$ insieme a quello di f . Giustificare esaurientemente perché l'equazione

$$e - e^{x-1} = x$$

ha una sola soluzione reale α . Determinare inoltre un intervallo di ampiezza 2 che contiene α .

Esercizio 4 (10 punti). Il numero di batteri in una colonia che ne contiene inizialmente 1000 raddoppia ogni 20 minuti. La legge $n(t)$ che descrive il numero di batteri in funzione del tempo è una legge esponenziale.

- (a) Determinare la legge di crescita del numero di batteri presenti nella colonia in funzione del tempo misurato in ore. Esprimere tale legge utilizzando una base intera.
- (b) Determinare il tempo τ necessario affinché il numero di batteri nella colonia triplichi.
- (c) Calcolare l'aumento percentuale del numero di batteri trascorsa 1 ora e 20 minuti dall'istante iniziale.

Esercizio 5 (10 punti). Rispondere ai seguenti quesiti, giustificando opportunamente la risposta data.

- (a) Dimostrare che $\log_a b \cdot \log_b a = 1$ per ogni a e b positivi e diversi da 1.
- (b) Calcolare la somma

$$\log \frac{1}{2} + \log \frac{2}{3} + \log \frac{3}{4} + \cdots + \log \frac{8}{9} + \log \frac{9}{10}.$$

- (c) Scrivere sotto forma di somma di logaritmi l'espressione

$$\ln \frac{\sqrt{ab^2}}{c}.$$

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5

Voto: _____