Il numero e

Alessio Del Vigna

2 maggio 2024

1 Introduzione storica

La storia del numero e è legata a quella dei logaritmi e al nome di John Napier (1550-1617), tanto che e viene anche chiamato il *numero di Nepero* (nome italianizzato del matematico scozzese). In realtà, Napier non era un matematico nel senso moderno e professionale del termine; era piuttosto un gentiluomo di campagna che aveva studiato all'università di St. Andrews, la più antica della Scozia. Impegnato e brillante nella vita pubblica, a lungo coinvolto nelle diatribe teologiche e nelle meno nobili guerre di religione, Napier era un intellettuale a cui non mancavano senso di responsabilità civile e spirito pratico. Si interessò a quelli che sarebbero diventati i logaritmi nel tentativo di semplificare i calcoli di trigonometria sferica.

Negli scritti di Napier non compare esplicitamente il numero e né il simbolo con cui lo indichiamo oggi; al matematico si deve però l'invenzione della parola "logaritmo", che coniò unendo le parole greche "lógos" (rapporto) e "àrithmós" (numero). La costante e, indicata con la lettera b in quel caso, si trova per la prima volta in due lettere di Leibniz a Huygens del 1690 e del 1691. La lettera e fa finalmente la sua comparsa nel 1727 nel volume *Mechanica* del matematico svizzero Eulero (1707-1783).

2 Definizione e prime proprietà

Definizione 2.1. Poniamo

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}.$$

Per garantire che quella data sia una buona definizione andrebbe provato che la somma infinita in essa presente converge. Non abbiamo tuttavia gli strumenti per farlo, per cui tale fatto verrà assunto per vero.

Proposizione 2.2. *Vale che* $2 < e < 3$.

Dimostrazione. Dalla definizione è ovvio che $e > 2$, poiché i primi due addendi della somma che definisce e hanno somma 2. Per dimostrare che $e < 3$ dobbiamo dimostrare che la somma di tutti gli altri addendi è minore di 1, ossia che

$$\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots < 1.$$

Si può dimostrare, ad esempio per induzione, che per ogni $n \geq 3$ vale la disuguaglianza $n! > 2^{n-1}$. Passando ai reciproci si ha dunque che $\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}$ e allora

$$\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots < \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1,$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo sfruttato la formula per la somma degli infiniti termini di una progressione geometrica.[1] □

Un modo per determinare l'espansione decimale di e consiste nell'utilizzare proprio la somma infinita che lo definisce, che è rapidamente convergente. Ecco le prime cifre decimali:

$$e = 2.718281828459045\ldots$$

Nella Sezione 3 mostreremo che e è un numero irrazionale, per cui la sua espansione decimale è illimitata e non periodica. Il 5 dicembre del 2020 è stato annunciato il calcolo di ben 31415926535897 cifre decimali di e.

3 L'irrazionalità di e

La prima dimostrazione dell'irrazionalità di e è del 1737 ed è dovuta a Eulero. Quella che presentiamo sotto, invece, è la prova data nel 1815 dal matematico francese Joseph Fourier.

Teorema 3.1. *Il numero* e *è irrazionale.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che e sia razionale, ossia che $e = \frac{a}{b}$ con a e b interi positivi. Sappiamo che e non è un numero intero perché è compreso fra 2 e 3, quindi il denominatore b deve essere almeno uguale a 2.

Prendiamo un numero $k \geq b$ e consideriamo il numero

$$\alpha = k!\left(e - \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!}\right).$$

[1] Una prova diretta del fatto che la somma $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$ sia uguale a 1, assunto di sapere già che tale somma esista, è la seguente. Si ha

$$S = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots\right) = \frac{1}{2}(1 + S),$$

da cui segue $S = 1$.

Affermiamo che α è un numero intero. Infatti, se $k \geq b$ allora $k!$ è multiplo di b, quindi $k!e = k!\frac{a}{b}$ è intero; anche $k!\sum_{n=0}^{k}\frac{1}{n!}$ è intero perché $k!$ è multiplo di tutti i denominatori degli addendi della somma.

È ovvio per la sua definizione che $\alpha > 0$. Inoltre

$$\begin{aligned}
\alpha &= k!\sum_{n=k+1}^{+\infty}\frac{1}{n!} = \\
&= \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} + \cdots < \\
&< \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{(k+1)^3} + \cdots
\end{aligned}$$

L'ultima somma scritta è

$$S = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{(k+1)^3} + \cdots = \frac{1}{k+1}(1+S),$$

da cui segue che $S = \frac{1}{k}$. Abbiamo quindi provato che $\alpha < \frac{1}{k} < 1$, poiché $k \geq b \geq 2$.

Possiamo ora concludere la prova. In definitiva, assumendo e razionale, avremmo un numero α intero e tale che $0 < \alpha < 1$, che è assurdo. $\square$

Uno potrebbe pensare che il ragionamento esposto nella dimostrazione precedente non sia sufficiente per mostrare che e^2 è un numero irrazionale. Questa infatti è un'affermazione più forte perché non è detto che il quadrato di un numero irrazionale sia irrazionale (basta pensare a $\sqrt{2}$). Invece non è così! Con due osservazioni simili alla dimostrazione vista sopra, ma più ingegnose, si può avanzare di ben due passi: il matematico Liouville, in una pubblicazione del 1840, dimostrò così che e^2 e e^4 sono irrazionali. Andando avanti nel tempo troviamo un risultato più generale, che comprende i tre casi visti sinora.

Teorema 3.2 (Koksma, 1949)**.** *Il numero e^q è irrazionale per ogni $q \neq 0$ razionale.*

Il precedente teorema chiude il capitolo delle potenze con esponente razionale del numero e e il terreno si fa molto più complicato quando si vanno a considerare potenze con esponente non razionale. Ecco un teorema, dimostrato sempre nel corso del XX secolo.

Teorema 3.3 (Gelfond, 1929)**.** *Il numero e^π è irrazionale.*

Nel corso del tempo è stata dimostrata l'irrazionalità di altri numeri, come $2^{\sqrt{2}}$, $e^{\pi\sqrt{2}}$ e anche $e^\pi + \pi$. Tuttavia è ancora un problema aperto stabilire se sono irrazionali o meno i numeri seguenti:

$$2^e, \quad \pi^e, \quad \pi^{\sqrt{2}}, \quad e+\pi, \quad e\pi.$$

Riguardo a $e+\pi$ e $e\pi$ è noto però che almeno uno dei due deve essere irrazionale.