Insiemi e logica

Alessio Del Vigna

10 ottobre 2023

Indice

1 Introduzione agli insiemi

Un *insieme* è una collezione di oggetti, che prendono il nome di *elementi* dell'insieme. In questo modo abbiamo l'insieme di tutti gli studenti iscritti al Liceo Vallisneri nell'anno scolastico 2021-2022, l'insieme di tutti i numeri naturali pari, l'insieme dei punti di un piano che distano esattamente 2 centimetri da un punto dato, l'insieme di tutti gli elefanti rosa. Per convenzione, gli insiemi vengono spesso denotati con lettere maiuscole, come A, B, S, X, eccetera.

1.1 Rappresentazione di Eulero-Venn e per elencazione

Un modo per rappresentare gli insiemi sono i *diagrammi di Eulero-Venn*: si disegna un ovale, all'interno del quale si scrivono gli elementi dell'insieme. Così l'insieme delle prime tre lettere dell'alfabeto italiano sarà rappresentato come

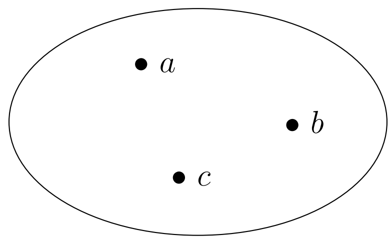

Figura 1. Rappresentazione di Eulero-Venn dell'insieme delle prime tre lettere dell'alfabeto.

Un ulteriore modo per rappresentare un insieme è *per elencazione*, ovvero si elencano gli elementi dell'insieme tra parentesi graffe.

Esempio 1.1. Vediamo degli esempi di insiemi e di come scriverli per elencazione.

(i) L'insieme delle prime tre lettere dell'alfabeto è $A = \{a, b, c\}$.

(ii) Questo esempio è importante perché si introducono i simboli di due insiemi numerici. L'insieme dei *numeri naturali* è l'insieme dei numeri che si utilizzano per contare, ossia

$$\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}\,.$$

L'insieme dei *numeri interi* è l'insieme

$$\mathbb{Z} = \{\ldots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}\,.$$

(iii) L'insieme dei numeri naturali minori o uguali a 3 è $B = \{0, 1, 2, 3\}$, mentre l'insieme dei numeri interi minori o uguali a 3 è $C = \{\ldots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$.

(iv) Nulla vieta che un insieme possa avere come elemento un altro insieme. Per esempio consideriamo

$$X = \{a,\ \{b, c\}\}\,.$$

Questo è un insieme che ha per elementi a e l'insieme $\{b, c\}$. L'insieme X è infatti diverso dall'insieme $A = \{a, b, c\}$ del punto (i), che invece ha per elementi a, b, e c. Possiamo infatti pensare A come una scatola che contiene tre palline, una con etichetta a, una con etichetta b e una con etichetta c. Invece X è una scatola che contiene una pallina con etichetta a e poi una ulteriore scatola, contenente una pallina con etichetta b e una con etichetta c.

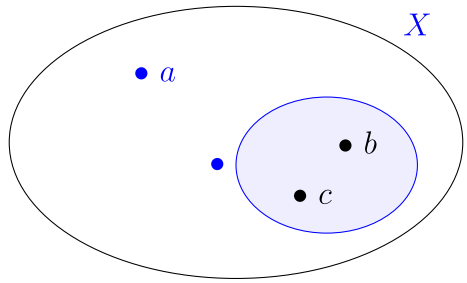

Figura 2. Rappresentazione di Eulero-Venn dell'insieme $X = \{a, \{b, c\}\}$. I due elementi di X sono indicati in blu.

Definizione 1.2. L'insieme privo di elementi è l'*insieme vuoto* e si indica con $\emptyset$.

Esempio 1.3. L'insieme dei numeri naturali minori di -5 è vuoto. L'insieme delle province della Toscana il cui nome inizia con la lettera B è vuoto.

Definizione 1.4. Un insieme che ha un numero finito di elementi si dice *insieme finito*. Se A è finito, il numero di elementi di A è detto *cardinalità* di A e si denota con $\#A$.

Si osservi che, rispetto alla definizione precedente, il concetto di cardinalità non è definito per insiemi infiniti[1].

Esempio 1.5. Presentiamo esempi di insiemi finiti e infiniti, e per quelli finiti determiniamo la cardinalità.

(i) Gli insiemi $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ non sono insiemi finiti.

(ii) L'insieme $A = \{a, b, c\}$ è un insieme finito con 3 elementi, dunque $\#A = 3$.

(iii) L'insieme vuoto non ha elementi, per cui $\#\emptyset = 0$.

(iv) L'insieme dei divisori di 10 è $\{1, 2, 5, 10\}$, è finito e ha cardinalità pari a 4.

(v) L'insieme $X = \{a, \{b, c\}\}$ ha due elementi, pertanto $\#X = 2$.

(vi) L'insieme $Y = \{\emptyset\}$ è un insieme che ha come unico elemento l'insieme vuoto $\emptyset$. Dunque Y ha un solo elemento, cioè $\#Y = 1$. Possiamo immaginare Y come una scatola che al suo interno ha una scatola vuota: Y non è vuoto!

[1] La parte della Matematica che studia gli insiemi definisce il concetto di cardinalità anche per insiemi infiniti, ma ciò esula dallo scopo di queste note.

1.2 Il simbolo di appartenenza

Sia A un insieme. Per indicare che un certo a è un elemento di A si scrive

$$a \in A$$

dove "$\in$" è detto *simbolo di appartenenza.* La scrittura $a \in A$ si legge infatti "a appartiene all'insieme A". Quando invece a non è un elemento dell'insieme A si scrive $a \notin A$.

Esempio 1.6. Vale che $1 \in \mathbb{N}$, $1 \in \mathbb{Z}$, $-2 \notin \mathbb{N}$. Relativamente all'insieme $X = \{a, \{b, c\}\}$ dell'Esempio 1.1-(iv), possiamo scrivere che $a \in X$, che $\{b, c\} \in X$ e che $b \notin X$ e $c \notin X$.

1.3 Rappresentazione per proprietà caratteristica

C'è un altro modo per rappresentare un insieme, che è quello tipicamente più utilizzato perché evita di doverne elencare gli elementi. Questa terza rappresentazione prende il nome di *rappresentazione per proprietà caratteristica*, e consiste nel raccogliere tutti e soli gli elementi di un già dato insieme X che soddisfano una certa proprietà. Sottolineiamo due punti chiave della precedente frase:

- deve essere già dato un insieme X da cui prendere gli elementi che ci interessano;
- la proprietà deve identificare precisamente gli elementi dell'insieme che vogliamo definire, ossia tutti gli elementi dell'insieme e nessun altro.

La scrittura di un insieme per proprietà caratteristica ha la seguente forma:

$$A = \{x \in X \,:\, x \text{ soddisfa la proprietà } P\},$$

che si legge "A è l'insieme degli x appartenenti all'insieme X tali che soddisfano la proprietà P". Dunque " : " si legge "tale che", e un simbolo alternativo è " | ".

Esempio 1.7. Presentiamo esempi di scrittura di un insieme per proprietà caratteristica a partire dalla sua scrittura per elencazione.

(i) L'insieme $A = \{0, 1, 2, 3\}$ si può scrivere come $A = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 3\}$ o anche come $A = \{n \in \mathbb{N} : n < 4\}$.

(ii) L'insieme $B = \{10, 11, 12, \ldots\}$ si può scrivere come $B = \{n \in \mathbb{N} : n \geq 10\}$, dato che B ha per elementi i numeri naturali maggiori o uguali a 10.

(iii) L'insieme $C = \{4, 5, 6, 7\}$ si può scrivere come $C = \{n \in \mathbb{N} : 4 \leq n \leq 7\}$, dove la scrittura $4 \leq n \leq 7$ è un'abbreviazione per dire che n deve essere maggiore o uguale a 4 e simultaneamente minore o uguale a 7.

(iv) L'insieme $D = \{1, 2, 5, 10\}$ dei divisori di 10 può essere espresso per proprietà caratteristica come $D = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ divide } 10\}$.

Esempio 1.8. Vediamo adesso qualche esempio più articolato, in cui gli elementi dell'insieme sono di un particolare tipo, ossia hanno una particolare forma.

(i) L'insieme $\mathcal{P}$ dei numeri pari può essere scritto come

$$\mathcal{P} = \{n \in \mathbb{N} \,:\, n = 2k,\ k \in \mathbb{N}\}\,.$$

Ciò significa che $\mathcal{P}$ ha per elementi tutti i numeri naturali n della forma $n = 2k$ al variare di k nell'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$, che sono precisamente i numeri pari.

(ii) L'insieme $\mathcal{D}$ dei numeri dispari può essere scritto come

$$\mathcal{D} = \{n \in \mathbb{N} \,:\, n = 2k+1,\ k \in \mathbb{N}\}\,.$$

Gli elementi di $\mathcal{D}$, i numeri dispari, sono infatti i numeri naturali del tipo $n = 2k+1$ al variare di k nell'insieme $\mathbb{N}$.

(iii) Consideriamo $A = \{4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12\}$. Questo insieme è costituito da tutti i numeri pari compresi fra 4 e 12, per cui potremo scriverlo come

$$A = \{n \in \mathbb{N} \,:\, n = 2k,\ k \in \mathbb{N},\ 2 \le k \le 6\}$$

o equivalentemente come $A = \{n \in \mathbb{N} \,:\, n = 2k,\ k \in \mathbb{N},\ 4 \le n \le 12\}$.

(iv) Consideriamo l'insieme $B = \{0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ \ldots\}$, che riconosciamo essere l'insieme dei quadrati dei numeri naturali. Dunque potremo scrivere per proprietà caratteristica

$$B = \left\{n \in \mathbb{N} \,:\, n = k^2,\ k \in \mathbb{N}\right\}.$$

(v) L'insieme dei multipli di 3 è l'insieme

$$\{0,\ 3,\ 6,\ 9,\ \ldots\} = \{n \in \mathbb{N} \,:\, n = 3k,\ k \in \mathbb{N}\}\,.$$

In modo analogo si può scrivere l'insieme dei multipli di un qualsiasi numero naturale.

(vi) La caratteristica dell'insieme dei multipli di 3 è che, a partire dal numero 0, la distanza fra due multipli successivi di 3 è precisamente 3. Questa osservazione può essere utile per caratterizzare altri insiemi, come questo:

$$C = \{2,\ 5,\ 8,\ 11,\ \ldots\}\,.$$

Gli elementi di questo insieme sono tali che, a partire dal numero 2, la distanza fra due elementi consecutivi è 3. Questa proprietà permette di esprimere gli elementi di C in maniera analoga a quanto fatto nel punto (v):

$$C = \{n \in \mathbb{N} \,:\, n = 2 + 3k,\ k \in \mathbb{N}\}\,.$$

2 Logica delle proposizioni

Parleremo ora di quella parte della matematica che si preoccupa di dare gli strumenti e i modi per fondare la teoria matematica astratta: la logica.

2.1 Le proposizioni

Parlare di enunciati in matematica è diverso che parlare di enunciati nel senso comune. Infatti, normalmente un enunciato è una qualsiasi frase di senso compiuto, mentre la logica considera solo un tipo particolare di enunciati, chiamati proposizioni.

Definizione 2.1. Una *proposizione* è un enunciato che sia possibile dichiarare vero o falso in modo oggettivo.

Esempio 2.2. Vediamo esempi di proposizioni e non.

(i) Gli enunciati "3 è un divisore di 10", "Roma è nel Lazio", "Marte è un pianeta" sono proposizioni: la prima è falsa, mentre la seconda e la terza sono vere.

(ii) Gli enunciati "Il prof. Del Vigna è simpatico" e "La IX sinfonia di Beethoven è bella" non sono proposizioni. Infatti non possono essere considerati proposizioni degli enunciati che esprimono un giudizio soggettivo o un'opinione.

Tipicamente le proposizioni si denotano con lettere minuscole, ad esempio p, q e r. Così si potrà scrivere

$$p \, : \text{"4 è un numero primo"}$$

e si potrà dire che p è falsa. Assegnamo il simbolo V ad una proposizione vera e il simbolo F a una proposizione falsa.

Definizione 2.3. I due simboli V e F vengono detti *valori di verità*.

La definizione di proposizione che abbiamo dato ha insite due proprietà dei valori di verità che è bene rendere esplicite perché sono a fondamento della logica classica.

- Il *principio del terzo escluso* afferma che una proposizione può essere solamente vera o falsa, ossia che non è data una terza possibilità per il suo valore di verità (in latino, *tertium non datur*).

- Il *principio di non contraddizione* afferma invece che una proposizione non può essere sia vera sia falsa allo stesso tempo.

Possiamo riassumere questi due principi dicendo che una proposizione può essere solamente o vera o falsa.

2.2 I connettivi

I connettivi sono operatori che permettono di costruire delle proposizioni a partire da altre proposizioni. I connettivi hanno dei nomi presi dalla lingua italiana: “non”, “e”, “o” e “allora”, dunque se ne può intuire il significato. Tuttavia questo non basta per poter dare una definizione precisa dell’azione dei connettivi, che andranno quindi definiti in maniera rigorosa.

2.2.1 La negazione

Definizione 2.4. Sia p una proposizione. La *negazione* di p è la proposizione $\bar{p}$ (che si legge “non p” e talvolta si denota con $\neg p$) tale che

p	$\bar{p}$
V	F
F	V

Dunque se la proposizione p è vera allora la negazione $\bar{p}$ è falsa, e viceversa, se p è falsa allora la negazione $\bar{p}$ è vera.

Esempio 2.5. Vediamo come costruire la negazione di una proposizione data.

(i) Se p è la proposizione “Luca mangia” allora la negazione $\bar{p}$ è “Luca non mangia”.

(ii) Se q è la proposizione “4 è un numero pari” allora la negazione $\bar{q}$ è la proposizione “4 non è un numero pari”.

Esempio 2.6. Supponiamo di leggere la seguente proposizione: “Sono state smentite le previsioni secondo le quali sarebbe stata annullata la disposizione del Comune che revoca alla ditta la costruzione dell’edificio scolastico”. La ditta costruirà l’edificio o no? La proposizione p è “la dittà costruirà l’edificio scolastico”. La revoca alla ditta è data da $\neg p$ e la disposizione della revoca ci dice che $\neg p$ vera; l’annullamento della disposizione significa che $\neg(\neg p)$ è stata dichiarata vera; smentire l’annullamento significa affermare che $\neg(\neg(\neg p))$ è vera. Ma $\neg(\neg(\neg p))$ vera significa p falsa e dunque la ditta non costruirà l’edificio scolastico.

2.2.2 La congiunzione

Definizione 2.7. Siano p e q due proposizioni. La *congiunzione* tra p e q è la proposizione $p \wedge q$ (che si legge “p e q”) tale che

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

In altre parole, $p \wedge q$ è vera solo nel caso in cui le due proposizioni sono vere.

Esempio 2.8. La proposizione “Marta gioca a pallavolo e suona il pianoforte” è la congiunzione tra p : “Marta gioca a pallavolo” e q : “Marta suona il pianoforte”, e risulta vera se Marta fa entrambe le attività.

Esempio 2.9. La proposizione “L’Asia è un continente e $2 + 3 = 5$” è vera, in quanto congiunzione di due proposizioni vere. Ovviamente la frase precedente, seppur valida e vera logicamente, è priva di connessione di senso tra i due enunciati.

2.2.3 La disgiunzione

Il connettivo di disgiunzione corrisponde all’italiano “o”. Iniziamo con un esempio perché l’uso che ne facciamo in italiano presenta sfumature diverse dalla definizione matematica che daremo.

Esempio 2.10. Se noi affermiamo “domani comprerò le mele o le pere” solitamente intendiamo dire che il giorno seguente potremo comprare solo le mele o solo le pere. Questo è il senso comune che attribuiamo alla frase, anche se per esser precisi avremmo dovuto dire “domani comprerò o le mele o le pere”. Il senso che dovrebbe avere la prima frase è che il giorno seguente si possano comprare solo le mele, solo le pere o anche entrambi i frutti. La “o” della prima frase dovrebbe quindi avere senso inclusivo, ossia contemplare anche la possibilità che si possano acquistare entrambi i prodotti. La “o” della seconda frase invece ha senso esclusivo, perché si esclude che si possano acquistare sia le mele sia le pere.

Definizione 2.11. Siano p e q due proposizioni. La *disgiunzione inclusiva* tra p e q è la proposizione $p \vee q$ (che si legge “p o q”) tale che

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Dunque $p \vee q$ è vera quando almeno una delle due proposizioni costituenti è vera, ossia è falsa solo quando entrambe le proposizioni p e q sono false.

Definizione 2.12. Siano p e q due proposizioni. La *disgiunzione esclusiva* tra p e q è la proposizione $p \dot{\vee} q$ (che si legge “o p o q”) tale che

p	q	$p \dot{\vee} q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Dunque $p \dot{\vee} q$ è vera quando almeno una delle due proposizioni costituenti è vera, ma non entrambe.

2.2.4 L'implicazione

Il connettivo che presenteremo in questo paragrafo è senza dubbio il più interessante e uno dei più utilizzati per formare proposizioni composte.

Definizione 2.13. Siano p e q due proposizioni. L'*implicazione* tra p e q è la proposizione $p \Rightarrow q$ tale che

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

La proposizione p è detta *premessa*, mentre q è detta *conclusione*. La scrittura $p \Rightarrow q$ può essere letta in diversi modi, tutti equivalenti: "p implica q", "se p allora q", "q è conseguenza di p".

Dalla definizione di implicazione segue che $p \Rightarrow q$ è falsa solo nel caso in cui la premessa è vera e la conclusione è falsa. In particolare le ultime due righe della tabella possono essere di difficile comprensione a colpo d'occhio. Cerchiamo di spiegarle con un esempio.

Esempio 2.14. Giulia formula l'enunciato "se piove allora porto l'ombrello". Il senso è da intendersi come se fosse una promessa: viene espresso che ogni volta che pioverà Giulia porterà l'ombrello. Analizziamo alcuni casi.

- Se piove e Giulia porta l'ombrello, Giulia ha mantenuto fede alla promessa e quindi ha affermato il vero, il ché giustifica la prima riga della tabella.
- Se piove ma Giulia non porta l'ombrello allora Giulia non ha rispettato la promessa e dunque ha affermato il falso. Questo è il senso della seconda riga.
- Formulando la promessa, nulla viene detto su cosa accade se non piove: dunque Giulia non avrà affermato il falso né se porta l'ombrello né se non lo porta. Questo spiega le ultime due righe della tabella: come direbbero i latini "*ex falso sequitur quodlibet*", ossia "dal falso segue una cosa a piacere".

Quando un'implicazione $p \Rightarrow q$ è vera significa dunque che il verificarsi di p basta affinché si verifichi anche q. Ciò giustifica il seguente modo di leggere l'implicazione:

p è *condizione sufficiente* per q.

Una ulteriore riformulazione equivalente dell'implicazione è

q è *condizione necessaria* per p,

che esprime la necessità di q, ossia che se non si verificasse q non si potrebbe verificare p. Questa seconda riformulazione suggerisce che $p \Rightarrow q$ abbia lo stesso significato di $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$. Ritorneremo su questa osservazione nel Teorema 2.30.

Esempio 2.15. Consideriamo l'implicazione "se 30 è multiplo di 6 allora 30 è multiplo di 2", che è chiaramente vera in quanto in generale un multiplo di 6 è anche multiplo di 2.

(i) Possiamo esprimere questa implicazione dicendo che "30 è multiplo di 6 è una condizione sufficiente affinché 30 sia multiplo di 2", nel senso che la premessa basta affinché segua la conclusione.

(ii) La stessa implicazione si può esprimere dicendo che "30 è multiplo di 2 è condizione necessaria per 30 è multiplo di 6", dato che se 30 non fosse multiplo di 2 non potrebbe neanche essere multiplo di 6.

Definiamo adesso un ulteriore connettivo a partire da quelli già introdotti.

Definizione 2.16. Siano p e q due proposizioni. La *doppia implicazione* tra p e q è la proposizione $p \Leftrightarrow q$ definita come $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

La scrittura $p \Leftrightarrow q$ si legge

"p se e solo se q"

e afferma che valgono simultaneamente le implicazioni $p \Rightarrow q$ (che corrisponde al "solo se") e $q \Rightarrow p$ (che corrisponde al "se"). Dunque la doppia implicazione si potrà anche formulare dicendo che

p è *condizione necessaria e sufficiente* per q.

Esempio 2.17. Consideriamo la proposizione "se vado a scuola compro i libri, e in nessun altro caso compro i libri". Tale frase può essere formalizzata come doppia implicazione: la prima parte della frase ci dice che vale "se vado a scuola allora compro i libri", mentre la seconda fornisce l'implicazione "se compro i libri allora significa che vado a scuola", in quanto in nessun altro caso vegono acquistati i libri. Dunque possiamo dire "vado a scuola se e solo se compro i libri".

Esempio 2.18. L'affermazione "un triangolo è isoscele se e solo se ha due angoli congruenti" significa che se un triangolo è isoscele allora deve avere due angoli congruenti e che se un triangolo ha due angoli congruenti allora deve essere isoscele.

2.3 Formule e equivalenza logica

Definizione 2.19. Una proposizione ottenuta da altre proposizioni usando i connettivi logici è detta *formula*.

Come notazione, per le formule useremo le lettere greche φ, ψ e simili.

Esempio 2.20. Le proposizioni $(p \wedge q) \vee \overline{r}$ e $\overline{p} \Rightarrow (q \vee r)$ sono formule. Come sempre, se ci sono parentesi hanno priorità le operazioni entro parentesi. Dunque $p \Rightarrow (q \wedge r)$ e $(p \Rightarrow q) \wedge r$ sono due formule distinte.

Costruire la *tavola di verità* di una certa formula significa dire il valore di verità della formula in funzione del valore di verità delle proposizioni che la costituiscono.

Esempio 2.21. Costruiamo la tavola di verità della seguente formula:

$$p \vee (q \Rightarrow p).$$

Le variabili sono due, dunque abbiamo quattro possibilità per i loro valori di verità. Per la costruzione di una tavola di verità ci si può avvalere dell'uso di colonne ausiliarie.

p	q	$q \Rightarrow p$	$p \vee (q \Rightarrow p)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	V

Esempio 2.22. Costruiamo la tavola di verità della seguente formula:

$$(p \wedge q) \vee (q \Rightarrow r).$$

Stavolta abbiamo tre proposizioni in gioco e dunque in tutto compariranno 8 combinazioni di valori di verità. Procedendo come nell'esempio precedente si ha

p	q	r	$p \wedge q$	$q \Rightarrow r$	$(p \wedge q) \vee (q \Rightarrow r)$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	V
V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	V
F	V	V	F	V	V
F	V	F	F	F	F
F	F	V	F	V	V
F	F	F	F	V	V

Due formule contenenti le stesse proposizioni possono essere formule diverse ma può succedere che abbiano la stessa tavola di verità. Questo significa che, su tutti i valori di verità per le proposizioni costituenti, le due formule assumono lo stesso valore di verità.

Definizione 2.23. Due formule φ e ψ che dipendono dalle stesse variabili e che hanno la stessa tavola di verità riga per riga si dicono *logicamente equivalenti*, e si scrive $\varphi \equiv \psi$.

2.4 Equivalenze logiche notevoli

Le equivalenze logiche sono di fondamentale importanza, perché permettono di riformulare le proposizioni in più modi tra loro equivalenti.

Teorema 2.24 (leggi di De Morgan)**.** *Valgono le seguenti due equivalenze logiche:*

(i) $\overline{p \vee q} \equiv \bar{p} \wedge \bar{q}$;

(ii) $\overline{p \wedge q} \equiv \bar{p} \vee \bar{q}$.

Dimostrazione. (i) Per provare l'equivalenza logica tra $\overline{p \vee q}$ e $\bar{p} \wedge \bar{q}$ basta costruire le loro tavole di verità e verificare che coincidono riga per riga. Poiché vale che

p	q	$p \vee q$	$\overline{p \vee q}$
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	V

e

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{p} \wedge \bar{q}$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

la dimostrazione è conclusa.

(ii) La dimostrazione di questa seconda legge è analoga a quella della prima, ed è quindi lasciata come esercizio. □

Almeno a livello intuitivo vogliamo dare un riscontro linguistico delle leggi di De Morgan, perché in effetti le applichiamo inconsapevolmente nel parlato in svariate occasioni.

Esempio 2.25. Prendiamo ad esempio la prima legge di De Morgan (Teorema 2.24-(i)). Supponiamo che

$$p : \text{“vado al mare”} \quad \text{e} \quad q : \text{“vado in montagna”}.$$

Consideriamo $p \vee q$, che sarà quindi “vado al mare o in montagna”. La negazione di questa frase, ossia $\overline{p \vee q}$, in italiano si formula come “non vado né al mare e né in montagna”. In effetti quest'ultima è la congiunzione delle negazioni di p e q, ossia $\bar{p} \wedge \bar{q}$.

Teorema 2.26 (della doppia negazione)**.** *Vale che* $\bar{\bar{p}} \equiv p$.

Dimostrazione. La dimostrazione è lasciata per esercizio. □

Esempio 2.27. Il contenuto del precedente teorema si può enunciare informalmente dicendo che negare due volte è come affermare. Infatti dire che “non è vero che non vado al mare” significa affermare “vado al mare”.

Nella Sezione 2.2.4 avevamo accennato al fatto che l'implicazione $p \Rightarrow q$ e l'implicazione $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ esprimessero la stessa cosa. Adesso abbiamo gli strumenti per provare che sono logicamente equivalenti. Prima di vedere la dimostrazione diamo una definizione e vediamo un esempio linguistico.

Definizione 2.28. Data un'implicazione $p \Rightarrow q$, la sua *contronominale* è l'implicazione $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$.

Esempio 2.29. Consideriamo l'implicazione “se ho fame allora mangio”, così p sarà la proposizione “ho fame” e q sarà la proposizione “mangio”. La sua contronominale è

“se non mangio allora non ho fame”.

Che queste siano equivalenti è abbastanza chiaro in italiano, basta leggerle e riflettere sul senso che hanno: noto che “se ho fame allora mangio”, se non sto mangiando vuol dire che non ho fame, perché se avessi avuto fame avrei dovuto mangiare.

Teorema 2.30 (della contronominale)**.** *Vale che* $p \Rightarrow q \equiv \bar{q} \Rightarrow \bar{p}$.

Dimostrazione. Le tavole di verità dell'implicazione $p \Rightarrow q$ e della sua contronominale $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ sono rispettivamente

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

e

p	q	$\bar{q}$	$\bar{p}$	$\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$
V	V	F	F	V
V	F	V	F	F
F	V	F	V	V
F	F	V	V	V

Le due tavole coincidono riga per riga e questo dimostra che $p \Rightarrow q$ e $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ sono logicamente equivalenti. □

Proseguiamo con una proprietà che riguarda ancora l'implicazione. Per capire il contenuto del teorema al di là della dimostrazione basta pensare alla definizione di implicazione: dire che una implicazione è falsa è equivalente a dire che vale la premessa e non vale la conclusione.

Teorema 2.31 (negazione dell'implicazione)**.** *Vale che* $\overline{p \Rightarrow q} \equiv p \wedge \bar{q}$.

Dimostrazione. Le tavole di verità di $\overline{p \Rightarrow q}$ e $p \wedge \bar{q}$ sono rispettivamente

p	q	$\overline{p \Rightarrow q}$
V	V	F
V	F	V
F	V	F
F	F	F

e

p	q	$p \wedge \bar{q}$
V	V	F
V	F	V
F	V	F
F	F	F

dunque coincidono riga per riga. □

Esempio 2.32. Consideriamo ancora l'implicazione "se ho fame allora mangio". Negare questa implicazione significa affermare che "ho fame e non mangio".

Osservazione 2.33. Dal precedente Teorema 2.31 segue anche una riformulazione dell'implicazione. Si ha infatti

$$p \Rightarrow q \equiv \overline{\overline{p \Rightarrow q}} \equiv \overline{p \wedge \bar{q}} \equiv \bar{p} \vee \bar{\bar{q}} \equiv \bar{p} \vee q.$$

Nel primo passaggio abbiamo usato il Teorema 2.26 sulla doppia negazione, nel secondo passaggio il Teorema 2.31 sulla negazione dell'implicazione, poi una delle due leggi di De Morgan (Teorema 2.24-(ii)) e infine nuovamente il teorema sulla doppia negazione. Abbiamo quindi ottenuto che

$$p \Rightarrow q \equiv \bar{p} \vee q,$$

che ha il seguente senso intuitivo: dire che vale l'implicazione $p \Rightarrow q$ significa che o non vale p o vale q.

Il teorema che segue esprime delle equivalenze logiche che esprimono proprietà dei connettivi introdotti.

Teorema 2.34 (proprietà dei connettivi)**.** *Valgono le seguenti proprietà:*

(i) $p \wedge q \equiv q \wedge p$ *(proprietà commutativa della congiunzione);*

(ii) $p \vee q \equiv q \vee p$ *(proprietà commutativa della disgiunzione);*

(iii) $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ *(proprietà associativa della congiunzione);*

(iv) $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ *(proprietà associativa della disgiunzione);*

(v) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ *e* $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ *(proprietà distributive).*

Dimostrazione. La dimostrazione di queste proprietà consiste nella costruzione delle tavole di verità. A titolo di esempio dimostriamo $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$, una delle proprietà distributive. Le due tavole di verità sono

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	V
V	F	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	F
F	V	F	V	F
F	F	V	V	F
F	F	F	F	F

e

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	V
V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F
F	V	V	F	F	F
F	V	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F
F	F	F	F	F	F

Le due tavole coincidono riga per riga, pertanto la proprietà è dimostrata. $\square$

2.5 Tautologie e schemi di ragionamento

Definizione 2.35. Una formula è una *tautologia* se risulta vera per qualsiasi valore di verità delle variabili.

Definizione 2.36. Una formula è una *contraddizione* se risulta falsa per qualsiasi valore di verità delle variabili. Una contraddizione si indica con il simbolo $\perp$.

Si osservi subito che la negazione di una tautologia è una contraddizione, e viceversa la negazione di una contraddizione è una tautologia.

Esempio 2.37. Vediamo i due esempi più semplici di tautologia e contraddizione.

(i) La proposizione $p \vee \overline{p}$ è una tautologia. Se infatti costruiamo la sua tavola di verità si ottiene

p	$\overline{p}$	$p \vee \overline{p}$
V	F	V
F	V	V

A livello intuitivo è chiaro che la proposizione $p \vee \overline{p}$ debba esser sempre vera, in quanto esprime che vale p oppure la sua negazione.

(ii) La proposizione $p \wedge \overline{p}$ è una contraddizione, dato che risulta falsa in tutti i casi. La costruzione della tavola di verità è lasciata per esercizio e qui ci limitiamo a osservare che, intuitivamente, la proposizione risulta sempre falsa perché esprime che valga p e simultaneamente la sua negazione.

Osservazione 2.38. Le due proposizioni presentate nell'Esempio 2.37 sono legate tra loro. La proposizione $p \vee \overline{p}$ del punto (i) è una tautologia, pertanto la sua negazione sarà una contraddizione. Vogliamo mostrare che tale contraddizione è proprio quella presentata nel punto (ii). Infatti

$$\overline{p \vee \overline{p}} \equiv \overline{p} \wedge \overline{\overline{p}} \equiv \overline{p} \wedge p \equiv p \wedge \overline{p},$$

dove per la prima equivalenza abbiamo usato le leggi di De Morgan (Teorema 2.24), per la seconda il teorema sulla doppia negazione (Teorema 2.26) e infine la proprietà commutativa della congiunzione (Teorema 2.34).

Teorema 2.39. *Le seguenti formule sono tautologie:*

(i) $[(p \vee q) \wedge \overline{q}] \Rightarrow p$;

(ii) $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$;

(iii) $[(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}] \Rightarrow \overline{p}$;

(iv) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.

Dimostrazione. (i) Costruendo la tavola di verità di $[(p \vee q) \wedge \overline{q}] \Rightarrow p$ si ottiene

p	q	$p \vee q$	$\overline{q}$	$(p \vee q) \wedge \overline{q}$	$[(p \vee q) \wedge \overline{q}] \Rightarrow p$
V	V	V	F	F	V
V	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V
F	F	F	V	F	V

La dimostrazione per la (ii), la (iii) e la (iv) è analoga ed è lasciata quindi per esercizio. □

Vediamo perché le tautologie sono di fondamentale importantanza nella logica. Una tautologia è vera a prescindere dalla verità o dalla falsità degli enunciati elementari che la costituiscono, ovvero una tautologia è vera in virtù esclusivamente della sua forma e non del suo contenuto. Questo fa sì che una tautologia possa essere considerata lo schema per un ragionamento formalmente corretto. Vediamo degli esempi di ragionamenti condotti grazie alle tautologie del Teorema 2.39.

Esempio 2.40. Consideriamo il seguente ragionamento:

> "L'assassino è il professore o l'assessore. Ma è stato escluso che sia l'assessore. Dunque l'assassino è il professore."

Per condurre questo ragionamento abbiamo implicitamente utilizzato la tautologia del Teorema 2.39-(i), applicandola al caso in cui p sta per "l'assassino è il professore" e q sta per "l'assassino è l'assessore".

Esempio 2.41 (modus ponens)**.** Consideriamo il seguente ragionamento:

> "Se Luca si diploma allora si iscriverà all'università. Luca si è diplomato, dunque si iscriverà all'università."

Questo è un ragionamento corretto e si riconosce la rigorosa applicazione della tautologia del Teorema 2.39-(ii). Questo schema di ragionamento prende il nome di *modus ponens*: se vale un'implicazione e vale la sua premessa si può dedurre la validità della conclusione.

Esempio 2.42 (modus tollens)**.** Consideriamo il ragionamento

> "Se ho sete bevo. Non sto bevendo, dunque non avevo sete."

La validità di questo ragionamento si fonda sulla tautologia del Teorema 2.39-(iii). Questo schema di ragionamento prende il nome di *modus tollens*: se un'implicazione è valida e non vale la conclusione allora non può valere la premessa.

Esempio 2.43 (sillogismo ipotetico)**.** Consideriamo il seguente ragionamento:

> Se non sento la sveglia al mattino mi sveglio tardi. Se mi sveglio tardi arrivo in ritardo a scuola. Dunque se non sento la sveglia arriverò tardi a scuola.

La correttezza di questo ragionamento si ha grazie al Teorema 2.39-(iv). Lo schema di ragionamento che abbiamo applicato si chiama *sillogismo ipotetico*.

Esempio 2.44. Consideriamo adesso il ragionamento

> "Se un quadrilatero è un quadrato allora ha i lati congruenti. Questo quadrilatero ha i lati congruenti, dunque è un quadrato."

Il ragionamento non è corretto, infatti il quadrilatero in esame potrebbe essere anche un rombo ma non un quadrato. Siamo davanti ad uno dei più frequenti errori di deduzione: se vale un'implicazione e vale la conclusione allora non deve necessariamente valere anche la premessa.

Chiudiamo con una delle più importanti regole di deduzione, che in matematica fa la sua comparsa svariate volte: la dimostrazione per assurdo. Ricordiamo che con il simbolo $\perp$ indichiamo una contraddizione, ossia una qualsiasi formula che è falsa per ogni valore di verità che si può attribuire alle variabili.

Teorema 2.45. *La seguente formula è una tautologia:*

$$[((p \wedge \overline{q}) \Rightarrow \perp) \wedge p] \Rightarrow q.$$

Dimostrazione. Per mostrare che la formula scritta è una tautologia costruiamone la tavola di verità:

p	q	$p \wedge \overline{q}$	$\perp$	$(p \wedge \overline{q}) \Rightarrow \perp$	$((p \wedge \overline{q}) \Rightarrow \perp) \wedge p$	$[((p \wedge \overline{q}) \Rightarrow \perp) \wedge p] \Rightarrow q$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	V	F	F	F	V
F	V	F	F	V	F	V
F	F	F	F	V	F	V

□

Adesso commentiamo lo schema di ragionamento che soggiace alla precedente tautologia. Per mostrare che vale una proposizione q si procede come segue. Si prende una proposizione p vera e si mostra che se si assumono p e $\overline{q}$ allora segue una contraddizione: la precedente tautologia ci dice che da questo segue la validità di q. Ciò che intuitivamente sta dietro a questo schema di ragionamento è questo: dato che p è vera e che assumere, insieme a p, la validità di $\overline{q}$ (ossia che q è falsa) porta ad una contraddizione, allora q deve essere vera.

3 Logica dei predicati

Nella logica proposizionale non si prendono in considerazione enunciati del tipo "n è un numero pari", dove n è un numero naturale. Un enunciato di questo tipo infatti non è una proposizione, perché non si può stabilire se sia vero o falso: il suo valore di verità dipende dal valore che si assegna a n. Ad esempio, se $n = 4$ l'enunciato diventa "4 è un numero pari", ed è una proposizione vera. Se invece $n = 17$ allora l'enunciato diventa "17 è un numero pari", che è di nuovo una proposizione, stavolta falsa. Enunciati di questo tipo si chiamano enunciati aperti.

Definizione 3.1. Un *enunciato aperto* (o *predicato*) è un enunciato che contiene una o più variabili che possono assumere valori da determinati insiemi, e tale che diventa una proposizione per qualsiasi assegnazione di valori alle variabili. L'insieme da cui le variabili possono assumere valori si chiama *dominio* del predicato.

L'enunciato "n è un numero pari" con $n \in \mathbb{N}$ è un predicato perché, quale che sia il numero naturale che si sostituisce al posto di n, l'enunciato diventa una proposizione. In questo caso $\mathbb{N}$ è il dominio del predicato.

Esempio 3.2. Vediamo esempi di enunciati aperti e non.

(i) Gli enunciati "n è un numero primo" con $n \in \mathbb{N}$, "$x > 1$" con $x \in \mathbb{Z}$ e "p è più alto di 150 cm" con p nell'insieme degli studenti del liceo Vallisneri sono tutti esempi di enunciati aperti.

(ii) L'enunciato "p è simpatico" con p nell'insieme degli studenti del liceo Vallisneri non è un enunciato aperto, perché se si sostituisce al posto di p un qualche studente non si ottiene una proposizione.

Indicheremo un predicato con lettere maiuscole, ad esempio P, Q e R, e, fra parentesi tonde, si denota la dipendenza dalle variabili. Dunque $P(x)$ indicherà un predicato di nome P che dipende dalla variabile x, mentre $Q(n, m)$ indicherà un predicato Q che dipende dalle variabili n e m. Inoltre, se $P(x)$ è un enunciato aperto con dominio X, per indicare l'enunciato ottenuto sostituendo un certo valore $a \in X$ al posto di x si scrive $P(a)$. Per definizione di predicato, ogni volta che sostituiamo un valore del dominio alle variabili si ottiene una proposizione.

Esempio 3.3. Ad esempio si può scrivere

$$P(n) \ : \text{“}n \text{ è un numero dispari”},$$

con $n \in \mathbb{N}$, e $\mathbb{N}$ è il dominio di P. Si ha dunque che $P(2)$ è l'enunciato "2 è un numero dispari", che è falso, mentre $P(19)$ è l'enunciato "19 è un numero dispari", che è vero.

3.1 Quantificatori

Dato un enunciato aperto, sostituire alle sue variabili dei valori del dominio non è l'unico modo di trasformarlo in una proposizione.

Esempio 3.4. Consideriamo "n è un numero pari e $n \leq 10$", con $n \in \mathbb{N}$, che è un enunciato aperto. Ci sono due modi di costruire una proposizione a partire da questo enunciato.

(i) Consideriamo l'enunciato

$$\text{“Esiste un } n \in \mathbb{N} \text{ tale che } n \text{ è un numero pari e } n \leq 10\text{”.}$$

In questo caso n non è più una variabile, tant'è che l'enunciato è una proposizione e non un enunciato aperto. La proposizione in questione è vera in quanto si riesce a trovare un numero naturale n che sia pari e ≤ 10, per esempio $n = 6$.

(ii) Consideriamo ora

$$\text{“Per ogni } n \in \mathbb{N} \text{ vale che } n \text{ è un numero pari e } n \leq 10\text{”.}$$

Anche in questo caso n non è più una variabile e l'enunciato è diventato una proposizione, chiaramente falsa.

Definizione 3.5. I simboli $\forall$ e $\exists$ sono detti quantificatori, il primo *quantificatore universale* e si legge "per ogni", il secondo *quantificatore esistenziale* e si legge "esiste".

Se $P(x)$ è un enunciato aperto con dominio X si possono costruire dunque due proposizioni, una usando il quantificatore universale e l'altra usando il quantificatore esistenziale.

(i) L'enunciato
$$\forall x \in X \ P(x)$$
significa che per tutti gli elementi a del dominio X la proposizione $P(a)$ è vera.

(ii) L'enunciato
$$\exists x \in X \ : \ P(x)$$
significa invece che si riesce a trovare (almeno) un elemento a del dominio tale che $P(a)$ sia vera.

Esempio 3.6. Vediamo esempi di proposizioni costruite con i quantificatori e motiviamo perché sono vere o false.

(i) Consideriamo la proposizione
$$\forall n \in \mathbb{Z} \ n^2 \geq 0.$$
Questa risulta vera perché preso un qualsiasi numero intero è vero che il suo quadrato è maggiore o uguale a 0.

(ii) Consideriamo adesso
$$\exists n \in \mathbb{Z} \ : \ n > 3.$$
Questa proposizione risulta vera perché basta prendere ad esempio $n = 7$.

(iii) La proposizione
$$\forall n \in \mathbb{Z} \ n^2 > 0$$
è falsa perché non è vero che per tutti gli interi n vale che $n^2 > 0$. Infatti prendendo $n = 0$ si ha $n^2 = 0$, che non è positivo.

(iv) La proposizione
$$\exists n \in \mathbb{N} \ : \ n \cdot 0 = 1$$
è falsa. Infatti preso un qualsiasi numero naturale n si ha $n \cdot 0 = 0$, e dunque non esiste alcun numero naturale n per cui $n \cdot 0 = 1$.

Esempio 3.7. Per esprimere la proprietà commutativa dell'operazione di addizione nell'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ si può scrivere
$$\forall n \in \mathbb{N} \ \forall m \in \mathbb{N} \ n + m = m + n.$$
Infatti la proposizione precedente esprime che comunque si scelgano due numeri naturali n e m si ha che $n+m = m+n$. Attenzione! Dire che la proprietà commutativa si esprime con $n + m = m + n$ è sbagliato: l'assenza dei quantificatori infatti rende la precedente scrittura un enunciato aperto, del quale pertanto non ha senso chiedersi se sia vero o falso.

Esempio 3.8. Come esempio più articolato, consideriamo un predicato che dipende da due variabili. Sia $P(x,y)$: "$x+y=0$" con x e y numeri interi. Quantifichiamo P in tutti i modi possibili, che sono quattro.

(i) Consideriamo
$$\forall x \in \mathbb{Z}\ \forall y \in \mathbb{Z}\ x+y=0.$$
Questa proposizione è falsa, ossia non è vero che per tutti gli x e gli y interi vale che $x+y=0$. Infatti basta prendere $x=1$ e $y=0$ si ha che $x+y=1\neq 0$.

(ii) Consideriamo
$$\exists x \in \mathbb{Z}\ \exists y \in \mathbb{Z}\ :\ x+y=0.$$
Questa proposizione risulta invece vera, in quanto basta prendere $x=1$ e $y=-1$ e abbiamo trovato due interi la cui somma è nulla.

(iii) Adesso consideriamo
$$\forall x \in \mathbb{Z}\ \exists y \in \mathbb{Z}\ :\ x+y=0.$$
Questa proposizione risulta vera. Per dimostrarlo si deve mostrare che, fissato un qualsiasi x intero si riesce a trovare un y intero tale che la somma $x+y$ sia nulla. In effetti, dato un generico x basta prendere $y=-x$ e abbiamo concluso.

(iv) Adesso consideriamo
$$\exists x \in \mathbb{Z}\ :\ \forall y \in \mathbb{Z}\ x+y=0.$$
Questa proposizione afferma che esiste un numero intero x con la proprietà che preso un qualsiasi intero y si abbia $x+y=0$. Tale proposizione è falsa, ossia un tale intero x non può esistere: infatti, se esistesse, dovrebbe accadere che $x+0=0$ e $x+1=0$, ossia dovrebbe accadere che $x=0$ e $x=-1$, assurdo.

Osservazione 3.9. Riprendiamo l'Esempio 3.8-(iii). Si osservi che restringendo il dominio delle variabili ai numeri naturali, ossia considerando la proposizione
$$\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ :\ x+y=0$$
la formula diventa falsa: come controesempio basta prendere $x=1$ e non troviamo alcun y numero naturale tale che $1+y=0$.

Vediamo adesso di capire come si comportano i quantificatori rispetto all'operazione di negazione. Iniziamo con un esempio.

Esempio 3.10. Consideriamo la frase "tutte le automobili sono bianche". La sua negazione è la frase "non tutte le automobili sono bianche", che è come dire che "esiste almeno un'automobile che non è bianca". Si osservi che la frase "tutte le automobili non sono bianche" non è la negazione della frase iniziale.

Ragionando adesso in modo analogo a quanto fatto nell'esempio possiamo concludere i seguenti due fatti.

(i) Si ha che
$$\overline{\forall x \in X \; P(x)} \;\equiv\; \exists x \in X \,:\, \overline{P(x)}.$$
Infatti negare che per ogni $x \in X$ vale la proprietà P significa dire che esiste almeno un $x \in X$ per cui la proprietà non vale.

(ii) Si ha che
$$\overline{\exists x \in X \,:\, P(x)} \;\equiv\; \forall x \in X \; \overline{P(x)}.$$
Infatti negare che esista un $x \in X$ per cui vale la proprietà P significa dire che per tutti gli $x \in X$ la proprietà non vale.