Indice

Capitolo 1

Moto circolare

1.1 Vettore posizione

Definizione 1.1. Un punto materiale si muove di *moto circolare* se la traiettoria descritta è una circonferenza. Il moto viene detto *uniforme* quando è costante il modulo della velocità con cui la circonferenza viene percorsa.

Per studiare il moto circolare di un punto materiale P introduciamo un sistema di riferimento bidimensionale centrato nel centro O della circonferenza e usiamo il semiasse positivo delle ascisse come origine per gli angoli (vedi Figura 1.1). La posizione di un punto sulla circonferenza è individuata dall'angolo $\theta(t)$ tra il semiasse positivo delle ascisse e il vettore posizione $\mathbf{r}(t) = \mathbf{OP}(t)$. Tale angolo è detto *posizione angolare* del punto P. Il vettore posizione del punto sarà dunque

$$\mathbf{r}(t) = R\cos\theta(t)\mathbf{i} + R\sin\theta(t)\mathbf{j}.$$

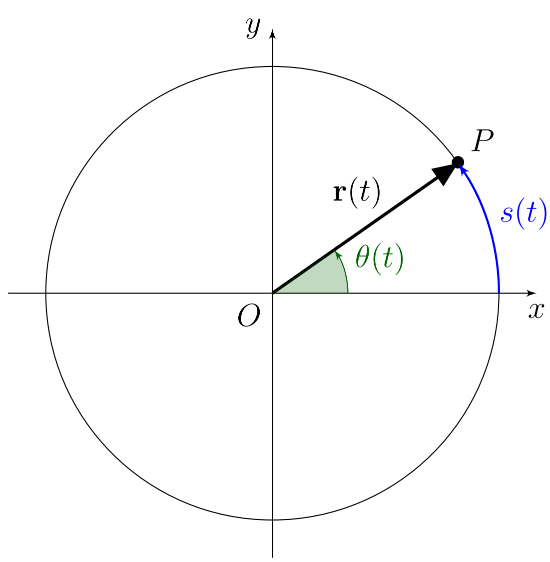

Figura 1.1. Moto circolare: sistema di riferimento, vettore posizione $\mathbf{r}(t)$, posizione angolare $\theta(t)$ e lunghezza d'arco $s(t)$.

1.2 Velocità e velocità angolare

Definizione 1.2. La *velocità angolare media* fra gli istanti di tempo t_1 e t_2 è definita da

$$\omega_m := \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta(t_2) - \theta(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

La *velocità angolare istantanea* all'istante t è il limite della velocità angolare media fra t e $t + \Delta t$ quando Δt tende a 0, ossia

$$\omega(t) := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\theta(t + \Delta t) - \theta(t)}{\Delta t}.$$

Dalla definizione segue che l'unità di misura della velocità angolare è rad/s.

Si osservi che $\omega(t)$ ha segno positivo se la posizione angolare aumenta, ossia se la traettoria viene percorsa in senso antiorario, mentre ha segno negativo se la posizione angolare diminuisce, ossia se la traiettoria viene percorsa in senso orario.

1.2.1 Relazione tra velocità e velocità angolare

Deduciamo adesso la relazione che esiste tra la velocità e la velocità angolare di un punto in moto circolare. Sia $s(t)$ la *lunghezza d'arco* percorsa dal punto fino al tempo t (vedi Figura 1.1) e sia $v(t)$ la *velocità scalare* con cui la circonferenza viene percorsa, positiva se in senso antiorario e negativa se in senso orario.

Teorema 1.3. *In ogni istante* $v(t) = R\omega(t)$.

Dimostrazione. Ricordando la definizione di angolo in radianti si ha che $s = R\theta$. Dunque

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = R\frac{\theta(t + \Delta t) - \theta(t)}{\Delta t} = R\frac{\Delta\theta}{\Delta t}.$$

Se si passa al limite per $\Delta t \to 0$ e si ricorda la definizione di velocità angolare si ottiene

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = R \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = R\omega(t).$$

□

1.2.2 Il vettore velocità istantanea

Occupiamoci adesso di calcolare il vettore velocità istantanea $\mathbf{v}(t)$. In ogni punto della traiettoria possiamo definire due versori, detti versore tangente e versore normale, mostrati nella Figura 1.2.

Definizione 1.4. Il *versore tangente* è il versore tangente alla circonferenza in P e orientato secondo il verso positivo della lunghezza d'arco s. Il *versore normale* è perpendicolare alla circonferenza in P e diretto verso il centro O.

Si ha

$$\mathbf{T}(t) = -\sin\theta(t)\mathbf{i} + \cos\theta(t)\mathbf{j} \quad \text{e} \quad \mathbf{N}(t) = -\cos\theta(t)\mathbf{i} - \sin\theta(t)\mathbf{j}.$$

Infatti osserviamo quanto segue:

- il vettore $\mathbf{T}(t)$ ha modulo 1, è tangente alla circonferenza in P perché è perpendicolare al vettore positione $\mathbf{r}(t)$ e ha il verso corretto;
- il vettore $\mathbf{N}(t)$ ha modulo 1, è perpendicolare al vettore $\mathbf{T}(t)$, dunque ha direzione radiale, ed è diretto verso il centro della circonferenza.

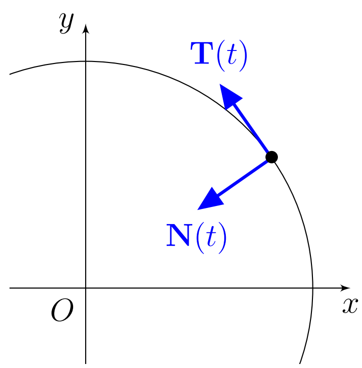

Figura 1.2. Versori tangente e normale alla traiettoria.

Teorema 1.5. *In un moto circolare, il vettore velocità è*

$$\mathbf{v}(t) = v(t)\mathbf{T}(t).$$

Dimostrazione. Sappiamo che il vettore velocità istantanea $\mathbf{v}$ è tangente alla traiettoria, dunque ha la direzione del versore $\mathbf{T}$. Inoltre $v(t)$ è la velocità scalare, dunque $v(t)\mathbf{T}(t)$ ha modulo pari al modulo della velocità e come verso quello dato dal verso di percorrenza della traiettoria. □

Esplicitando il vettore $\mathbf{T}$ e ricordando che $v(t) = R\omega(t)$ dal Teorema 1.3 otteniamo l'espressione del vettore velocità rispetto al riferimento cartesiano:

$$\mathbf{v}(t) = R\omega(t)\mathbf{T}(t) = -R\omega(t)\sin\theta(t)\mathbf{i} + R\omega(t)\cos\theta(t)\mathbf{j}.$$

1.2.3 La velocità angolare come vettore

È utile introdurre la quantità vettoriale $\boldsymbol{\omega}$, che continueremo a chiamare velocità angolare.

Definizione 1.6. La *velocità angolare* è il vettore $\boldsymbol{\omega}$ che ha come modulo $|\omega(t)|$, direzione perpendicolare al piano che contiene la traiettoria e verso tale che rispetto ad un osservatore disposto come $\boldsymbol{\omega}$ il punto ruota in verso antiorario.

Da questa definizione segue la seguente relazione fondamentale fra velocità e velocità angolare:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}.$$

Infatti $\boldsymbol{\omega}$ risulta perpendicolare al piano che contiene $\mathbf{r}$ e $\mathbf{v}$, ha il verso corretto grazie alla regola della mano destra e inoltre $\|\mathbf{v}\| = \|\boldsymbol{\omega}\| \, \|\mathbf{r}\| \sin \frac{\pi}{2} = |\omega| R$, che è compatibile con il Teorema 1.3. La Figura 1.3 mostra come è disposto il vettore $\boldsymbol{\omega}$ rispetto ai vettori $\mathbf{r}$ e $\mathbf{v}$, nel caso in cui il punto ruota in senso antiorario e orario.

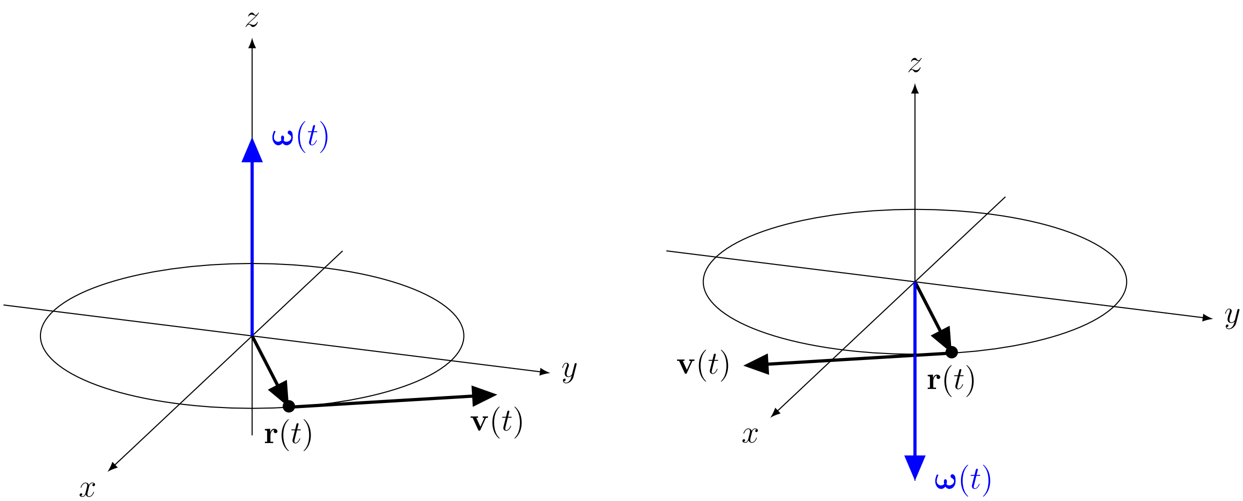

Figura 1.3. Rappresentazione del vettore velocità angolare rispetto ai vettori $\mathbf{r}$ e $\mathbf{v}$, se il punto ruota in senso antiorario (figura di sinistra) o in senso orario (figura di destra), se visto dall'alto.

1.3 Accelerazione e accelerazione angolare

Definizione 1.7. L'*accelerazione angolare media* fra gli istanti di tempo t_1 e t_2 è definita da

$$\alpha_m \coloneqq \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega(t_2) - \omega(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

L'*accelerazione angolare istantanea* all'istante t è il limite dell'accelerazione angolare media fra t e $t + \Delta t$ quando Δt tende a 0, ossia

$$\alpha(t) \coloneqq \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\omega(t + \Delta t) - \omega(t)}{\Delta t}.$$

Dalla definizione segue che l'unità di misura dell'accelerazione angolare è $\mathrm{rad/s^2}$.

Si osservi che $\alpha(t)$ ha segno positivo se la velocità angolare aumenta, mentre ha segno negativo se la velocità angolare diminuisce.

1.3.1 Il vettore accelerazione istantanea

Calcoliamo adesso il vettore accelerazione istantanea $\mathbf{a}(t)$. Per fare questo premettiamo un lemma.

Lemma 1.8. *La variazione istantanea del versore* $\mathbf{T}(t)$ *è* $\omega(t)\mathbf{N}(t)$.

Dimostrazione. Calcoliamo la variazione media del vettore $\mathbf{T}$:

$$\frac{\mathbf{T}(t+\Delta t)-\mathbf{T}(t)}{\Delta t} = \frac{-\sin\theta(t+\Delta t)\mathbf{i}+\cos\theta(t+\Delta t)\mathbf{j}+\sin\theta(t)\mathbf{i}-\cos\theta(t)\mathbf{j}}{\Delta t} =$$
$$= -\frac{\sin\theta(t+\Delta t)-\sin\theta(t)}{\Delta t}\mathbf{i}+\frac{\cos\theta(t+\Delta t)-\cos\theta(t)}{\Delta t}\mathbf{j}.$$

Per la componente lungo $\mathbf{i}$ abbiamo

$$-\frac{\sin\theta(t+\Delta t)-\sin\theta(t)}{\Delta t} = -\frac{2}{\Delta t}\cos\frac{\theta(t+\Delta t)+\theta(t)}{2}\sin\frac{\theta(t+\Delta t)-\theta(t)}{2} =$$
$$= -\frac{\theta(t+\Delta t)-\theta(t)}{\Delta t}\cos\frac{\theta(t+\Delta t)+\theta(t)}{2}\frac{\sin\frac{\theta(t+\Delta t)-\theta(t)}{2}}{\frac{\theta(t+\Delta t)-\theta(t)}{2}},$$

dove nella prima uguaglianza abbiamo usato le formule di prostaferesi. Adesso possiamo passare al limite per $\Delta t \to 0$, ricordando il limite notevole del Teorema A.3, e ottenere $-\omega(t)\cos\theta(t)$. Ragionando in maniera analoga sulla componente lungo $\mathbf{j}$ si ottiene $-\omega(t)\sin\theta(t)$. Dunque la variazione istantanea del versore $\mathbf{T}$ è

$$-\omega(t)\cos\theta(t)\mathbf{i}-\omega(t)\sin\theta(t)\mathbf{j}=\omega(t)\mathbf{N}(t),$$

come volevamo provare. □

Teorema 1.9. *In un moto circolare, il vettore accelerazione è*

$$\mathbf{a}(t)=R\alpha(t)\mathbf{T}(t)+R\omega^2(t)\mathbf{N}(t).$$

Dimostrazione. Iniziamo dall'accelerazione media:

$$\frac{\mathbf{v}(t+\Delta t)-\mathbf{v}(t)}{\Delta t} \overset{(*)}{=} \frac{v(t+\Delta t)\mathbf{T}(t+\Delta t)-v(t)\mathbf{T}(t)}{\Delta t} =$$
$$\overset{(**)}{=} \frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}\mathbf{T}(t+\Delta t)+v(t)\frac{\mathbf{T}(t+\Delta t)-\mathbf{T}(t)}{\Delta t} =$$
$$\overset{(***)}{=} R\frac{\omega(t+\Delta t)-\omega(t)}{\Delta t}\mathbf{T}(t+\Delta t)+R\omega(t)\frac{\mathbf{T}(t+\Delta t)-\mathbf{T}(t)}{\Delta t},$$

dove in $(*)$ abbiamo usato il Teorema 1.5, in $(**)$ abbiamo aggiunto e tolto a numeratore la quantità $v(t)\mathbf{T}(t+\Delta t)$ e spezzato la frazione, e infine in $(***)$ abbiamo utilizzato la relazione tra v e ω (Teorema 1.3). Passando al limite per $\Delta t \to 0$, ricordando la definizione di accelerazione angolare α e il Lemma 1.8 si conclude. □

Nel moto circolare, quindi, l'accelerazione ha una componente tangente e una normale alla traiettoria. La prima viene detta *accelerazione tangenziale*

$$a_t \coloneqq R\alpha$$

ed è dovuta al fatto che il modulo della velocità cambia lungo la traiettoria. Si osservi che a_t ha lo stesso segno di α, per cui a_t è positiva se la velocità angolare del punto aumenta, mentre è negativa se la velocità angolare diminuisce. La componente dell'accelerazione normale alla traiettoria viene detta *accelerazione centripeta*

$$a_c \coloneqq R\omega^2 = \frac{v^2}{R},$$

e causa la variazione di direzione del vettore velocità. Si osservi che il segno di a_c è sempre positivo, per cui la componente normale è sempre diretta verso il centro della circonferenza, proprietà da cui deriva il suo nome.

1.4 Il moto circolare uniforme

Un moto circolare viene detto uniforme se la circonferenza è percorsa con velocità scalare costante. Per cui il punto impiegherà sempre lo stesso tempo a compiere un giro.

Definizione 1.10. Il *periodo* di un moto circolare uniforme è il tempo T impiegato dal punto a percorrere un giro completo. Si definisce *frequenza* f il reciproco del periodo

$$f \coloneqq \frac{1}{T},$$

ossia il numero di giri percorsi nell'unità di tempo.

Dato che il periodo si misura in secondi, l'unità di misura della frequenza è 1/s, che prende il nome di *hertz* e si indica con Hz.

1.4.1 Velocità e velocità angolare

Supponiamo per semplicità che il punto percorra la circonferenza in verso antiorario, così la sua velocità scalare e la sua velocità angolare sono positive e coincidono con il modulo dei corrispondenti vettori. Dato che il modulo della velocità è costante, per calcolarlo possiamo considerare un intero giro, da cui

$$v = \frac{2\pi R}{T} = 2\pi R f,$$

in quanto il punto percorre l'intera circonferenza in un tempo pari al periodo. Dato che v è costante, dal Teorema 1.3 segue che la velocità angolare è costante e si ha

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{2\pi}{T}.$$

Infatti il punto percorre un angolo giro, ossia 2π radianti, in un tempo pari al periodo.

Nel caso del moto circolare uniforme, dunque, la posizione angolare varia con velocità costante ω. Supponendo che al tempo $t = 0$ il punto abbia posizione angolare $\theta(0)$ avremo dunque che

$$\theta(t) = \theta(0) + \omega t.$$

1.4.2 Accelerazione e accelerazione angolare

Dato che in un moto circolare uniforme ω è costante avremo che l'accelerazione angolare α è nulla, da cui, grazie al calcolo dell'accelerazione istantanea visto nel Teorema 1.9, anche l'accelerazione tangenziale a_t è nulla. Infatti il modulo della velocità lungo la traiettoria non cambia. Invece l'accelerazione centripeta è costante e pari a

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R.$$

Quindi, nel moto circolare uniforme, il vettore accelerazione è diretto verso il centro della circonferenza:

$$\mathbf{a}(t) = a_c \mathbf{N}(t).$$

1.5 Moto circolare uniformemente accelerato

In analogia al moto rettilineo uniformemente accelerato, in cui l'accelerazione è costante, possiamo considerare il moto circolare *uniformemente accelerato*. In questo tipo di moto l'accelerazione angolare α è costante e dunque la velocità angolare varia nel tempo come

$$\omega(t) = \omega(0) + \alpha t,$$

poiché $alphat$ è di quanto varia la velocità angolare rispetto al suo valore $\omega(0)$ che ha a $t = 0$. Di conseguenza, per la posizione angolare si ha

$$\theta(t) = \theta(0) + \omega(0)t + \frac{1}{2}\alpha t^2.$$

Nel moto circolare uniformemente accelerato l'accelerazione tangenziale è

$$a_t = R\alpha,$$

dunque è costante, ed è ciò che provoca la variazione costante nel tempo della velocità angolare. L'accelerazione centripeta è invece $a_c(t) = R\omega(t)^2$ e dipende dal tempo perché ω varia nel tempo. Dunque

$$\mathbf{a}(t) = R\alpha \mathbf{T}(t) + R\omega^2(t)\mathbf{N}(t).$$

Appendice A

Complementi di goniometria

A.1 Formule di addizione e sottrazione di seno e coseno

Le formule di addizione (rispettivamente sottrazione) permettono di esprimere il seno e il coseno della somma (rispettivamente differenza) di due angoli in funzione del seno e del coseno dei singoli angoli.

Teorema A.1. *Valgono le seguenti relazioni:*

(i) $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$;

(ii) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$;

(iii) $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$;

(iv) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$.

Dimostrazione. (i) Consideriamo i punti di coordinate

$$P = (\cos\alpha, \sin\alpha), \quad Q = (\cos\beta, \sin\beta), \quad R = (\cos(\alpha-\beta), \sin(\alpha-\beta))$$

come mostrato in Figura A.1 nel caso $\alpha > \beta$. Sia inoltre $A = (1, 0)$. Dato che sono individuate da angoli al centro congruenti, le corde AR e PQ sono congruenti, per cui hanno la stessa lunghezza. Si ha

$$\begin{aligned}\overline{AR}^2 &= (1-\cos(\alpha-\beta))^2 + \sin^2(\alpha-\beta) = \\ &= 1 + \cos^2(\alpha-\beta) - 2\cos(\alpha-\beta) + \sin^2(\alpha-\beta) = 2 - 2\cos(\alpha-\beta)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\overline{PQ}^2 &= (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = \\ &= \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta = \\ &= 2 - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta.\end{aligned}$$

Eguagliando le due espressioni appena ricavate si ottiene la formula di sottrazione del coseno.

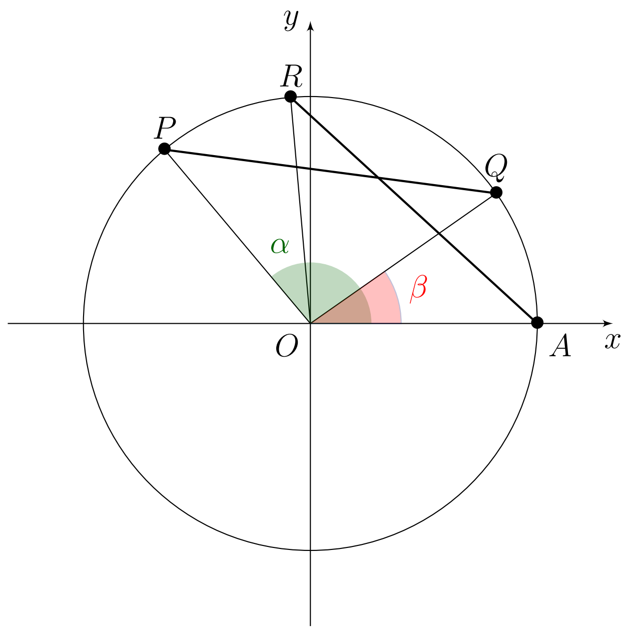

Figura A.1. Costruzione geometrica impiegata nella dimostrazione della formula di sottrazione del coseno.

(ii) Prendendo la formula di sottrazione del coseno (i) e sostituendo l'angolo β con $-\beta$ si ottiene

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta) = \\ &= \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,\end{aligned}$$

dove abbiamo usato che $\sin(-\beta) = -\sin\beta$ e $\cos(-\beta) = \cos\beta$.

(iii) Usiamo la proprietà per cui il seno di un angolo coincide con il coseno dell'angolo complementare:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\beta\right) \overset{\text{(ii)}}{=} \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta = \\ &= \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,\end{aligned}$$

come volevamo provare.

(iv) La dimostrazione è del tutto analoga al punto (ii). □

A.2 Formule di prostaferesi

Le formule di prostaferesi (termine che ha origine dalle parole greche che significano "aggiungere" e "togliere") esprimono la somma e la differenza di seni o coseni nel prodotto di altri seni o coseni.

Teorema A.2. *Valgono le seguenti relazioni:*

(i) $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$;

(ii) $\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$;

(iii) $\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$;

(iv) $\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$.

Dimostrazione. (i) Sommando membro a membro le formule di addizione e sottrazione del coseno (relazioni (i) e (ii) del Teorema A.1) si ottiene

$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta.$$

Chiamando $p = \alpha+\beta$ e $q = \alpha-\beta$ si ottiene $\alpha = \frac{p+q}{2}$ e $\beta = \frac{p-q}{2}$, che sostituite nella precedente relazione concludono la dimostrazione.

La dimostrazione delle relazioni (ii), (iii) e (iv) si ottiene con analoghi passaggi. □

A.3 Un limite notevole

Consideriamo la funzione definita da

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Chiaramente il dominio di questa funzione è $\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$. Possiamo però chiederci quale sia il comportamento della funzione per valori di x che sono sempre più vicini a 0, ma mai uguali a 0, visto che in quelli la funzione è definita. Questo è intuitivamente ciò di cui si occupano i limiti. La Figura A.2 mostra il grafico della funzione: come si vede, le immagini degli x sempre più vicini a 0 sono sempre più vicine ad 1. Questa proprietà è espressa con il linguaggio dei limiti dal seguente teorema, la cui dimostrazione è rimandata al corso di Matematica.

Teorema A.3. *Si ha*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

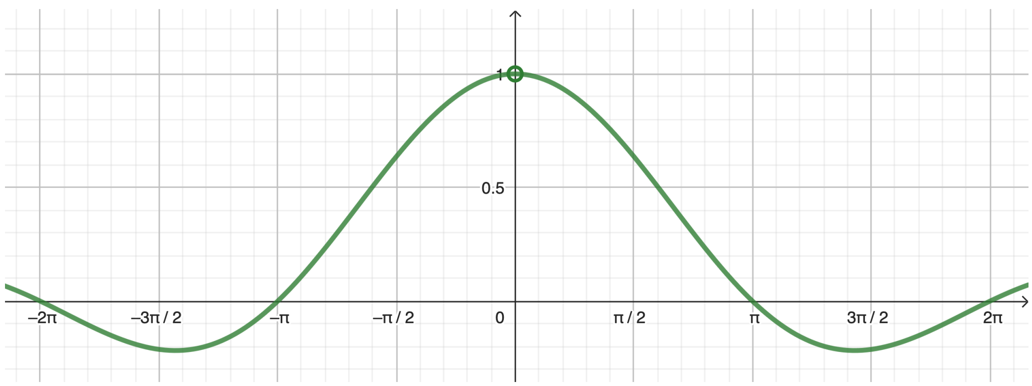

Figura A.2. Grafico della funzione $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.