

Liceo Scientifico “A. Vallisneri”
Programma svolto di Matematica
Classe 3B, Liceo Scientifico - A.S. 2023-2024

Prof. Alessio Del Vigna

Equazioni e disequazioni irrazionali e con valore assoluto

- (i) Definizione di valore assoluto e proprietà del valore assoluto (con dimostrazione).
- (ii) Equazioni e disequazioni con valore assoluto: equazioni e disequazioni con un solo valore assoluto, con più valori assoluti, anche fratte.
- (iii) Scomposizione del binomio $a^n - b^n$ con $n \geq 1$ (con dimostrazione). Teorema di equivalenza per equazioni e disequazioni quando si elevano entrambi i membri ad una stessa potenza, nel caso pari e nel caso dispari (con dimostrazione).
- (iv) Equazioni e disequazioni irrazionali: equazioni e disequazioni con un solo radicale, con più radicali, anche fratte.

Funzioni e successioni

- (i) Definizione di funzione, di immagine di un elemento, di immagine di una funzione e di grafico di una funzione.
- (ii) Determinazione del dominio naturale e dell'immagine di funzioni reali di variabile reale, sia algebricamente che graficamente.
- (iii) Algebra delle funzioni: funzione somma, funzione prodotto, funzione quoziente, funzione composta.
- (iv) Funzioni surgettive, iniettive e loro proprietà (con dimostrazione). Funzione identità su un insieme. Funzioni invertibili: definizione, equivalenza tra invertibilità e bigettività. Restrizioni invertibili di funzioni non globalmente invertibili.
- (v) Definizione di successione. Progressioni aritmetiche e geometriche: definizione, termine generale (con dimostrazione), somma dei primi n termini (con dimostrazione). Monotonia e limitatezza di una successione. Successioni definite per ricorrenza.

Induzione

- (i) Definizione assiomatica di \mathbb{N} mediante gli assiomi di Peano. Cenni al fatto che tali assiomi definiscono \mathbb{N} in modo unico a meno di isomorfismo.
- (ii) Principio di induzione e suo impiego per dimostrare proprietà su \mathbb{N} . Esempi su somme, prodotti, divisibilità e disuguaglianze.
- (iii) Dimostrazione della limitatezza o della monotonia di successioni mediante l'induzione.

Trasformazioni del piano

- (i) Definizione di trasformazione del piano e conseguenze delle bigettività.
- (ii) Traslazioni, simmetrie centrali, simmetrie assiali, dilatazioni e rotazioni: definizione sintetica e deduzione delle loro equazioni (con dimostrazione). Dilatazioni e rotazioni di centro diverso dall'origine. Isometrie e trasformazioni che preservano l'orientazione.
- (iii) Trasformazione del grafico di una funzione mediante una trasformazione.
- (iv) Funzioni la cui espressione contiene valori assoluti: dal grafico di $y = f(x)$ al grafico di $y = |f(x)|$ e $y = f(|x|)$.

Coniche

- (i) Coniche come insieme di curve che si possono ottenere dalla sezione di un doppio cono illimitato con un piano (solo cenni).
- (ii) La parabola: definizione come luogo geometrico (ripasso); ogni parabola con asse verticale ha equazione cartesiana della forma $y = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$, e viceversa (ripasso); ascissa del vertice (ripasso); coordinate del fuoco e equazione della direttrice in funzione di a , b e c (ripasso); legame tra il segno di a e la convessità della parabola (ripasso); coefficiente angolare della retta tangente ad una parabola con asse verticale in un suo punto (con dimostrazione); posizione reciproca tra una parabola e una retta, con il caso particolare della retta tangente; parabole con asse orizzontale.
- (iii) La circonferenza: definizione come luogo geometrico (ripasso); ogni circonferenza ha equazione cartesiana della forma $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ con $a^2 + b^2 - 4c \geq 0$ e viceversa (con dimostrazione); posizione reciproca tra una circonferenza e una retta, con il caso particolare della retta tangente.
- (iv) L'ellisse: definizione come luogo geometrico; proprietà di simmetria (con dimostrazione); definizione di semiasse maggiore (a), semiasse minore (b), semidistanza focale (c) e loro relazione (con dimostrazione); equazione cartesiana di un'ellisse con centro nell'origine; equazione cartesiana di un'ellisse traslata e suo riconoscimento mediante il completamento del quadrato; posizione reciproca tra un'ellisse e una retta; calcolo dell'area di un'ellisse.

- (v) L'iperbole: definizione come luogo geometrico; proprietà di simmetria (con dimostrazione); non esistenza di punti di un'iperbole interni alla striscia delimitata dalle rette perpendicolari all'asse trasverso e che passano dai vertici (con dimostrazione); definizione di semiasse trasverso (a), semiasse non trasverso (b), semidistanza focale (c) e loro relazione (con dimostrazione); equazione cartesiana di un'iperbole con centro nell'origine; equazione cartesiana di un'iperbole traslata e suo riconoscimento mediante il completamento del quadrato; posizione reciproca tra un'iperbole e una retta. L'iperbole equilatera: un'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti ha equazione della forma $xy = k$ o $xy = -k$, con $k > 0$ (con dimostrazione, per rotazione di $\pi/4$ di un'iperbole equilatera con assi sugli assi cartesiani); coordinate dei vertici e dei fuochi.
- (vi) La famiglia delle funzioni della forma $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, con c e d non entrambi nulli: tipi di curve appartenenti alla famiglia; caso delle iperboli equilateri ($c \neq 0 \wedge ad - bc \neq 0$), con determinazione del centro, degli asintoti, dei vertici e disegno del grafico cartesiano.
- (vii) Applicazioni delle coniche: grafici di alcune funzioni irrazionali; problemi di geometria, con particolare riferimento ai problemi di massimo e di minimo; discussione grafica di particolari famiglie di equazioni irrazionali.

Complementi sui numeri reali

- (i) Ripasso della costruzione di \mathbb{Q} come insieme quoziente dell'insieme delle frazioni rispetto alla relazione di equivalenza fra frazioni.
- (ii) Costruzione formale dell'insieme \mathbb{R} : definizione di taglio di Dedekind e definizione di \mathbb{R} come l'insieme dei tagli di Dedekind; esempi di tagli in corrispondenza con un numero razionale e con un numero non razionale.
- (iii) Potenze ad esponente intero e razionale (ripasso). Potenze ad esponente reale definite mediante i tagli di Dedekind, con l'esempio esplicito di $3^{\sqrt{2}}$.