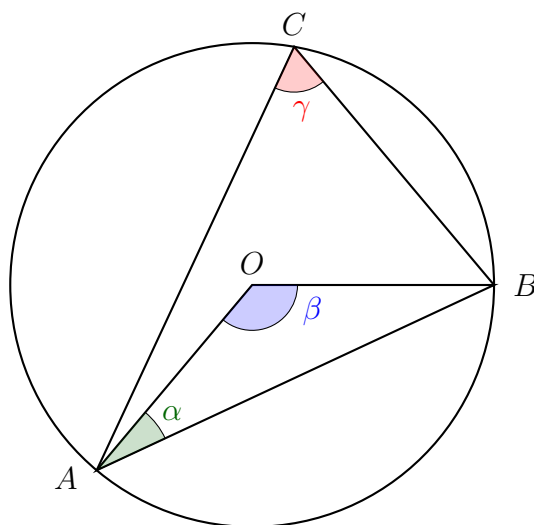


Liceo Scientifico "A. Vallisneri"
 Prova scritta di matematica

Esercizio 1 (15 punti).

- (a) Semplificare l'espressione $\frac{\sin^2\left(\frac{3}{4}\pi\right) + \cos^2\left(-\frac{5}{4}\pi\right) - 3\sin(4\pi)}{\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) - 2\cos(5\pi) - \sin^2\left(\frac{5}{3}\pi\right)}$.
- (b) Calcolare $\cos\left(\frac{1}{2}\arctan(2\sqrt{6})\right)$.
- (c) Scrivere a che cosa è uguale $\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)$ per definizione. Verificare poi che $\arccos\left(-\frac{3}{5}\right) = 2\arctan 2$.

Esercizio 2 (20 punti). Si consideri la figura seguente, per la quale è noto che O è il centro della circonferenza e che $\alpha = \arcsin\frac{1}{3}$.



- (a) Determinare seno, coseno e tangente dell'angolo β , specificando se β è acuto o ottuso.
- (b) Determinare seno, coseno e tangente dell'angolo γ .
- (c) Gli angoli α e γ hanno seno e coseno scambiati. Spiegare come mai, dopo aver determinato la relazione che sussiste fra questi due angoli.
- (d) Considerando il diametro di estremo A , dimostrare che $\overline{AB} = 2r \sin \gamma$, dove r è il raggio della circonferenza.

Esercizio 3 (15 punti). Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = 3 \sin(2x) - \cos(2x) - 1.$$

- (a) Scrivere l'espressione di f in modo che contenga solo la funzione seno.
- (b) Scrivere quali sono le trasformazioni da applicare alla funzione seno per ottenere la funzione f .
- (c) Determinare il periodo e l'immagine di f .

Esercizio 4 (15 punti). Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = 3 \sin(3x).$$

- (a) Tracciare il grafico della funzione f , avendo cura di indicare i punti di intersezione con l'asse delle ascisse in almeno un periodo e i valori di massimo e di minimo.

Si consideri ora l'equazione $3 \sin(3x) - 2x = 0$.

- (b) Interpretando graficamente l'equazione assegnata, dimostrare che ha tre soluzioni, giustificando esaurientemente la risposta.
- (c) Una delle tre soluzioni è nota: quale? Che proprietà hanno le altre due?

Esercizio 5 (5 punti). Si consideri la funzione $f : [\pi, 2\pi] \rightarrow [-1, 1]$ data da $f(x) = \cos x$. Dimostrare che tale funzione è invertibile e scrivere l'espressione della funzione inversa.

Esercizio 6 (10 punti). L'obiettivo di questo esercizio è arrivare a dimostrare che $\sin(10^\circ)$ è un numero irrazionale.

- (a) Partendo dal fatto che $3\alpha = \alpha + 2\alpha$, dimostrare la formula di triplicazione del seno, ossia verificare che

$$\sin(3\alpha) = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha.$$

- (b) Sostituire $\alpha = 10^\circ$ nella precedente uguaglianza e dedurre che $\sin(10^\circ)$ deve essere una delle radici del polinomio

$$p(x) = 8x^3 - 6x + 1.$$

- (c) Dimostrare che p non ha radici razionali.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6

Voto: _____