

## Test di matematica

Nome e cognome: \_\_\_\_\_

### [20 pt] Domande a scelta multipla (con giustificazione)

**Assegnazione del punteggio.** Se la risposta è corretta vengono assegnati 2.5 pt; in caso di risposta errata vengono sottratti 0.5 pt; in caso di risposta non data vengono attribuiti 0 pt. Per la giustificazione corretta della risposta vengono attribuiti 2.5 pt.

Sia  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione tale che  $f(-1) > 0$  e  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -3$ .

**MC1.** Per quanto riguarda l'esistenza di uno zero di  $f$  nell'intervallo  $(-1, 1)$ :

- ☐ è necessario che  $f$  sia continua
- ☐ sicuramente esiste
- ☐ è sufficiente che  $f$  sia continua
- ☐ sicuramente non esiste

**MC2.** Scegliere l'affermazione corretta:

- ☐  $f(1) = -3$
- ☐  $f$  ammette massimo e minimo globale su  $[-1, 1]$
- ☐  $f$  non ammette né massimo né minimo globali su  $[-1, 1]$
- ☐  $f(1) = -3$  se  $f$  è continua nel suo dominio

Si consideri la funzione  $g$  definita da

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x - e} & \text{se } x > 0 \\ \frac{\sin x}{x - 1} & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

**MC3.** Qual è il dominio di  $g$ ?

- ☐  $\mathbb{R} \setminus \{1, 0, e\}$
- ☐  $\mathbb{R} \setminus \{0, e\}$
- ☐  $\mathbb{R} \setminus \{1, e\}$
- ☐  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

**MC4.** Scegliere l'affermazione corretta:

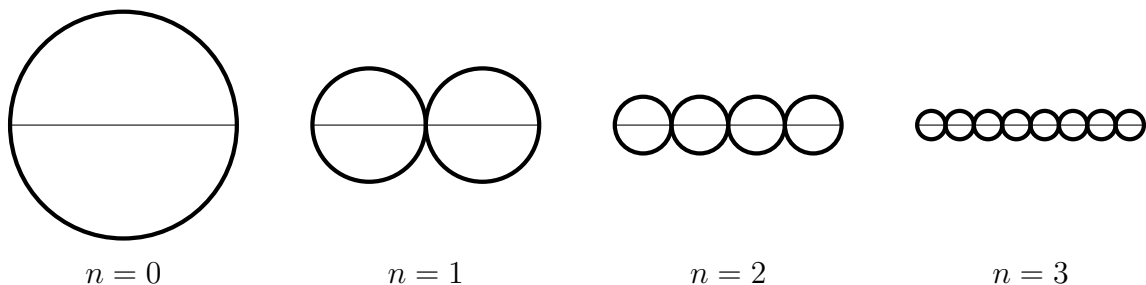
- ☐  $g$  non è continua in  $x = 0$
- ☐  $g$  ha una discontinuità di seconda specie in  $x = e$
- ☐  $g$  ha una singolarità di seconda specie in  $x = 0$
- ☐  $g$  è prolungabile con continuità in  $x = 0$

## Quesiti

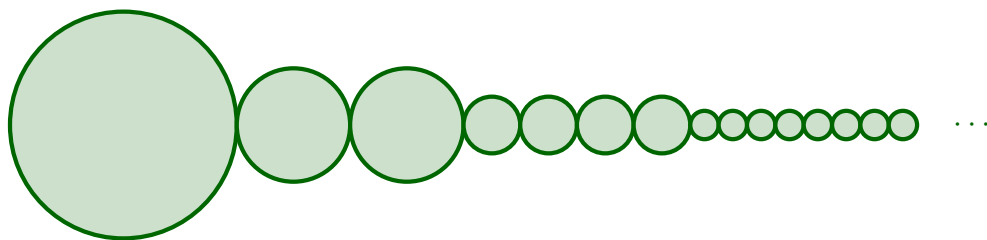
**[20 pt] Q1.** Dare l'enunciato e una dimostrazione dei seguenti teoremi:

- teorema di esistenza degli zeri;
- teorema della permanenza del segno, nel caso di limite uguale a  $+\infty$ .

**[5 pt] Q2.** Si consideri un segmento di lato 1 su cui, al passo  $n = 0$ , viene costruita una circonferenza che ha tale segmento per diametro. Al passo successivo, il diametro viene diviso in due segmenti congruenti e su ciascuno di essi viene costruita una circonferenza. La costruzione viene ripetuta su ogni diametro presente al passo precedente. Siano  $c_n$  il numero di circonferenze presenti al passo  $n$  e  $r_n$  il raggio di ciascuna circonferenza presente al passo  $n$ .



- (a) Determinare le espressioni esplicite delle successioni  $(c_n)_{n \geq 0}$  e  $(r_n)_{n \geq 0}$ .
- (b) Si dispongono una di seguito all'altra tutte le infinite figure, come mostrato sotto. Calcolare l'area complessiva della figura così ottenuta.



MC	Q1	Q2

Voto: \_\_\_\_\_

## Test di matematica

Nome e cognome: \_\_\_\_\_

### [20 pt] Domande a scelta multipla (con giustificazione)

**Assegnazione del punteggio.** Se la risposta è corretta vengono assegnati 2.5 pt; in caso di risposta errata vengono sottratti 0.5 pt; in caso di risposta non data vengono attribuiti 0 pt. Per la giustificazione corretta della risposta vengono attribuiti 2.5 pt.

Sia  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione tale che  $f(1) < 0$  e  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 3$ .

**MC1.** Scegliere l'affermazione corretta:

- ☐  $f$  non ammette né massimo né minimo globali su  $[-1, 1]$
- ☐  $f(-1) = 3$  se  $f$  è continua nel suo dominio
- ☐  $f$  ammette massimo e minimo globale su  $[-1, 1]$
- ☐  $f(-1) = 3$

**MC2.** Per quanto riguarda l'esistenza di uno zero di  $f$  nell'intervallo  $(-1, 1)$ :

- ☐ sicuramente esiste
- ☐ è sufficiente che  $f$  sia continua
- ☐ sicuramente non esiste
- ☐ è necessario che  $f$  sia continua

Si consideri la funzione  $g$  definita da

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x-2} & \text{se } x > 0 \\ \frac{\sin x}{x-\pi} & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

**MC3.** Qual è il dominio di  $g$ ?

- ☐  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
- ☐  $\mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$
- ☐  $\mathbb{R} \setminus \{\pi, 2\}$
- ☐  $\mathbb{R} \setminus \{\pi, 0, 2\}$

**MC4.** Scegliere l'affermazione corretta:

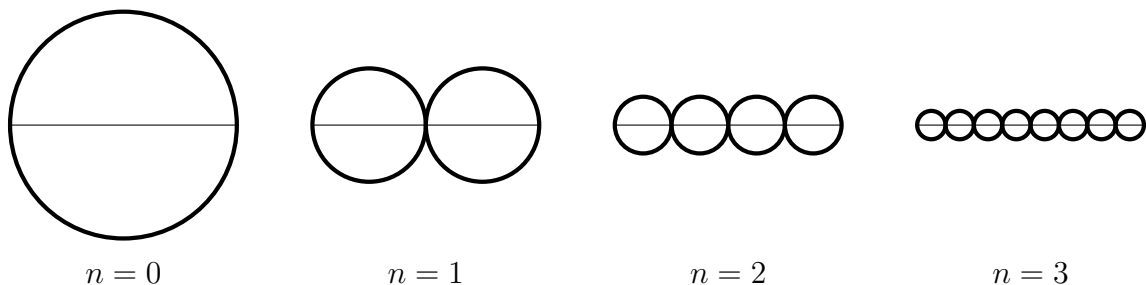
- ☐  $g$  ha una discontinuità di seconda specie in  $x = 2$
- ☐  $g$  non è continua in  $x = 0$
- ☐  $g$  ha una singolarità di seconda specie in  $x = 0$
- ☐  $g$  è prolungabile con continuità in  $x = 0$

## Quesiti

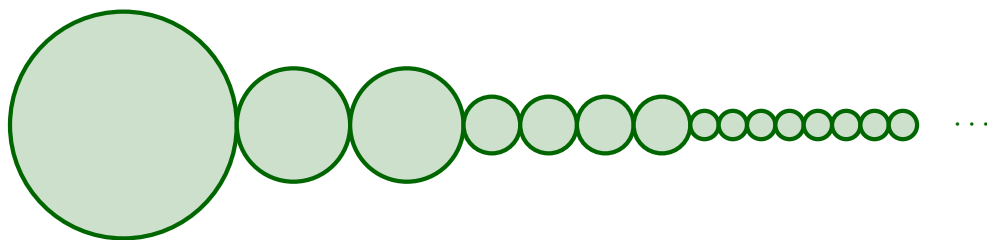
**[20 pt] Q1.** Dare l'enunciato e una dimostrazione dei seguenti teoremi:

- teorema di esistenza degli zeri;
- teorema della permanenza del segno, nel caso di limite uguale a  $-\infty$ .

**[5 pt] Q2.** Si consideri un segmento di lato 1 su cui, al passo  $n = 0$ , viene costruita una circonferenza che ha tale segmento per diametro. Al passo successivo, il diametro viene diviso in due segmenti congruenti e su ciascuno di essi viene costruita una circonferenza. La costruzione viene ripetuta su ogni diametro presente al passo precedente. Siano  $c_n$  il numero di circonferenze presenti al passo  $n$  e  $r_n$  il raggio di ciascuna circonferenza presente al passo  $n$ .



- (a) Determinare le espressioni esplicite delle successioni  $(c_n)_{n \geq 0}$  e  $(r_n)_{n \geq 0}$ .
- (b) Si dispongono una di seguito all'altra tutte le infinite figure, come mostrato sotto. Calcolare l'area complessiva della figura così ottenuta.



MC	Q1	Q2

Voto: \_\_\_\_\_