Liceo Scientifico “A. Vallisneri” – Classe 5B

Prova scritta di matematica

Nome e cognome: ____

Istruzioni per la consegna

- Presentare con chiarezza la strategia risolutiva adottata, indicando i teoremi e le proprietà utilizzati e motivando ogni passaggio del ragionamento.
- Utilizzare un linguaggio matematico corretto e coerente, rispettando il formalismo e la simbologia propri della disciplina.
- Esporre il procedimento risolutivo in modo ordinato e preciso.

[40 pt] **Esercizio 1.** Calcolare i seguenti limiti di funzione:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2+5x-14}{x^3-2x^2+3x-6}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{9x^2+4x-1}}{x+4}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+3x+2}\right)$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\ln(x^3+1)}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+5}\right)^x$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x+\ln^3 x+\arctan x}{x^2+e^{2x}}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}4x\sin\frac{1}{x}$

[*Esame di Stato, ordinaria 2009-2010*]

(h) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}$

[15 pt] **Esercizio 2.** Si consideri la circonferenza $\mathscr{C}$ di equazione $x^2+y^2=4$.

(a) Scrivere l’equazione della parabola $\mathscr{P}$ con asse verticale, che passa per il punto di coordinate $(1,1)$ e che è tangente a $\mathscr{C}$ nel punto in cui questa interseca il semiasse positivo delle ordinate.

Si consideri ora la retta r di equazione $y=k$, con $k\in\mathbb{R}$.

(b) Dopo aver stabilito per quali k la retta interseca sia $\mathscr{C}$ sia $\mathscr{P}$, determinare le coordinate dei punti A e B in cui r interseca $\mathscr{C}$ e le coordinate dei punti C e D in cui r interseca $\mathscr{P}$.

(c) Calcolare il limite del rapporto $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ quando r tende alla posizione nella quale risulta tangente sia a $\mathscr{C}$ sia a $\mathscr{P}$.

[5 pt] **Esercizio 3.** Sia $f:A\to\mathbb{R}$ una funzione, con A illimitato superiormente. Supponiamo inoltre che $\lim_{x\to+\infty}f(x)=1$. Dimostrare che, per x sufficientemente grande, la funzione assume valori maggiori di $\frac{1}{2}$.

[5 pt] **Esercizio 4 (M&F).** Consideriamo un corpo di massa m che viene lasciato cadere da fermo da un'altezza molto alta. Supponiamo inoltre che l'attrito viscoso con l'aria non sia trascurabile: in buona approssimazione, la forza di attrito viscoso è $\mathbf{F}_{av} = -\beta \mathbf{v}$, con $\beta > 0$ una costante. Posto $t = 0$ nel momento in cui il corpo viene lasciato, si può dimostrare che la velocità del corpo è data da

$$v(t) = \frac{mg}{\beta}\left(1 - e^{-\frac{\beta}{m}t}\right).$$

Calcolare la *velocità limite*, ossia la velocità del corpo dopo che è trascorso un tempo sufficientemente lungo dall'istante di partenza.

[10 pt] **Esercizio 5.** Si consideri la funzione $f(x) = \sqrt{x}$.

(a) Dimostrare che $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

(b) Dimostrare che $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

(c) Dimostrare che per ogni $x_0 > 0$ si ha $\lim_{x\to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$.

Es. 1	**Es. 2**	**Es. 3**	**Es. 4**	**Es. 5**

Voto: ________