

Prova scritta di matematica

Nome e cognome: _____

Istruzioni per la consegna

- Presentare con chiarezza la strategia risolutiva adottata, indicando i teoremi e le proprietà utilizzati e motivando ogni passaggio del ragionamento.
- Utilizzare un linguaggio matematico corretto e coerente, rispettando il formalismo e la simbologia propri della disciplina.
- Esporre il procedimento risolutivo in modo ordinato e preciso.

[20 pt] Esercizio 1. Si consideri la funzione reale di variabile reale definita da

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}.$$

- (a) Discutere il numero di controimmagini di un generico $y \in \mathbb{R}$, determinare l'immagine di f e dire se f è iniettiva.
- (b) Determinare le restrizioni massimali per cui f è invertibile e, per ciascuna di esse, scrivere la funzione inversa.

[20 pt] Esercizio 2. Si consideri la funzione reale di variabile reale definita da

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - x$$

- (a) Determinare il dominio naturale di f .
- (b) Discutere il numero di controimmagini di un generico $y \in \mathbb{R}$ e dimostrare che la funzione f è iniettiva.
- (c) Scrivere la funzione inversa di f .

[15 pt] Esercizio 3. Si consideri la funzione reale di variabile reale definita da

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^4 - 1}.$$

- (a) Determinare il dominio naturale di f .
- (b) Studiare il segno di f e rappresentarlo sul piano cartesiano.
- (c) Una volta determinati tutti gli elementi necessari, tracciare un grafico di f che sia con essi compatibile.

[15 pt] Esercizio 4. Si consideri la funzione reale di variabile reale definita da

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x} - 2x + 1.$$

- (a) Determinare il dominio naturale di f .
- (b) Studiare il segno di f e rappresentarlo sul piano cartesiano.
- (c) Una volta determinati tutti gli elementi necessari, tracciare un grafico di f che sia con essi compatibile.

[10 pt] Esercizio 5. Rispondere ai seguenti quesiti, giustificando opportunamente le risposte date.

- (a) Le funzioni date da $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}$ sono uguali? Tracciare il grafico di f e di g .
- (b) Sia $d : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, +\infty)$ la funzione che ad ogni punto del piano cartesiano associa la sua distanza dall'origine. Caratterizzare la controimmagine di 1, cioè $f^{-1}(1)$.
- (c) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione invertibile e supponiamo che $f^{-1}(1) = 0$. Se possibile, calcolare $f(0)$, $f(f^{-1}(1))$ e $f^{-1}(f(2))$.
- (d) La *funzione segno* è la funzione sgn definita da

$$\text{sgn}(x) = \frac{|x|}{x}.$$

Determinare il dominio di f e calcolare l'immagine di 1, 257, -4 e -100 . Esplicitare l'espressione della funzione segno in modo che non compaia il valore assoluto, tracciare il suo grafico e determinare la sua immagine.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5

Voto: _____