Liceo Scientifico “A. Vallisneri” – Classe 5B

Prova scritta di matematica

Nome e cognome: ______________________________

Istruzioni per la consegna

- Presentare con chiarezza la strategia risolutiva adottata, indicando i teoremi e le proprietà utilizzati e motivando ogni passaggio del ragionamento.
- Utilizzare un linguaggio matematico corretto e coerente, rispettando il formalismo e la simbologia propri della disciplina.
- Esporre il procedimento risolutivo in modo ordinato e preciso.

[20 pt] **Esercizio 1.** Per ciascuna funzione assegnata f, stabilire in quali punti del dominio f è continua e classificare le eventuali discontinuità e singolarità. Nel caso in cui esista, costruire un prolungamento continuo della funzione.

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^3 - 3x + 2}$

(b) $f(x) = x \ln^2 x$

(c) $f(x) = \cos\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$

(d) $f(x) = \begin{cases} \arctan\left(e^{\frac{1}{x}}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

[10 pt] **Esercizio 2.** Sia a un numero reale e si consideri la famiglia di funzioni definita da

$$f_a(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2)}{ax^2} & \text{se } x < 0 \\ \sqrt{a^2 + x^2} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}.$$

(a) Determinare per quali a la funzione f_a è continua su $\mathbb{R}$.

(b) Determinare gli asintoti della funzione f_a con $a = 1$.

[20 pt] **Esercizio 3.** Si consideri la funzione reale f definita da

$$f(x) = \frac{\ln x - 1}{(x-3)^2}.$$

Studiare la funzione f e tracciarne un grafico compatibile con le informazioni determinate.

[10 pt] **Esercizio 4.** Dimostrare che l’equazione $e^x + \arctan(2x) = 0$ ha almeno una soluzione reale e dire se tale soluzione è anche unica.

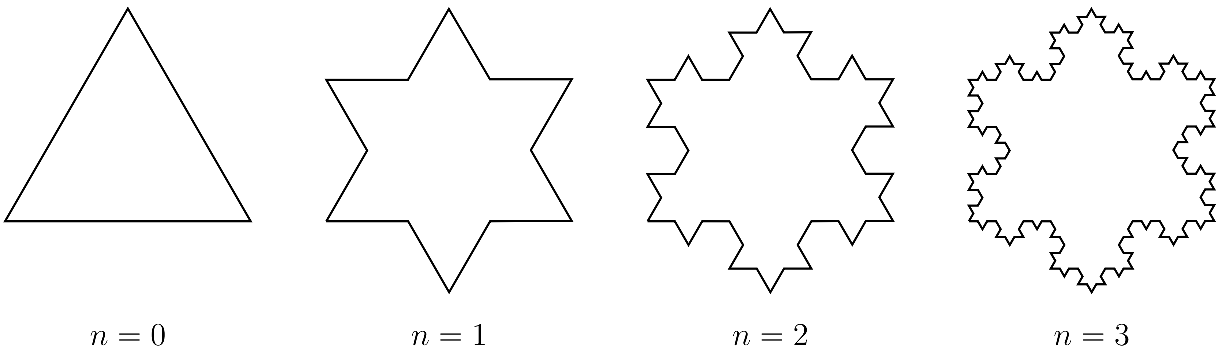
[15 pt] **Esercizio 5.** Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false, dimostrando quelle vere e esibendo un controesempio per quelle false.

(a) Esiste $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua in $[0,1] \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ che non ha né massimo né minimo globali.

(b) Sia $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $f(0) < 0$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Allora f ha uno zero in $(0,+\infty)$.

(c) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che per ogni $k \in \mathbb{Z}$ si ha $f(2k) = 1$ e $f(2k+1) = 1$. Allora il limite $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ esiste ed è uguale a 1.

[10 pt] **Esercizio 6.** La *curva di Koch* è il frattale mostrato sotto e costruito come descritto di seguito. Si parte al passo $n = 0$ con un triangolo equilatero di area $\mathcal{A}$. Su ciascuno dei lati del triangolo si segue questa costruzione: si suddivide il lato in tre segmenti di uguale lunghezza; sul segmento centrale si costruisce un triangolo equilatero rivolto verso l'esterno e si rimuove la sua base. In questo modo, ciascun lato viene sostituito da quattro segmenti, ciascuno lungo 1/3 del lato su cui è stata eseguita la costruzione. Si ripete lo stesso procedimento per ciascun lato della figura ottenuta.



(a) Determinare il numero di lati s_n e la lunghezza l_n del singolo lato della figura ottenuta al passo n, verificando che si tratta di due progressioni geometriche. Determinare poi il perimetro p_n della figura ottenuta al passo n e calcolare $\lim_{n\to+\infty} p_n$.

(b) Il *fiocco di neve di Koch* è la regione racchiusa dalla curva di Koch. Si osservi che dallo step $n = 0$ allo step $n = 1$, su ogni lato del triangolo equilatero iniziale, viene aggiunto un triangolo equilatero di area pari a 1/9 dell'area del triangolo iniziale. Più in generale, al passo $n \geq 1$, su ogni lato della figura al passo $n-1$, viene aggiunto un triangolo equilatero di area pari a $\frac{1}{9}$ dell'area di ciascuno dei triangoli aggiunti al passo precedente. Verificare che l'area complessivamente aggiunta al passo $n \geq 1$ rispetto alla figura del passo $n-1$ è data da

$$A_n = \frac{3}{4}\left(\frac{4}{9}\right)^n \mathcal{A}.$$

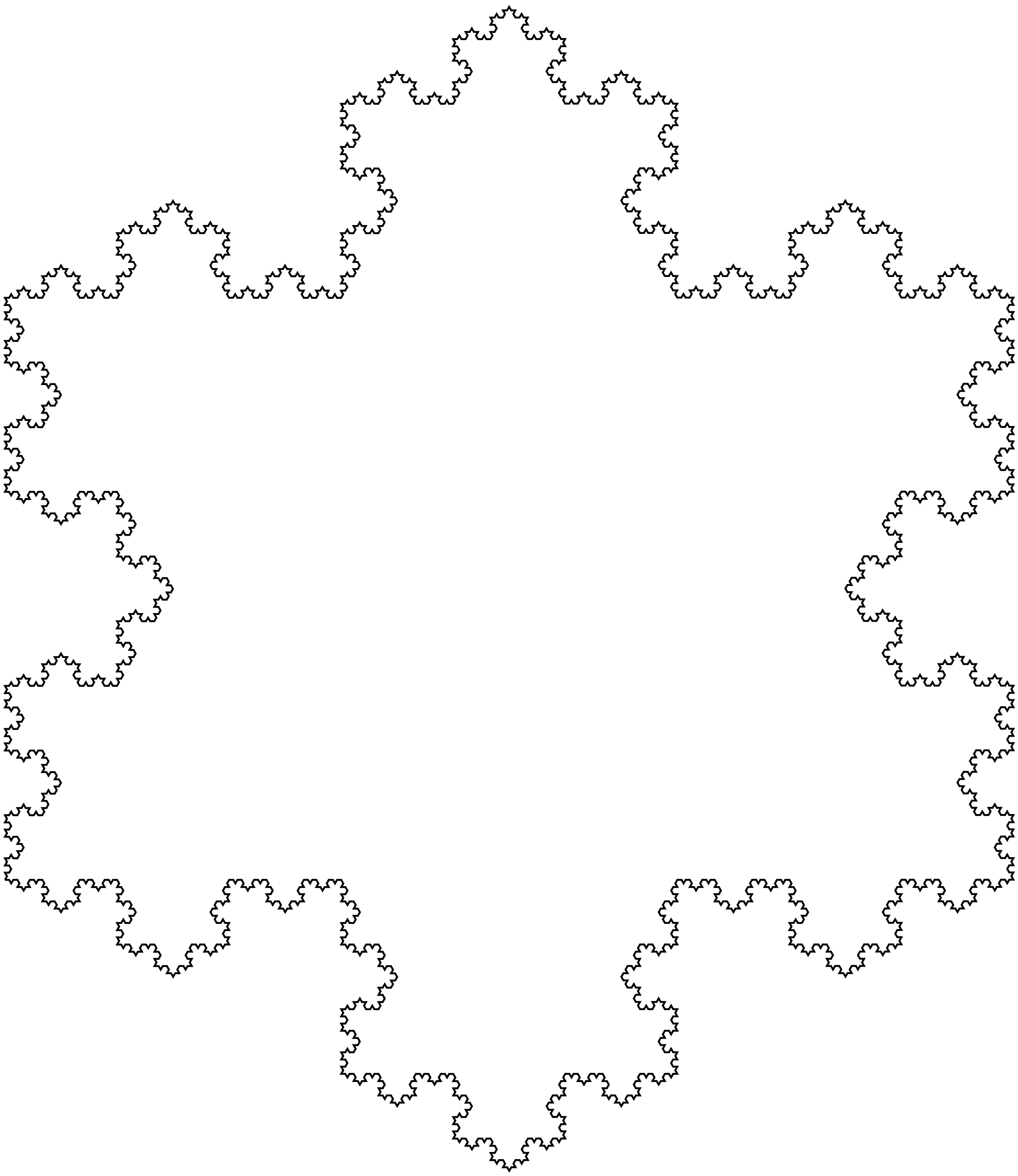
(c) Calcolare l'area del fiocco di neve di Koch.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6

Voto: ________

Koch snowflake dopo 5 iterazioni

Se siete curiosi, la parola chiave è *frattali*!



Buon compito!