Liceo Scientifico “A. Vallisneri” – Classe 5B

Prova scritta di matematica

Nome e cognome: ______________________________

Istruzioni per la consegna

- Presentare con chiarezza la strategia risolutiva adottata, indicando i teoremi e le proprietà utilizzati e motivando ogni passaggio del ragionamento.
- Utilizzare un linguaggio matematico corretto e coerente, rispettando il formalismo e la simbologia propri della disciplina.
- Esporre il procedimento risolutivo in modo ordinato e preciso.

[25 pt] **Esercizio 1.** Si consideri la famiglia di funzioni definita da

$$f_{a,b}(x) = \frac{ax^3 + b}{x^2 - 2x + 1},$$

in cui a e b sono numeri reali qualsiasi.

(a) Determinare per quali valori di a e b la funzione ha un flesso orizzontale in $x = 0$ e ha asintoto obliquo parallelo alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

Si consideri adesso la funzione f che si ottiene ponendo $a = 1$ e $b = 0$.

(b) Studiare la funzione f e disegnarne il grafico.

(c) Determinare i punti del grafico di f in cui la tangente è parallela all'asintoto obliquo.

[15 pt] **Esercizio 2.** Si consideri la famiglia di funzioni definita da

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} -x^2 + ax + b & \text{se } x \geq 0 \\ \sqrt[3]{1+x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

in cui a e b sono numeri reali qualsiasi.

(a) Determinare per quali valori di a e b la funzione soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $I = [-1, 1]$. In corrispondenza di tali valori determinare i punti di cui il teorema garantisce l'esistenza.

(b) È possibile trovare un $k > 0$ tale che la funzione soddisfi le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $J = [-3, k]$?

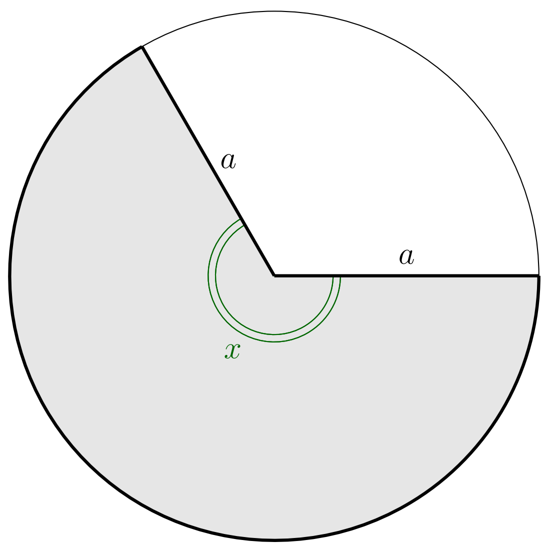
[15 pt] **Esercizio 3.** Da un foglio di carta di forma circolare e di raggio a si ritaglia un settore circolare. Il pezzo di carta rimanente, di ampiezza x (espressa in radianti), viene ripiegato in modo da formare un cono retto.

(a) Dopo aver dato le opportune limitazioni alla variabile x, esprimere il raggio di base r e l'altezza h del cono in funzione di x.

(b) Verificare che il volume del cono è dato da

$$V(x) = \frac{a^3}{24\pi^2} x^2 \sqrt{4\pi^2 - x^2}.$$

(c) Dopo aver dimostrato che V ammette un punto di massimo globale, determinare l'ampiezza x_* in corrispondenza della quale il volume del cono ottenuto è massimo.



[15 pt] **Esercizio 4.** Stabilire a quali dei seguenti limiti è possibile applicare il teorema di De L'Hôpital, giustificando adeguatamente la risposta. Nel caso in cui il teorema risulti applicabile, lo si usi per trovare il valore del limite; in caso contrario, calcolare comunque il limite con altre tecniche.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{2x - \sin(7x)}{7x - \sin(2x)}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\tan(3x)}{\ln(2x)}$

Es. 1	**Es. 2**	**Es. 3**	**Es. 4**

Voto: ________