Esercizi dimostrativi per induzione

Alessio Del Vigna

1 La tecnica dimostrativa

L'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali può essere definito nell'ambito della teoria degli insiemi come il più piccolo insieme che contiene lo 0 ed è chiuso per l'operazione di successore. Ciò ha come immediata conseguenza il principio di induzione.

Teorema 1.1 (principio di induzione)**.** *Sia $\mathcal{P}(n)$ una proprietà sui numeri naturali. Supponiamo che valgano i seguenti due fatti:*

(i) $\mathcal{P}(0)$ *è vera;*

(ii) *se $\mathcal{P}(k)$ è vera allora $\mathcal{P}(k+1)$ è vera.*

Allora $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Il contenuto del precedente teorema è molto intuitivo. La proprietà (i) garantisce che $\mathcal{P}(0)$ sia vera, mentre la proprietà (ii) innesca una catena di implicazioni che portano dalla validità di $\mathcal{P}(0)$ a quella di $\mathcal{P}(1)$, da quella di $\mathcal{P}(1)$ a quella di $\mathcal{P}(2)$, e così via: la proprietà $\mathcal{P}(n)$ sarà dunque valida per tutti i numeri naturali.

Il principio di induzione rappresenta una delle più raffinate tecniche dimostrative della matematica per proposizioni che riguardano i numeri naturali. Se dobbiamo mostrare la validità di una proprietà $\mathcal{P}(n)$ per tutti gli $n \in \mathbb{N}$ è sufficiente dimostrare che vale $\mathcal{P}(0)$ (*passo base*) e che se vale $\mathcal{P}(k)$ allora vale anche $\mathcal{P}(k+1)$ (*passo induttivo*). Notare che, per il passo induttivo, la validità di $\mathcal{P}(k+1)$ va dimostrata assumendo come ipotesi la validità di $\mathcal{P}(k)$: questa assunzione va sotto il nome di *ipotesi induttiva*.

2 Esempi

Esempio 2.1 (somma dei primi n interi consecutivi)**.** Dimostriamo che per ogni $n \geq 1$ intero vale

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

ovvero che

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

La precedente uguaglianza è la proprietà $\mathcal{P}(n)$, che dobbiamo dimostrare essere vera per ogni $n \geq 1$. L'uguaglianza è banalmente vera per $n = 1$, il che prova il passo base. Supponiamo ora che $\mathcal{P}(k)$ sia vera per un certo k e dimostriamo che da ciò segue la validità di $\mathcal{P}(k+1)$. Stiamo cioè assumendo l'ipotesi induttiva $1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$. Si ha così

$$1 + 2 + \ldots + k + (k+1) \overset{(*)}{=} \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2},$$

dove $(*)$ vale in virtù dell'ipotesi induttiva. Ciò completa la dimostrazione per induzione.

Esempio 2.2. Dimostriamo che $3^{2n} - 1$ è multiplo di 8 per ogni $n \geq 0$ intero.

L'affermazione è banalmente vera per $n = 0$. Assunto che per un certo intero k l'affermazione sia vera mostriamo che è vera anche per $k+1$. In altre parole, assunto che $3^{2k}-1$ sia multiplo di 8 per un certo k, dimostriamo che $3^{2(k+1)} - 1$ è multiplo di 8. Consideriamo allora

$$3^{2(k+1)} - 1 = 3^2 \cdot 3^{2k} - 1 = 3^2(3^{2k} - 1) + (3^2 - 1) = 3^2(3^{2k} - 1) + 8.$$

Questa quantità è somma di due termini, ciascuno multiplo di 8: il primo per ipotesi induttiva in quanto $3^{2k} - 1$ è multiplo di 8, il secondo banalmente. Questo conclude la dimostrazione per induzione.

Esempio 2.3. Dimostriamo che $3^{n-2} \leq n! \quad \forall n \geq 2$.

La disuguaglianza è chiaramente vera per $n = 2$. Supponiamo adesso che valga $3^{k-2} \leq k!$ per un certo k e dimostriamo che $3^{k-1} \leq (k+1)!$. Si ha

$$3^{k-1} = 3^{k-2} \cdot 3 \overset{(*)}{\leq} k! \cdot 3 \overset{(**)}{\leq} (k+1) \cdot k! = (k+1)!$$

dove in $(*)$ abbiamo usato l'ipotesi induttiva e in $(**)$ il fatto che $3 \leq k+1$ quando $k \geq 2$. Ciò completa il passo induttivo.

3 Esercizi

Esercizio 3.1. Dimostrare le seguenti proprietà per induzione.

(i) $\sum_{j=1}^{n} (2j-1) = n^2 \quad \forall n \geq 1$

(ii) $\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \geq 1$

(iii) $\sum_{j=1}^{n} j^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \quad \forall n \geq 1$

(iv) $\sum_{j=1}^{n} j^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} \quad \forall n \geq 1$

(v) $\prod_{j=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{j^2}\right) = \frac{n+1}{2n} \quad \forall n \geq 2$

(vi) $\prod_{j=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{j^2}\right) = \frac{n+1}{2n} \quad \forall n \geq 2$

Esercizio 3.2. Dimostrare le seguenti proprietà di divisibilità per induzione.

(i) Il numero $n^3 + 5n$ è divisibile per 6 per ogni $n \geq 1$.

(ii) Il numero $10^{2n+1} + 1$ è divisibile per 11 per ogni $n \geq 0$.

(iii) Il numero $7^{n+2} + 8^{2n+1}$ è divisibile per 57 per ogni $n \geq 0$.

(iv) Per ogni numero dispari $n \geq 1$, $4^n + 5^n$ è divisibile per 9.

(v) Il numero $4^n + 15n - 1$ è divisibile per 9 per ogni $n \geq 1$.

Esercizio 3.3. Dimostrare le seguenti disugaglianze per induzione.

(i) $2^n \geq 1 + n \quad \forall n \geq 0$

(ii) $n^3 - 2n^2 - n + 7 \geq 0 \quad \forall n \geq 1$

(iii) $2^{n-1} \leq n! \quad \forall n \geq 1$

(iv) $2^{2n} \geq n^4 \quad \forall n \geq 4$

(v) $n! \leq n^n \quad \forall n \geq 1$

(vi) $(n+1)^{n-1} \leq n^n \quad \forall n \geq 1$

Esercizio 3.4 (Disuguaglianza di Bernoulli)**.** Sia $x > -1$ un numero reale. Dimostrare che

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \quad \forall n \geq 0.$$

Esercizio 3.5. Sia $(a_n)_{n\geq 1}$ la successione definita per ricorrenza da

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2 - a_n} \quad \forall n \geq 1.$$

(i) Mostrare per induzione che la successione è strettamente crescente.

(ii) Mostrare per induzione che la successione è limitata superiormente.

Esercizio 3.6. Sia $(a_n)_{n\geq 1}$ la successione definita per ricorrenza da

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \quad \forall n \geq 1.$$

(i) Mostrare per induzione che la successione è monotona decrescente.

(ii) Mostrare per induzione che la successione è limitata inferiormente.

Esercizio 3.7. Sia $(a_n)_{n\geq 1}$ la successione definita da

$$a_n = \underbrace{\sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}_{n \text{ volte}}.$$

Dimostrare che a_n non è razionale per ogni $n \geq 2$.

Esercizio 3.8. Sia $n \geq 3$. Dimostrare che la somma degli angoli interni di un n-agono convesso è $(n-2)\pi$ radianti.

Esercizio 3.9. Sia $n \geq 1$ e consideriamo una scacchiera $2^n \times 2^n$ a cui viene tolta una casella d'angolo. Dimostrare che è possibile ricoprire la parte rimanente della scacchiera con tessere a forma di "L" che ricoprono 3 caselle ciascuna.

Esercizio 3.10. Sia $n \geq 1$ e sia b_n il numero di stringhe binarie di lunghezza n che non contengono mai due 0 consecutivi. Mostrare che $b_1 = 2$, $b_2 = 3$ e che si ha la ricorrenza $b_n = b_{n-1} + b_{n-2} \quad \forall n \geq 3$.

Esercizio 3.11. Sia $n \geq 1$ e sia d_n il numero di modi di coprire una scacchiera $2 \times n$ con tessere 2×1 o 1×2.

(i) Calcolare esplicitamente d_n per $n = 1, 2, 3$.

(ii) Determinare una relazione di ricorrenza per d_n.

Esercizio 3.12. Sia X un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{N}$. Dimostrare che allora X ha il minimo.