

Legame tra la Canonical Polyadic Decomposition e il Joint Generalized Eigenvalue problem per un tensore

Nikita Deniskin

Università di Pisa

Low rank approximation techniques for matrices and tensors
prof. Stefano Massei

26 Luglio 2022

Setting

Problema

È dato un tensore \mathcal{T} di dimensione $R \times R \times K$ con $K \leq R$, di rango R , e di rango multilineare (R, R, K) .
Come possiamo ottenere la sua CPD?

Setting

Problema

È dato un tensore \mathcal{T} di dimensione $R \times R \times K$ con $K \leq R$, di rango R , e di rango multilineare (R, R, K) .
Come possiamo ottenere la sua CPD?

\mathcal{T} tensore $R \times R \times K \iff \mathcal{T}_l = \mathcal{T}(:, :, l)$ sono K matrici $R \times R$.

- ▶ Legame tra CPD e problema JGE.
- ▶ Due algoritmi basati su JGE: CPDQZ e CPDQZS.

Rango

Sia \mathcal{M} un tensore $l_1 \times l_2 \times l_3$, su un campo $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} .

Un tensore \mathcal{M} ha una CPD $[A, B, C]$ di rango R se
 $\mathcal{M} = \sum_{r=1}^R a_r \otimes b_r \otimes c_r$, con $A \in \mathbb{F}^{l_1 \times R}$ etc.

Rango

Sia \mathcal{M} un tensore $I_1 \times I_2 \times I_3$, su un campo $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} .

Un tensore \mathcal{M} ha una CPD $[A, B, C]$ di rango R se
 $\mathcal{M} = \sum_{r=1}^R a_r \otimes b_r \otimes c_r$, con $A \in \mathbb{F}^{I_1 \times R}$ etc.

Il *rango multilineare* $\text{mlR}(\mathcal{M}) = (R_1, R_2, R_3)$ di \mathcal{M} è definito come
 $R_i = \text{rank}(\mathcal{M}_{(i)})$, ovvero il rango dell' i -esimo unfolding di \mathcal{M} .

Rango

Sia \mathcal{M} un tensore $I_1 \times I_2 \times I_3$, su un campo $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} .

Un tensore \mathcal{M} ha una CPD $[A, B, C]$ di rango R se
 $\mathcal{M} = \sum_{l=1}^R a_l \otimes b_l \otimes c_l$, con $A \in \mathbb{F}^{I_1 \times R}$ etc.

Il *rango multilineare* $\text{mlR}(\mathcal{M}) = (R_1, R_2, R_3)$ di \mathcal{M} è definito come
 $R_i = \text{rank}(\mathcal{M}_{(i)})$, ovvero il rango dell' i -esimo unfolding di \mathcal{M} .

Decomposizione di Tucker

Se $\text{mlR}(\mathcal{M}) = (R_1, R_2, R_3)$, allora esistono matrici ortogonali
 $U_j \in \mathbb{F}^{I_j \times R_j}$ e una *core* $\mathcal{T} \in \mathbb{F}^{R_1 \times R_2 \times R_3}$ tali che:

$$\mathcal{M} = \mathcal{T} \times_1 U_1 \times_2 U_2 \times_3 U_3$$

Compressione ortogonale

Abbiamo un tensore $\widetilde{\mathcal{M}}$ in $\mathbb{F}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$, che sappiamo essere una perturbazione di un tensore di rango R , ovvero:

$$\widetilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M} + \mathcal{N}$$

dove \mathcal{M} è un tensore di rango R e \mathcal{N} è un rumore.

Supponendo che $\text{mlR}(\mathcal{M}) = (R, R, K)$, possiamo calcolare \mathcal{M} da $\widetilde{\mathcal{M}}$ con un'approssimazione multilineare.

Compressione ortogonale

Abbiamo un tensore $\widetilde{\mathcal{M}}$ in $\mathbb{F}^{l_1 \times l_2 \times l_3}$, che sappiamo essere una perturbazione di un tensore di rango R , ovvero:

$$\widetilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M} + \mathcal{N}$$

dove \mathcal{M} è un tensore di rango R e \mathcal{N} è un rumore.

Supponendo che $\text{mlr}(\mathcal{M}) = (R, R, K)$, possiamo calcolare \mathcal{M} da $\widetilde{\mathcal{M}}$ con un'approssimazione multilineare.

Possiamo comprimere \mathcal{M} da $l_1 \times l_2 \times l_3$ al suo core \mathcal{T} di dimensione $R \times R \times K$. Trovata una CPD di rango R per \mathcal{T} , troviamo un'approssimazione di rango R per $\widetilde{\mathcal{M}}$.

D'ora in poi possiamo quindi lavorare direttamente con \mathcal{T} , con $K \leq R$.

Per tensori di ordine ≥ 3 , l'insieme dei tensori di rango $\leq R$ non è un chiuso.

Definizione: Border Rank

Un tensore \mathcal{T} ha *border rank* $\text{bR}(\mathcal{T}) = R$ se esiste una sequenza $\mathcal{T}^{(n)}$ che converge a \mathcal{T} puntualmente, con $\text{rank}(\mathcal{T}^{(n)}) = R$, ma non esiste nessuna sequenza di rango $R' < R$.

Per tensori di ordine ≥ 3 , l'insieme dei tensori di rango $\leq R$ non è un chiuso.

Definizione: Border Rank

Un tensore \mathcal{T} ha *border rank* $\text{bR}(\mathcal{T}) = R$ se esiste una sequenza $\mathcal{T}^{(n)}$ che converge a \mathcal{T} puntualmente, con $\text{rank}(\mathcal{T}^{(n)}) = R$, ma non esiste nessuna sequenza di rango $R' < R$.

Oss. $\text{bR}(\mathcal{T}) \leq \text{rank}(\mathcal{T})$.

Per tensori di ordine ≥ 3 , l'insieme dei tensori di rango $\leq R$ non è un chiuso.

Definizione: Border Rank

Un tensore \mathcal{T} ha *border rank* $\text{bR}(\mathcal{T}) = R$ se esiste una sequenza $\mathcal{T}^{(n)}$ che converge a \mathcal{T} puntualmente, con $\text{rank}(\mathcal{T}) = R$, ma non esiste nessuna sequenza di rango $R' < R$.

Oss. $\text{bR}(\mathcal{T}) \leq \text{rank}(\mathcal{T})$.

Proposizione: il rango multilineare è semicontinuo

Se $\mathcal{T}^{(n)} \rightarrow \mathcal{T}$, allora $\text{mlR}(\mathcal{T}^{(n)}) \geq \text{mlR}(\mathcal{T})$ definitivamente in n .

Sia $\mathcal{T} \in \mathbb{F}^{R \times R \times K}$ con CPD $[A, B, C]$.

Unfolding: $\mathcal{T}_{(1)} = A \cdot (C \odot B)^\top$ di dimensioni $R \times RK$,
dove $C \odot B$ è il prodotto Khatri-Rao.

Slice: $\mathcal{T}(:, :, l) = \mathcal{T}_l = A \cdot D_l(C) \cdot B^\top$
dove $D_l(C) = \text{diag}(C(l, :))$ è una matrice diagonale, contenente la
 l -esima riga di C (di lunghezza R).

Sia $\mathcal{T} \in \mathbb{F}^{R \times R \times K}$.

Definizione: Joint Generalized Eigenvalue

Un Joint Generalized Eigenvalue per \mathcal{T} (*JGEval*) è $\lambda \in \mathbb{F}^K$, con Joint Generalized Eigenvector (*JGVec*) $x \in \mathbb{F}^R$, se esiste $y \in \mathbb{F}^R$, $y \neq 0$ tale che

$$\mathcal{T}_l x = \lambda(l) y$$

per ogni l .

Sia $\mathcal{T} \in \mathbb{F}^{R \times R \times K}$.

Definizione: Joint Generalized Eigenvalue

Un Joint Generalized Eigenvalue per \mathcal{T} (*JGEval*) è $\lambda \in \mathbb{F}^K$, con Joint Generalized Eigenvector (*JGVec*) $x \in \mathbb{F}^R$, se esiste $y \in \mathbb{F}^R$, $y \neq 0$ tale che

$$\mathcal{T}_l x = \lambda(l) y$$

per ogni l .

Oss. I JGEval per un tensore “buono” sono al più R .

Più precisamente, si parla del sottospazio $\text{span}(x) \subseteq \mathbb{F}^R$ al posto del vettore x , e del sottospazio $\text{span}(\lambda) \subseteq \mathbb{F}^k$ al posto del punto λ .

Definizione: Polinomio caratteristico

Date $\gamma_1, \dots, \gamma_K$ delle variabili, sia:

$$P_{\mathcal{T}}(\gamma) = \det \left(\sum_{l=1}^K \gamma_l \mathcal{T}_l \right)$$

Esso è omogeneo di grado R nelle variabili γ_l .

Definizione: Polinomio caratteristico

Date $\gamma_1, \dots, \gamma_K$ delle variabili, sia:

$$P_{\mathcal{T}}(\gamma) = \det \left(\sum_{I=1}^K \gamma_I \mathcal{T}_I \right)$$

Esso è omogeneo di grado R nelle variabili γ_I .

La *molteplicità algebrica* di λ è il più grande intero m tale che $\langle \lambda, \gamma \rangle^m \mid P_{\mathcal{T}}(\gamma)$

La *molteplicità geometrica* di λ è il numero di JGEvec linearmente indipendenti con JGEval λ .

Definizione: Polinomio caratteristico

Date $\gamma_1, \dots, \gamma_K$ delle variabili, sia:

$$P_{\mathcal{T}}(\gamma) = \det \left(\sum_{I=1}^K \gamma_I T_I \right)$$

Esso è omogeneo di grado R nelle variabili γ_I .

La *molteplicità algebrica* di λ è il più grande intero m tale che $\langle \lambda, \gamma \rangle^m \mid P_{\mathcal{T}}(\gamma)$

La *molteplicità geometrica* di λ è il numero di JGEvec linearmente indipendenti con JGEval λ .

Ci aspettiamo che un JGEval algebrico sia anche JGEval geometrico (e viceversa) con $\text{am}(\lambda) \geq \text{gm}(\lambda)$.

Questo è parzialmente vero.

Definizione

\mathcal{T} è Slice Mix Invertible (*SLIMI*) se $\text{span}\{\mathcal{T}_l : 1 \leq l \leq K\}$ contiene una matrice invertibile.

Definizione

\mathcal{T} è Slice Mix Invertible (*SLIMI*) se $\text{span}\{\mathcal{T}_l : 1 \leq l \leq K\}$ contiene una matrice invertibile.

Oss. \mathcal{T} è SLIMI $\iff P_{\mathcal{T}}(\gamma)$ non è identicamente nullo.

Oss. \mathcal{T} SLIMI ha al più R JGEval algebrici.

Definizione

\mathcal{T} è Slice Mix Invertible (*SLIMI*) se $\text{span}\{\mathcal{T}_I : 1 \leq I \leq K\}$ contiene una matrice invertibile.

Oss. \mathcal{T} è SLIMI $\iff P_{\mathcal{T}}(\gamma)$ non è identicamente nullo.

Oss. \mathcal{T} SLIMI ha al più R JGEval algebrici.

Proposizione

Inoltre $\lambda = (0, \dots, 0)$ non è JGEval per \mathcal{T} SLIMI.

Dim. Se lo fosse, $\mathcal{T}_I x = 0$ per ogni I , quindi $x \in \text{Ker}(\mathcal{T}_I)$.
Ogni combinazione lineare di \mathcal{T}_I avrebbe x nel nucleo, assurdo.

CPD e rango R

Introduzione

JGE problem

CPD e rango R

ε -Intorno

Algoritmo CPDQZ

Esperimenti

Proposizione

Sia \mathcal{T} di dimensione $R \times R \times K$.

1. Se $\text{mlR}(\mathcal{T}) = (R, R, \cdot)$ e $\text{rank}(\mathcal{T}) = R$, con CPD $[A, B, C]$, allora A, B sono invertibili.
2. Se $\text{mlR}(\mathcal{T}) = (R, R, K)$ e $\text{rank}(\mathcal{T}) = R$, allora \mathcal{T} è SLIMI.
3. Viceversa, se \mathcal{T} è SLIMI, allora $\text{mlR}(\mathcal{T}) = (R, R, \cdot)$ e $\text{rank}(\mathcal{T}) \geq R$.

Proposizione

Sia \mathcal{T} di dimensione $R \times R \times K$.

1. Se $\text{mlR}(\mathcal{T}) = (R, R, \cdot)$ e $\text{rank}(\mathcal{T}) = R$, con CPD $[A, B, C]$, allora A, B sono invertibili.
2. Se $\text{mlR}(\mathcal{T}) = (R, R, K)$ e $\text{rank}(\mathcal{T}) = R$, allora \mathcal{T} è SLIMI.
3. Viceversa, se \mathcal{T} è SLIMI, allora $\text{mlR}(\mathcal{T}) = (R, R, \cdot)$ e $\text{rank}(\mathcal{T}) \geq R$.

Oss. Se $\text{mlR}(\mathcal{T}) = (R, R, K)$ e $\text{bR}(\mathcal{T}) = R$, non è detto che \mathcal{T} sia SLIMI.

Proposizione

Sia \mathcal{T} di dimensione $R \times R \times K$.

1. Se $\text{mlR}(\mathcal{T}) = (R, R, \cdot)$ e $\text{rank}(\mathcal{T}) = R$, con CPD $[A, B, C]$, allora A, B sono invertibili.
2. Se $\text{mlR}(\mathcal{T}) = (R, R, K)$ e $\text{rank}(\mathcal{T}) = R$, allora \mathcal{T} è SLIMI.
3. Viceversa, se \mathcal{T} è SLIMI, allora $\text{mlR}(\mathcal{T}) = (R, R, \cdot)$ e $\text{rank}(\mathcal{T}) \geq R$.

Dim 1) A, B invertibili.

Un unfolding si può scrivere tramite la CPD:

$$\mathcal{T}_{(1)} = A \cdot (C \odot B)^\top \quad \text{di taglia } R \times RK$$

Visto che $\text{mlR}(\mathcal{T})_1 = R$, \mathcal{T}_1 ha rango R , dunque A che è una matrice $R \times R$ dev'essere invertibile. Analogamente per B .

Dim 2) \mathcal{T} è SLIMI

$\mathcal{T}_I = A \cdot D_I(C) \cdot B^\top$ dove C è $K \times R$.

Per avere una combinazione lineare di \mathcal{T}_I non singolare, basta che ci sia una combinazione lineare mai nulla di righe di C .

$\text{mlR}(\mathcal{T})_3 = K$ ci assicura che non esista una colonna di C completamente nulla.

Una combinazione $v(s) = \sum_{l=1}^K \alpha_l C(l, s)$ è nulla per gli $\{\alpha\}$ in un iperpiano $\subsetneq \mathbb{F}^K$. Dunque le combinazioni $\sum \alpha_l C(l, :)$ che sono nulle in almeno un punto, sono un'unione di R iperpiani in \mathbb{F}^K , che ha misura zero.

Dim 2) \mathcal{T} è SLIMI

$\mathcal{T}_I = A \cdot D_I(C) \cdot B^\top$ dove C è $K \times R$.

Per avere una combinazione lineare di \mathcal{T}_I non singolare, basta che ci sia una combinazione lineare mai nulla di righe di C .

$\text{mlR}(\mathcal{T})_3 = K$ ci assicura che non esista una colonna di C completamente nulla.

Una combinazione $v(s) = \sum_{I=1}^K \alpha_I C(I, s)$ è nulla per gli $\{\alpha\}$ in un iperpiano $\subsetneq \mathbb{F}^K$. Dunque le combinazioni $\sum \alpha_I C(I, :)$ che sono nulle in almeno un punto, sono un'unione di R iperpiani in \mathbb{F}^K , che ha misura zero.

Dim 3) Se \mathcal{T} è SLIMI, allora ha rango multilineare (R, R, \cdot) .

Preso una combinazione lineare non singolare $S = \sum_I \alpha_I \mathcal{T}_I$, lo span delle colonne di S è contenuto nello span delle colonne di $\mathcal{T}_{(1)}$ (mentre S^\top delle colonne di $\mathcal{T}_{(2)}$).

Dunque il rango multilineare è almeno R .

Proposizione

Se \mathcal{T} è SLIMI con x_j JGEvec per $1 \leq j \leq l$ e JGEval λ_j distinti, allora i x_j sono linearmente indipendenti.

Proposizione

Se \mathcal{T} è SLIMI con x_j JGEvec per $1 \leq j \leq I$ e JGEval λ_j distinti, allora i x_j sono linearmente indipendenti.

Dim. Siano λ_j JGEval, e sia $L \in \mathbb{F}^{K \times I}$ con colonne formate dai λ_j . Posso scegliere $V \in \mathbb{F}^{2 \times K}$ in modo che VL sia $2 \times I$ e non abbia due colonne linearmente dipendenti.

$\mathcal{S} = \mathcal{T} \times_3 V$ è un tensore $R \times R \times 2$, con JGEvec x_j e JGEval $V\lambda_j \in \mathbb{F}^2$.

Quindi x_j sono gli autovettori generalizzati della coppia $(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2)$, dunque sono linearmente indipendenti.

Proposizione

Se \mathcal{T} è SLIMI con x_j JGEvec per $1 \leq j \leq I$ e JGEval λ_j distinti, allora i x_j sono linearmente indipendenti.

Dim. Siano λ_j JGEval, e sia $L \in \mathbb{F}^{K \times I}$ con colonne formate dai λ_j . Posso scegliere $V \in \mathbb{F}^{2 \times K}$ in modo che VL sia $2 \times I$ e non abbia due colonne linearmente dipendenti.

$\mathcal{S} = \mathcal{T} \times_3 V$ è un tensore $R \times R \times 2$, con JGEvec x_j e JGEval $V\lambda_j \in \mathbb{F}^2$.

Quindi x_j sono gli autovettori generalizzati della coppia $(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2)$, dunque sono linearmente indipendenti.

Corollario

\mathcal{T} SLIMI ha $\sum \text{gm}(\lambda) \leq R$, cioè \mathcal{T} non può avere più di R JGEvec.

Teorema

Sia \mathcal{T} è SLIMI di dimensioni $R \times R \times K$.

1. $\text{am}(\lambda) \geq \text{gm}(\lambda)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{F}^K$:
2. $P_{\mathcal{T}}(\gamma) = \langle \lambda, \bar{\gamma} \rangle^{\text{gm}(\lambda)} g(\gamma)$
3. Se inoltre \mathcal{T} ha rango R , allora $P_{\mathcal{T}}(\gamma)$ si scompone in R fattori lineari:

$$P_{\mathcal{T}}(\gamma) = \prod_{h=1}^R \langle \lambda_h, \gamma \rangle$$

4. Se \mathcal{T} ha solamente border rank R , comunque $P_{\mathcal{T}}(\gamma)$ si scompone in R fattori lineari.

Teorema

Sia \mathcal{T} è SLIMI di dimensioni $R \times R \times K$.

1. $\text{am}(\lambda) \geq \text{gm}(\lambda)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{F}^K$:
2. $P_{\mathcal{T}}(\gamma) = \langle \lambda, \bar{\gamma} \rangle^{\text{gm}(\lambda)} g(\gamma)$
3. Se inoltre \mathcal{T} ha rango R , allora $P_{\mathcal{T}}(\gamma)$ si scompone in R fattori lineari:

$$P_{\mathcal{T}}(\gamma) = \prod_{h=1}^R \langle \lambda_h, \gamma \rangle$$

4. Se \mathcal{T} ha solamente border rank R , comunque $P_{\mathcal{T}}(\gamma)$ si scompone in R fattori lineari.

Oss. Se \mathcal{T} non è SLIMI, un JGEval può avere $\text{am}(\lambda) \geq 1$ e $\text{gm}(\lambda) = 0$.

Dimostrazione 1) e 2) Sia $m = \text{gm}(\lambda)$, e x_1, \dots, x_m i JGEvec di λ , e y_j i loro corrispondenti. $T_I x_j = \lambda_j(I) y_j$.

Dato che \mathcal{T} è SLIMI, sia gli $\{x_j\}$ che gli $\{y_j\}$ sono linearmente indipendenti.

Usando Gram-Schmidt, si trasforma $\{y_j\}$ in un insieme ortogonale. Con le stesse combinazioni lineari, $\{x_j\}$ rimane un insieme di JGEvec linearmente indipendenti.

Cambiamo base. Sia X_1 la matrice $R \times m$ con colonne x_j , e sia $X = (X_1 \mid X_2)$ un suo completamento.

Sia Y_1 la matrice $R \times m$ con colonne y_j , e sia $Q = \begin{pmatrix} Y_1^\top \\ Q_2 \end{pmatrix}$ un completamento, con Q_2 base di $\text{span}(Y_1)^\perp$.

Dimostrazione 1) e 2)

$$\begin{aligned}
 Q T_l X &= Q T_l (X_1 \mid X_2) = Q (T_l X_1 \mid T_l X_2) = \\
 &= \left(\frac{Y_1^\top T_l X_1 \mid Y_1^\top T_l X_2}{Q_2 T_l X_1 \mid Q_2 T_l X_2} \right) = \left(\frac{\lambda(l) Y_1^\top Y_1 \mid Y_1^\top T_l X_2}{\lambda(l) Q_2 Y_1 \mid Q_2 T_l X_2} \right) = \\
 &= \left(\frac{\lambda(l) I_m \mid Y_1^\top T_l X_2}{0 \mid Q_2 T_l X_2} \right) \\
 Q \left(\sum_{l=1}^K \gamma_l T_l \right) X &= \left(\frac{\sum_{l=1}^K \lambda(l) \gamma_l I_m \mid \sum_l (\dots)}{0 \mid \sum_l (\dots)} \right)
 \end{aligned}$$

Dimostrazione 1) e 2)

$$\begin{aligned}
 Q T_I X &= Q T_I (X_1 \mid X_2) = Q (T_I X_1 \mid T_I X_2) = \\
 &= \left(\begin{array}{c|c} Y_1^\top T_I X_1 & Y_1^\top T_I X_2 \\ \hline Q_2 T_I X_1 & Q_2 T_I X_2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda(l) Y_1^\top Y_1 & Y_1^\top T_I X_2 \\ \hline \lambda(l) Q_2 Y_1 & Q_2 T_I X_2 \end{array} \right) = \\
 &= \left(\begin{array}{c|c} \lambda(l) I_m & Y_1^\top T_I X_2 \\ \hline 0 & Q_2 T_I X_2 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

$$\det(Q) \det \left(\sum_{l=1}^K \gamma_l T_l \right) \det(X) = \det \left(\begin{array}{c|c} \sum_{l=1}^K \lambda(l) \gamma_l I_m & \sum_l (\dots) \\ \hline 0 & \sum_l (\dots) \end{array} \right)$$

$$P_{\mathcal{T}}(\gamma) = \det(Q)^{-1} \det(X)^{-1} \langle \lambda, \gamma \rangle^m g(\gamma)$$

Dimostrazione 3) $R(\mathcal{T}) = R \Rightarrow P_{\mathcal{T}}(\gamma)$ spezza.

Sia \mathcal{T} di rango R , con CPD $[A, B, C]$. Sappiamo che A, B sono invertibili poiché \mathcal{T} è SLIMI.

$T_I = A D_I(C) B^\top$, implica:

Dimostrazione 3) $R(\mathcal{T}) = R \Rightarrow P_{\mathcal{T}}(\gamma)$ spezza.

Sia \mathcal{T} di rango R , con CPD $[A, B, C]$. Sappiamo che A, B sono invertibili poiché \mathcal{T} è SLIMI.

$T_l = A D_l(C) B^{\top}$, implica:

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{T}}(\gamma) &= \det \left(A \left(\sum_{l=1}^K \gamma_l D_l(C) \right) B^{\top} \right) = \\ &= \det(A) \det \left(\sum_{l=1}^K \gamma_l D_l(C) \right) \det(B) \end{aligned}$$

Il termine centrale è il prodotto di R fattori lineari.

Dimostrazione 4) $\mathbf{bR}(\mathcal{T}) = R \Rightarrow P_{\mathcal{T}}(\gamma)$ spezza.

Sia \mathcal{T} di border rank R , con $\mathcal{T}^{(n)} \rightarrow \mathcal{T}$.

$$P_{\mathcal{T}^{(n)}}(\gamma) = \alpha^{(n)} \prod_{h=1}^R \langle \lambda_h^{(n)}, \gamma \rangle$$

Con $\lambda_h^{(n)}$ di norma unitaria e $\alpha^{(n)}$ costante di normalizzazione.

Si passa a una sottosuccessione di $\lambda_h^{(n)}$ convergente a λ_h .

Dimostrazione 4) $\mathbf{bR}(\mathcal{T}) = R \Rightarrow P_{\mathcal{T}}(\gamma)$ spezza.

Sia \mathcal{T} di border rank R , con $\mathcal{T}^{(n)} \rightarrow \mathcal{T}$.

$$P_{\mathcal{T}^{(n)}}(\gamma) = \alpha^{(n)} \prod_{h=1}^R \langle \lambda_h^{(n)}, \gamma \rangle$$

Con $\lambda_h^{(n)}$ di norma unitaria e $\alpha^{(n)}$ costante di normalizzazione.

Si passa a una sottosuccessione di $\lambda_h^{(n)}$ convergente a λ_h .

Fissato γ_* tale che $\prod_{h=1}^R \langle \lambda_h, \gamma_* \rangle \neq 0$

$$P_{\mathcal{T}}(\gamma_*) = \lim_n P_{\mathcal{T}^{(n)}}(\gamma_*) = \lim_n \alpha^{(n)} \prod_{h=1}^R \langle \lambda_h^{(n)}, \gamma_* \rangle$$

Questo implica che $\alpha^{(n)}$ ha limite, e quindi per ogni γ :

$$P_{\mathcal{T}}(\gamma) = \lim_n \alpha^{(n)} \prod_{h=1}^R \langle \lambda_h^{(n)}, \gamma \rangle = \alpha \prod_{h=1}^R \langle \lambda_h, \gamma \rangle$$

Teorema

Sia \mathcal{T} un tensore di rango multilineare (R, R, K) , di dimensioni $R \times R \times K$.

1. Se \mathcal{T} ha R JGEvec il cui span è \mathbb{F}^R , allora \mathcal{T} ha rango R .
2. Se \mathcal{T} ha rango R , allora ha R JGEvec che spannano \mathbb{F}^R .
3. Se vale 1 o 2, chiamata $[A, B, C]$ la CPD di \mathcal{T} , allora i JGEval sono le colonne di C (in \mathbb{F}^K), e i JGEvec sono le colonne di B^{-T} .
4. Se \mathcal{T} ha rango R , un JGEval algebrico è anche un JGEval geometrico.
5. Se \mathcal{T} ha $\text{bR}(\mathcal{T}) = R$, un JGEval algebrico è anche un JGEval geometrico.

Oss. Un tale \mathcal{T} è necessariamente SLIMI.

Dimostrazione 1)

\mathcal{T} ha R JGE coppie x_j, λ_j tali che $T_l x_j = \lambda_j(l) y_j$, siano X la matrice con colonne x_j come colonne, e Y con colonne y_j , e Λ_l diagonale con $\Lambda_l(j, j) = \lambda_j(l)$. La matrice X è non singolare.

Dimostrazione 1)

\mathcal{T} ha R JGEcoppie x_j, λ_j tali che $T_l x_j = \lambda_j(l) y_j$, siano X la matrice con colonne x_j come colonne, e Y con colonne y_j , e Λ_l diagonale con $\Lambda_l(j, j) = \lambda_j(l)$. La matrice X è non singolare.

$$T_l X = Y \Lambda_l \Rightarrow T_l = Y \Lambda_l X^{-1}$$

Questa è una CPD per $\mathcal{T} = [A, B, C]$ con $A = Y$, $B = X^{-T}$, $C =$ righe formate da Λ_k .

Quindi il $R \geq \text{rank}(\mathcal{T}) \geq \text{mlR}(\mathcal{T}) = R$, cioè $\text{rank}(\mathcal{T}) = R$.

Dimostrazione

2) Se $\mathcal{T} = [A, B, C]$ come CPD di rango R , scrivo le slices come

$$T_l = AD_l(C)B^\top \Rightarrow T_l B^{-\top} = AD_l(C)$$

Da $A, B^{-\top}$ e C si ricavano y_j, x_j e λ_j rispettivamente. A e B sono invertibili, per cui x_j sono una base di \mathbb{F}^R .

Dimostrazione

2) Se $\mathcal{T} = [A, B, C]$ come CPD di rango R , scrivo le slices come

$$T_l = AD_l(C)B^\top \Rightarrow T_l B^{-\top} = AD_l(C)$$

Da $A, B^{-\top}$ e C si ricavano y_j, x_j e λ_j rispettivamente. A e B sono invertibili, per cui x_j sono una base di \mathbb{F}^R .

4) Sia λ^* un JGEval algebrico, e siano λ_j i JGEval geometrici ottenuti da $[A, B, C]$.

$$P_{\mathcal{T}}(\gamma) = \prod_{j=1}^R \langle \lambda_j, \gamma \rangle, \text{ per cui } \lambda^* \text{ dev'essere uno dei } \lambda_j.$$

Dimostrazione 5)

Prendo una successione $\mathcal{T}^{(n)}$ di rango R che tende a \mathcal{T} . Sia λ un JGEval di \mathcal{T} , ($\lambda \neq 0$ perché \mathcal{T} è SLIMI).

Per continuità $P_{\mathcal{T}^{(n)}}(\gamma)$ tende a $P_{\mathcal{T}}(\gamma)$. Quindi esiste una successione di JGEval $\lambda^{(n)}$ di $P_{\mathcal{T}^{(n)}}$ che convergono a λ .

Dimostrazione 5)

Prendo una successione $\mathcal{T}^{(n)}$ di rango R che tende a \mathcal{T} . Sia λ un JGEval di \mathcal{T} , ($\lambda \neq 0$ perché \mathcal{T} è SLIMI).

Per continuità $P_{\mathcal{T}^{(n)}}(\gamma)$ tende a $P_{\mathcal{T}}(\gamma)$. Quindi esiste una successione di JGEval $\lambda^{(n)}$ di $P_{\mathcal{T}^{(n)}}$ che convergono a λ .

$\mathcal{T}^{(n)}$ ha mlR = (R, R, K) e rango R , per cui $\lambda^{(n)}$ ha un JGEvec $x^{(n)}$, con relativo $y^{(n)}$.

I $\lambda^{(n)}$ sono limitati, posso scegliere $x^{(n)}$ limitati, e $y^{(n)} = \frac{1}{\lambda^{(n)}} \mathcal{T}_I x^{(n)}$ è limitato.

Passando a sottosuccessioni, esistono i limiti x, y, λ .

$$\mathcal{T}_I x = \lim_n \mathcal{T}_I^{(n)} x^{(n)} = \lim_n \lambda^{(n)} y^{(n)} = \lambda y$$

Controesempio

Sia \mathcal{T} di dimensioni $2 \times 2 \times 2$

$$\mathcal{T}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{T}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Controesempio

Sia \mathcal{T} di dimensioni $2 \times 2 \times 2$

$$\mathcal{T}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{T}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

I JGVec di \mathcal{T} sono autovettori di $\mathcal{T}_1^{-1}\mathcal{T}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, che sono

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{3}i \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \sqrt{3}i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Questi sono autovettori complessi, e quindi \mathcal{T} ha rango 2 su $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Controesempio

Sia \mathcal{T} di dimensioni $2 \times 2 \times 2$

$$\mathcal{T}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{T}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

I JGEvec di \mathcal{T} sono autovettori di $\mathcal{T}_1^{-1}\mathcal{T}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, che sono

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{3}i \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \sqrt{3}i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Questi sono autovettori complessi, e quindi \mathcal{T} ha rango 2 su $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Tuttavia, non c'è una base di JGEvec reali, e di conseguenza \mathcal{T} ha rango (almeno) 3 su $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

Definizione

T è *semplice* se

1. T è SLIMI
2. $P_T(\gamma)$ si fattorizza come prodotto di R termini distinti.

Definizione

\mathcal{T} è *semplice* se

1. \mathcal{T} è SLIMI
2. $P_{\mathcal{T}}(\gamma)$ si fattorizza come prodotto di R termini distinti.

Proposizione

Se \mathcal{T} è semplice, $\text{mlR}(\mathcal{T}) = R$ e $\text{bR}(\mathcal{T}) = R$, allora \mathcal{T} ha rango R .

Definizione

\mathcal{T} è *semplice* se

1. \mathcal{T} è SLIMI
2. $P_{\mathcal{T}}(\gamma)$ si fattorizza come prodotto di R termini distinti.

Proposizione

Se \mathcal{T} è semplice, $\text{mlR}(\mathcal{T}) = R$ e $\text{bR}(\mathcal{T}) = R$, allora \mathcal{T} ha rango R .

Corollario

Se \mathcal{T} è SLIMI, $\text{mlR}(\mathcal{T}) = R$, $\text{bR}(\mathcal{T}) = R$ ma $\text{rank}(\mathcal{T}) > R$, allora c'è un autovalore difettivo, ovvero λ tale che

$$\text{am}(\lambda) > \text{gm}(\lambda) \geq 1$$

Proposizione

Se \mathcal{T} è semplice, $\text{mlR}(\mathcal{T}) = R$ e $\text{bR}(\mathcal{T}) = R$, allora \mathcal{T} ha rango R .

Dimostrazione.

Essendo \mathcal{T} semplice, i suoi JGEval algebrici sono tutti distinti e sono in totale R . Poiché \mathcal{T} ha $\text{bR}(\mathcal{T}) = R$, ogni JGEval algebrico è anche geometrico.

Quindi \mathcal{T} ha R JGEvec, che formano una base. Per il Teorema, \mathcal{T} ha rango R .

Esistenza di una miglior approssimazione di rango R in un intorno

Introduzione

JGE problem

CPD e rango R

ϵ -Intorno

Algoritmo CPDQZ

Esperimenti

Abbiamo ottenuto risultati su tensori $\mathcal{T} \in \mathbb{F}^{R \times R \times K}$. Ma cosa succede al tensore originale $\mathcal{M} \in \mathbb{F}^{l_1 \times l_2 \times l_3}$?

Proposizione

Siano $\mathcal{M}, \tilde{\mathcal{M}} \in \mathbb{F}^{l_1 \times \dots \times l_D}$, con $\text{mlR}(\mathcal{M}) = (R_1, \dots, R_D)$ e $\text{mlR}(\tilde{\mathcal{M}}) = (\tilde{R}_1, \dots, \tilde{R}_D)$. Sia $R_i^* = \max(R_i, \tilde{R}_i)$.

Allora esistono delle compressioni ortogonali $\mathcal{T}, \tilde{\mathcal{T}} \in \mathbb{F}^{R_1^*, \dots, R_D^*}$ di $\mathcal{M}, \tilde{\mathcal{M}}$ tali che:

$$\|\mathcal{T} - \tilde{\mathcal{T}}\|_F \leq \|\mathcal{M} - \tilde{\mathcal{M}}\|_F$$

Teorema

Sia $\mathcal{M} \in \mathbb{F}^{l_1 \times l_2 \times l_3}$, con $\text{mlR}(\mathcal{M}) = (R, R, K)$, $\text{rank}(\mathcal{M}) = R$, e sia \mathcal{T} una compressione ortogonale di \mathcal{M} .

Se ogni tensore in una palla di raggio ε intorno a \mathcal{T} è semplice, allora

- ▶ Ogni tensore nella palla di raggio $\varepsilon/2$ intorno a \mathcal{M} ha una miglior approssimazione di rango R . Essa è unica, tranne che per un insieme di tensori di misura nulla.
- ▶ Ogni tensore nella palla di raggio ε intorno a \mathcal{M} ha un'unica CPD.
- ▶ Non esistono tensori $\tilde{\mathcal{M}}$ a distanza $< \varepsilon$ da \mathcal{M} , con $\text{bR}(\tilde{\mathcal{M}}) = R$ e $\text{rank}(\tilde{\mathcal{M}}) > R$.

Stimare ε

Definizione

Dati due vettori $v, w \in \mathbb{F}^K$, sia θ l'angolo tra di loro. La *distanza cordale* tra v e w è:

$$\chi(v, w) = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\|_2 \cdot \|w\|_2} = \sin(\theta)$$

Teorema

Siano $\mathcal{T} \in \mathbb{F}^{R \times R \times 2}$, con $\text{rank}(\mathcal{T}) = R$. Sia $[A, B, C]$ una CPD di \mathcal{T} , scalata in modo che le colonne di C abbiano norma 1.

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \sigma_{\min}(A) \sigma_{\min}(B) \min_{k \neq j} \chi(C(:, k), C(:, j))$$

I tensori in una palla di raggio ε intorno a \mathcal{T} sono semplici e hanno rango R .

Teorema

Sia $\mathcal{M} \in \mathbb{F}^{l_1 \times l_2 \times l_3}$, con $\text{mlR}(\mathcal{M}) = (R, R, K)$, $\text{rank}(\mathcal{M}) = R$, e sia \mathcal{T} una compressione ortogonale di \mathcal{M} .

Dividiamo le slices di \mathcal{T} a coppie, e sia ε_I la stima del teorema precedente per il tensore $(\mathcal{T}_{2I-1}, \mathcal{T}_{2I})$ in $\mathbb{F}^{R \times R \times 2}$.

Sia $\varepsilon = \sqrt{\sum_I \varepsilon_I}$, allora

- ▶ Ogni tensore a distanza $< \varepsilon$ da \mathcal{T} è semplice.

Algoritmo CPDQZ

Introduzione

JGE problem

CPD e rango R

ε -Intorno

Algoritmo CPDQZ

Esperimenti

Prendo le slices $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}(:, :, 1, 1, \dots, 1)$ e $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}(:, :, 2, 1, \dots, 1)$

Proposizione

Siano U_1 e U_2 i primi due fattori della CPD di \mathcal{T} , e supponiamo siano invertibili.

Se $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ sono triangolari superiori, allora (a meno di riordinare), U_1 è triangolare superiore, e U_2 è triangolare inferiore.

Prendo le slices $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}(:, :, 1, 1, \dots, 1)$ e $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}(:, :, 2, 1, \dots, 1)$

Proposizione

Siamo U_1 e U_2 i primi due fattori della CPD di \mathcal{T} , e supponiamo siano invertibili.

Se $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ sono triangolari superiori, allora (a meno di riordinare), U_1 è triangolare superiore, e U_2 è triangolare inferiore.

Dim.

$$\mathcal{T}(j_1, \dots, j_d) = \sum_{l=1}^R U_1(j_1, l) U_2(j_2, l) \dots U_d(j_d, l)$$

$$\mathcal{T}(:, \dots, :) = \sum_{l=1}^R U_1(:, l) \otimes U_2(:, l) \otimes \dots \otimes U_d(:, l)$$

In particolare $\mathcal{T}_1 = \sum_{l=1}^R U_1(:, l) \otimes U_2(:, l) \cdot c_l = U_1 D_1 U_2^T$ per

un'opportuna D_1 diagonale, e analogamente $\mathcal{T}_2 = U_1 D_2 U_2^T$.

Dim. Sappiamo che $\mathcal{T}_1 = U_1 D_1 U_2^\top$.

Allora $\mathcal{T}_1 U_2^{-\top} = U_1 D_1$ e $\mathcal{T}_2 U_2^{-\top} = U_1 D_2$.

Per la coppia $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$, le colonne di $U_2^{-\top}$ sono i JGEvec (x_j) , con JGEval $D_1, D_2 (\lambda_j)$ e con le colonne di U_1 i vettori y_j .

Dim. Sappiamo che $\mathcal{T}_1 = U_1 D_1 U_2^\top$.

Allora $\mathcal{T}_1 U_2^{-\top} = U_1 D_1$ e $\mathcal{T}_2 U_2^{-\top} = U_1 D_2$.

Per la coppia $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$, le colonne di $U_2^{-\top}$ sono i JGEval (x_j) , con JGEval $D_1, D_2 (\lambda_j)$ e con le colonne di U_1 i vettori y_j .

$\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ sono triangolari superiori, per cui la base canonica è a bandiera, e da essa è possibile estrarre una base a bandiera di JGEval.

Riordinando opportunamente i JGEval, si ottiene proprio $U_2^{-\top}$, che quindi è triangolare superiore.

Essendo D_1 diagonale, anche U_1 è triangolare superiore.

Proposizione

Se U_1 è triangolare superiore, U_2 triangolare inferiore, allora tutte le slices $\mathcal{T}_{:, :, j_3, \dots, j_d}$ sono triangolari superiori.

$$\mathcal{T}(:, :, j_3, \dots, j_d) = U_1 \cdot D_{j_3, \dots, j_d} \cdot U_2^\top$$

Proposizione

Se U_1 è triangolare superiore, U_2 triangolare inferiore, allora tutte le slices $\mathcal{T}_{:, :, j_3, \dots, j_d}$ sono triangolari superiori.

$$\mathcal{T}(:, :, j_3, \dots, j_d) = U_1 \cdot D_{j_3, \dots, j_d} \cdot U_2^\top$$

Guardiamo le entrate diagonali:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(k, k, j_3, \dots, j_d) &= \sum_{l=1}^R U_1(k, l) U_2(k, l) \dots U_d(j_d, l) = \\ &= U_1(k, k) U_2(k, k) U_3(j_3, k) \dots U_d(j_d, k) \end{aligned}$$

Proposizione

Se U_1 è triangolare superiore, U_2 triangolare inferiore, allora tutte le slices $\mathcal{T}_{(:, :, j_3, \dots, j_d)}$ sono triangolari superiori.

$$\mathcal{T}(:, :, j_3, \dots, j_d) = U_1 \cdot D_{j_3, \dots, j_d} \cdot U_2^\top$$

Guardiamo le entrate diagonali:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(k, k, j_3, \dots, j_d) &= \sum_{l=1}^R U_1(k, l) U_2(k, l) \dots U_d(j_d, l) = \\ &= U_1(k, k) U_2(k, k) U_3(j_3, k) \dots U_d(j_d, k) \end{aligned}$$

Scelgo un indice j_h , e tutti gli altri $j_i = 1$.

$$\mathcal{T}(k, k, 1, \dots, j_h, \dots, 1) = U_h(j_h, k) \cdot U_1(k, k) U_2(k, k) U_3(1, k) \dots U_d(1, k)$$

A meno di riscalare, $U_h(j_h, k) = \mathcal{T}(k, k, 1, \dots, j_h, \dots, 1)$.

Unfolding generico. Divido il tensore $R_1 \times R_2 \times \dots \times R_d$ in una matrice $(R_1 R_2 \dots R_k) \times (R_{k+1} \dots R_d)$.

$$\mathcal{T}_{(d, \dots, k+1); (k, \dots, 1)} = (U_d \odot \dots \odot U_{k+1})(U_k \odot U_1)^\top$$

Unfolding generico. Divido il tensore $R_1 \times R_2 \times \dots \times R_d$ in una matrice $(R_1 R_2 \dots R_k) \times (R_{k+1} \dots R_d)$.

$$\mathcal{T}_{(d, \dots, k+1); (k, \dots, 1)} = (U_d \odot \dots \odot U_{k+1})(U_k \odot U_1)^\top$$

Cambio delle matrici CPD per mode-multiplication.

Se $\mathcal{T}' = \mathcal{T} \times_1 Q \times_2 Z^\top$, allora $[U_1, U_2, U_3, \dots, U_d]$ la CPD di \mathcal{T} , diventa

$$[QU_1, Z^\top U_2, U_3, \dots, U_d] \quad \text{CPD di } \mathcal{T}'$$

Algoritmo CPDQZ

1. Input: tensore \mathcal{T} di rango R , con CPD $[U_1, \dots, U_d]$ (ignota).

Algoritmo CPDQZ

1. Input: tensore \mathcal{T} di rango R , con CPD $[U_1, \dots, U_d]$ (ignota).
2. Calcolo una fattorizzazione QZ delle slices $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$, in modo che $Q\mathcal{T}_1Z, Q\mathcal{T}_2Z$ siano triangolari superiori.

Algoritmo CPDQZ

1. Input: tensore \mathcal{T} di rango R , con CPD $[U_1, \dots, U_d]$ (ignota).
2. Calcolo una fattorizzazione QZ delle slices $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$, in modo che $Q\mathcal{T}_1Z, Q\mathcal{T}_2Z$ siano triangolari superiori.
3. $\mathcal{T}' = \mathcal{T} \times_1 Q \times_2 Z^\top$ ha tutte le slices frontali triangolari superiori. La CPD di \mathcal{T}' ha $QU_1, Z^\top U_2$.

Algoritmo CPDQZ

1. Input: tensore \mathcal{T} di rango R , con CPD $[U_1, \dots, U_d]$ (ignota).
2. Calcolo una fattorizzazione QZ delle slices $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$, in modo che $Q\mathcal{T}_1Z, Q\mathcal{T}_2Z$ siano triangolari superiori.
3. $\mathcal{T}' = \mathcal{T} \times_1 Q \times_2 Z^\top$ ha tutte le slices frontali triangolari superiori. La CPD di \mathcal{T}' ha $QU_1, Z^\top U_2$.
4. Per $3 \leq h \leq d$, calcolo $U_h(j_h, k) = \mathcal{T}'(k, k, 1, \dots, j_h, \dots, 1)$.

Algoritmo CPDQZ

1. Input: tensore \mathcal{T} di rango R , con CPD $[U_1, \dots, U_d]$ (ignota).
2. Calcolo una fattorizzazione QZ delle slices $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$, in modo che $Q\mathcal{T}_1Z, Q\mathcal{T}_2Z$ siano triangolari superiori.
3. $\mathcal{T}' = \mathcal{T} \times_1 Q \times_2 Z^\top$ ha tutte le slices frontali triangolari superiori. La CPD di \mathcal{T}' ha $QU_1, Z^\top U_2$.
4. Per $3 \leq h \leq d$, calcolo $U_h(j_h, k) = \mathcal{T}'(k, k, 1, \dots, j_h, \dots, 1)$.
5. $\mathcal{T}'_{(d, d-1, \dots, 3); (2, 1)} = (U_d \odot \dots \odot U_3)(U_2 \odot U_1)^\top$ di taglie $M \times R^2 = (M \times R)(R \times R^2)$.

Algoritmo CPDQZ

1. Input: tensore \mathcal{T} di rango R , con CPD $[U_1, \dots, U_d]$ (ignota).
2. Calcolo una fattorizzazione QZ delle slices $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$, in modo che $Q\mathcal{T}_1Z, Q\mathcal{T}_2Z$ siano triangolari superiori.
3. $\mathcal{T}' = \mathcal{T} \times_1 Q \times_2 Z^\top$ ha tutte le slices frontali triangolari superiori. La CPD di \mathcal{T}' ha $QU_1, Z^\top U_2$.
4. Per $3 \leq h \leq d$, calcolo $U_h(j_h, k) = \mathcal{T}'(k, k, 1, \dots, j_h, \dots, 1)$.
5. $\mathcal{T}'_{(d, d-1, \dots, 3); (2, 1)} = (U_d \odot \dots \odot U_3)(U_2 \odot U_1)^\top$ di taglie $M \times R^2 = (M \times R)(R \times R^2)$.
6. Risolvo il sistema per trovare $U_2 \odot U_1$.

Algoritmo CPDQZ

1. Input: tensore \mathcal{T} di rango R , con CPD $[U_1, \dots, U_d]$ (ignota).
2. Calcolo una fattorizzazione QZ delle slices $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$, in modo che $Q\mathcal{T}_1Z, Q\mathcal{T}_2Z$ siano triangolari superiori.
3. $\mathcal{T}' = \mathcal{T} \times_1 Q \times_2 Z^\top$ ha tutte le slices frontali triangolari superiori. La CPD di \mathcal{T}' ha $QU_1, Z^\top U_2$.
4. Per $3 \leq h \leq d$, calcolo $U_h(j_h, k) = \mathcal{T}'(k, k, 1, \dots, j_h, \dots, 1)$.
5. $\mathcal{T}'_{(d, d-1, \dots, 3); (2, 1)} = (U_d \odot \dots \odot U_3)(U_2 \odot U_1)^\top$ di taglie $M \times R^2 = (M \times R)(R \times R^2)$.
6. Risolvo il sistema per trovare $U_2 \odot U_1$.
7. Ogni colonna di $U_2 \odot U_1$ è un tensore di rango 1. Trovando un'approssimazione di rango 1, ricavo U_1 e U_2 .

Algoritmo CPDQZ - variante 2

1. Input: tensore \mathcal{T} di rango R , con CPD $[U_1, \dots, U_d]$ (ignota).
2. Calcolo una fattorizzazione QZ delle slices $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$, in modo che $Q\mathcal{T}_1Z, Q\mathcal{T}_2Z$ siano triangolari superiori.
3. $\mathcal{T}' = \mathcal{T} \times_1 Q \times_2 Z^\top$ ha tutte le slices frontali triangolari superiori. La CPD di \mathcal{T}' ha $QU_1, Z^\top U_2$.
4. Usando $\mathcal{T}'(k, k, :, :, \dots, :) = U_d(:, k) \odot \dots \odot U_3(:, k)$ (impongo che U_1, U_2 abbiano diagonale di 1). Ricavo $U_h(:, k)$ con un'approssimazione di rango 1 di $\mathcal{T}'(k, k, :)$.
5. $\mathcal{T}'_{(d, d-1, \dots, 3); (2, 1)} = (U_d \odot \dots \odot U_3)(U_2 \odot U_1)^\top$ di taglie $M \times R^2 = (M \times R)(R \times R^2)$.
6. Risolvo il sistema per trovare $U_2 \odot U_1$.
7. Ogni colonna di $U_2 \odot U_1$ è un tensore di rango 1. Trovando un'approssimazione di rango 1, ricavo U_1 e U_2 .

Algoritmo CPDQZ - variante CPDQZS

1. Input: tensore \mathcal{T} di rango R , con CPD $[U_1, \dots, U_d]$ (ignota).
Suppongo $R_d = R$ e U_d invertibile
2. Calcolo una fattorizzazione QZ delle slices $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$, in modo che $Q\mathcal{T}_1Z, Q\mathcal{T}_2Z$ siano triangolari superiori.
3. $\mathcal{T}' = \mathcal{T} \times_1 Q \times_2 Z^\top$ ha tutte le slices frontali triangolari superiori. La CPD di \mathcal{T}' ha $QU_1, Z^\top U_2$.
4. Per l'indice d , calcolo $U_d(j_d, k) = \mathcal{T}'(k, k, 1, \dots, j_d)$.
5. Considero l'unfolding

$$\mathcal{T}'_{(d-1, d-1, \dots, 3, 2, 1); (d)} = (U_{d-1} \odot \dots \odot U_1)(U_d)^\top.$$
6. Risolvo il sistema per trovare $U_{d-1} \odot \dots \odot U_1$.
7. Ogni colonna di $U_{d-1} \odot \dots \odot U_1$ è un tensore di rango 1.
Trovando un'approssimazione di rango 1, ricavo U_{d-1}, \dots, U_1 .

Esperimenti

Introduzione

JGE problem

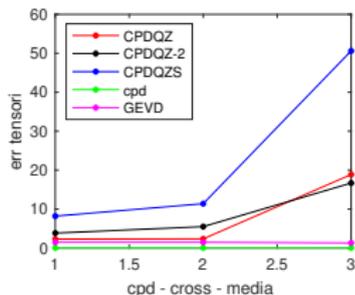
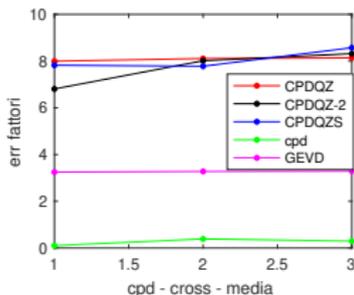
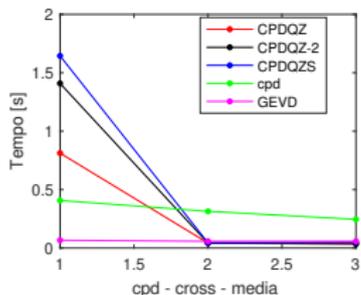
CPD e rango R

ε -Intorno

Algoritmo CPDQZ

Esperimenti

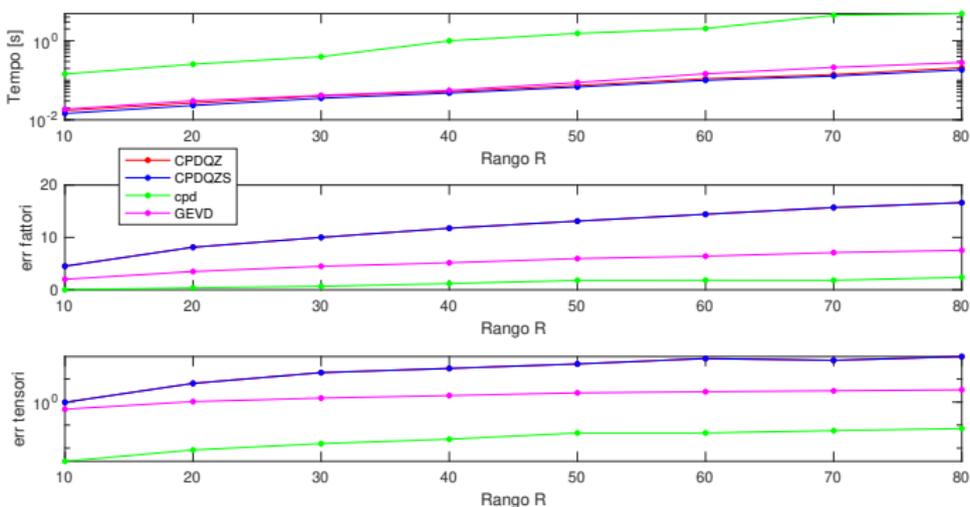
Esperimento 1



Tensori $R \times R \times R \times R$, $R = 20$, rango R , con perturbazione gaussiana 10^{-4} . Cambia la subroutine utilizzata per calcolare la decomposizione di rango 1: cpd, cross approximation o media.

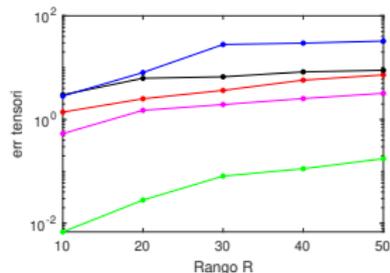
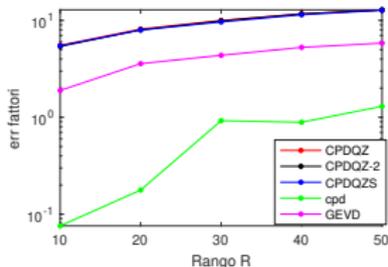
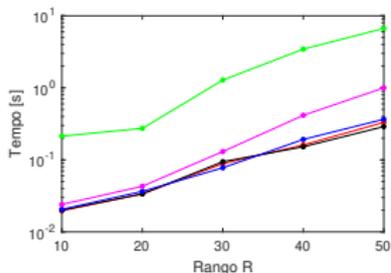
È rappresentata la media su $n = 10$ esperimenti.

Esperimento 2



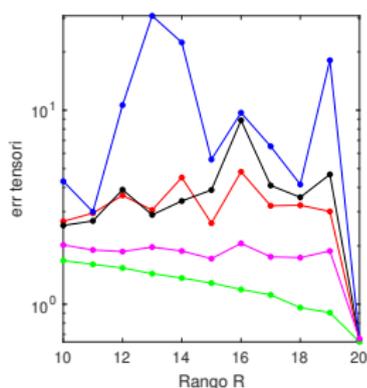
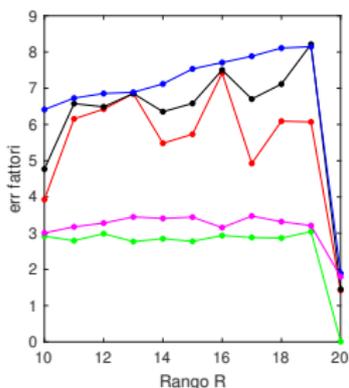
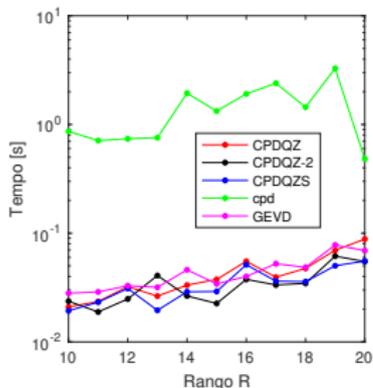
Tensori $R \times R \times R$, di rango $R \in [10, 80]$, con perturbazione gaussiana di norma 10^{-4} . Grafici di tempo, errore delle matrici fattore, e dell'approssimazione del tensore. È rappresentata la media su $n = 10$ esperimenti.

Esperimento 3



Tensori $R \times R \times K \times R$, di rango $R \in [10, 50]$ e $K = R/2$, con perturbazione gaussiana di norma 10^{-4} . Grafici di tempo, errore delle matrici fattore, e dell'approssimazione del tensore. È rappresentata la media su $n = 10$ esperimenti.

Esperimento 4



\mathcal{M} tensore $N \times N \times N \times N$ di rango $R' = 20$, $N = 80$, con perturbazione gaussiana di norma 10^{-4} . \mathcal{M} viene compresso a \mathcal{T} tensore $R \times \dots \times R$, con $R < R'$, e vengono applicati gli algoritmi per trovare una CPD di \mathcal{T} . Nel grafico sono mostrate i discostamenti dell'approssimazione CPD trovata da \mathcal{M} in funzione di R , e del tempo impiegato. Per una cpd diretta servono 108 s, mentre per una gev d 11 s.

Grazie per l'attenzione!

Bibliografia

1. ERIC EVERT, LIEVEN DE LATHAUWER, *Guarantees for existence of a best canonical polyadic approximation of a noisy low rank tensor*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., vol. 43, no. 1, 2022, pp. 328–369.
doi.org/10.1137/20M1381046
2. ERIC EVERT, MICHIEL VANDECAPPELLE, LIEVEN DE LATHAUWER *Canonical Polyadic Decomposition via the Generalized Schur Decomposition*, IEEE Signal Process Letters, vol. 29, 2022, pp. 937–941.
doi.org/10.1109/LSP.2022.3156870
3. G.W. STEWART, J. SUN *Matrix Perturbation Theory*, Academic Press, 1990.