

Interpolazione di basso rango di curve spline di bordo

Metodi Numerici per la Grafica

Nikita Deniskin

Università di Pisa

27 Maggio 2021

Problema

Sono dati 4 vertici in \mathbb{R}^d e 4 curve B-spline che li collegano, ovvero si conoscono i punti di controllo e le due basi B-spline $\beta^i(s), \tau^j(t)$.
Trovare una superficie interpolante di basso rango che passi i vertici e per le curve di bordo.

I risultati sono tratti da: Jüttler e Mokriš, “*Low rank interpolation of boundary spline curves*” (2017).

Siano $\beta^i(s), \tau^j(t)$ le due basi B-spline e siano $\mathbf{P}_{ij} \in \mathbb{R}^d$ dei punti di controllo. La superficie prodotto tensore è definita come:

$$\mathbf{p}(s, t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \beta^i(s) \tau^j(t) \mathbf{P}_{ij}$$

Siano $\beta^i(s), \tau^j(t)$ le due basi B-spline e siano $\mathbf{P}_{ij} \in \mathbb{R}^d$ dei punti di controllo. La superficie prodotto tensore è definita come:

$$\mathbf{p}(s, t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \beta^i(s) \tau^j(t) \mathbf{P}_{ij}$$

$$\mathbf{P}_{ij} = (c_{ij}^1, c_{ij}^2, \dots, c_{ij}^d)^\top = \sum_{k=1}^d c_{ij}^k \mathbf{e}_k$$

dove \mathbf{e}_k è il k -esimo vettore della base canonica di \mathbb{R}^d .

Siano $\beta^i(s), \tau^j(t)$ le due basi B-spline e siano $\mathbf{P}_{ij} \in \mathbb{R}^d$ dei punti di controllo. La superficie prodotto tensore è definita come:

$$\mathbf{p}(s, t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \beta^i(s) \tau^j(t) \mathbf{P}_{ij}$$

$$\mathbf{P}_{ij} = (c_{ij}^1, c_{ij}^2, \dots, c_{ij}^d)^\top = \sum_{k=1}^d c_{ij}^k \mathbf{e}_k$$

dove \mathbf{e}_k è il k -esimo vettore della base canonica di \mathbb{R}^d .
Seguiamo la notazione dell'articolo (spostando alcuni indici in alto).

$$\mathbf{p}(s, t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^d c_{ij}^k \beta^i(s) \tau^j(t) \mathbf{e}_k$$

Definiamo il **tensore dei coefficienti** C :

$$C = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^d c_{ij}^k \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_k$$

Distinzione alto-basso: k in alto indica la coordinata spaziale "vera", i, j in basso indicano l'indice del punto e della funzione base B-spline da usare.

Definiamo il **tensore dei coefficienti** C :

$$C = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^d c_{ij}^k \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_k$$

Distinzione alto-basso: k in alto indica la coordinata spaziale "vera", i, j in basso indicano l'indice del punto e della funzione base B-spline da usare.

Il tensore C prende due vettori $\boldsymbol{\beta}(s) = (\beta^1(s), \dots, \beta^m(s))^T$ e $\boldsymbol{\tau}(t) = (\tau^1(t), \dots, \tau^n(t))^T$ e restituisce un vettore in \mathbb{R}^d , ovvero il punto $\boldsymbol{p}(s, t)$ della superficie.

$$\boldsymbol{p}(s, t) = C(\boldsymbol{\beta}(s), \boldsymbol{\tau}(t)) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^d c_{ij}^k \beta^i(s) \tau^j(t) \mathbf{e}_k$$

Rango di un tensore

Supponiamo esistano per ogni $1 \leq r \leq R$, dei vettori $\mathbf{u}^{(r)} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{v}^{(r)} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{w}^{(r)} \in \mathbb{R}^d$ tali che:

$$C = \sum_{r=1}^R \mathbf{u}^{(r)} \otimes \mathbf{v}^{(r)} \otimes \mathbf{w}^{(r)}$$

Rango di un tensore

Supponiamo esistano per ogni $1 \leq r \leq R$, dei vettori $\mathbf{u}^{(r)} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{v}^{(r)} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{w}^{(r)} \in \mathbb{R}^d$ tali che:

$$C = \sum_{r=1}^R \mathbf{u}^{(r)} \otimes \mathbf{v}^{(r)} \otimes \mathbf{w}^{(r)}$$

Ognuno dei termini $\mathbf{u}^{(r)} \otimes \mathbf{v}^{(r)} \otimes \mathbf{w}^{(r)}$ è un tensore puro (ha rango 1).

Rango di un tensore

Supponiamo esistano per ogni $1 \leq r \leq R$, dei vettori $\mathbf{u}^{(r)} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{v}^{(r)} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{w}_{(r)} \in \mathbb{R}^d$ tali che:

$$C = \sum_{r=1}^R \mathbf{u}^{(r)} \otimes \mathbf{v}^{(r)} \otimes \mathbf{w}_{(r)}$$

Ognuno dei termini $\mathbf{u}^{(r)} \otimes \mathbf{v}^{(r)} \otimes \mathbf{w}_{(r)}$ è un tensore puro (ha rango 1).

Il minimo R per cui esiste una tale scomposizione si chiama **rango** di C .

Rango di un tensore

Supponiamo esistano per ogni $1 \leq r \leq R$, dei vettori $\mathbf{u}^{(r)} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{v}^{(r)} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{w}_{(r)} \in \mathbb{R}^d$ tali che:

$$C = \sum_{r=1}^R \mathbf{u}^{(r)} \otimes \mathbf{v}^{(r)} \otimes \mathbf{w}_{(r)}$$

Ognuno dei termini $\mathbf{u}^{(r)} \otimes \mathbf{v}^{(r)} \otimes \mathbf{w}_{(r)}$ è un tensore puro (ha rango 1).

Il minimo R per cui esiste una tale scomposizione si chiama **rango** di C .

Usando la base canonica, è garantita l'esistenza di una scomposizione con $R \leq mnd$.

Rango di un tensore

Supponiamo esistano per ogni $1 \leq r \leq R$, dei vettori $\mathbf{u}^{(r)} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{v}^{(r)} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{w}^{(r)} \in \mathbb{R}^d$ tali che:

$$C = \sum_{r=1}^R \mathbf{u}^{(r)} \otimes \mathbf{v}^{(r)} \otimes \mathbf{w}^{(r)}$$

Ognuno dei termini $\mathbf{u}^{(r)} \otimes \mathbf{v}^{(r)} \otimes \mathbf{w}^{(r)}$ è un tensore puro (ha rango 1).

Il minimo R per cui esiste una tale scomposizione si chiama **rango** di C .

Usando la base canonica, è garantita l'esistenza di una scomposizione con $R \leq mnd$.

Relazione tra i coefficienti c_{ij}^k e i vettori u, v, w :

$$c_{ij}^k = \sum_{r=1}^R u_i^{(r)} v_j^{(r)} w_{(r)}^k$$

Confronto tra le due rappresentazioni

Sia C un tensore di dimensioni $m \times n \times d$. Si può rappresentare in forma piena memorizzando tutte le componenti c_{ij}^k , oppure i vettori $\mathbf{u}^{(r)}$, $\mathbf{v}^{(r)}$, $\mathbf{w}^{(r)}$ della scomposizione:

$$C = \sum_{r=1}^R \mathbf{u}^{(r)} \otimes \mathbf{v}^{(r)} \otimes \mathbf{w}^{(r)}$$

Confronto tra le due rappresentazioni

Sia C un tensore di dimensioni $m \times n \times d$. Si può rappresentare in forma piena memorizzando tutte le componenti c_{ij}^k , oppure i vettori $\mathbf{u}^{(r)}$, $\mathbf{v}^{(r)}$, $\mathbf{w}^{(r)}$ della scomposizione:

$$C = \sum_{r=1}^R \mathbf{u}^{(r)} \otimes \mathbf{v}^{(r)} \otimes \mathbf{w}^{(r)}$$

- Salvare tutte le componenti richiede una memoria $\mathcal{O}(mnd)$, mentre la rappresentazione di rango R richiede salvare R vettori lunghi m, n, d , per un costo totale $\mathcal{O}(R(m + n + d))$.

Confronto tra le due rappresentazioni

Sia C un tensore di dimensioni $m \times n \times d$. Si può rappresentare in forma piena memorizzando tutte le componenti c_{ij}^k , oppure i vettori $\mathbf{u}^{(r)}$, $\mathbf{v}^{(r)}$, $\mathbf{w}^{(r)}$ della scomposizione:

$$C = \sum_{r=1}^R \mathbf{u}^{(r)} \otimes \mathbf{v}^{(r)} \otimes \mathbf{w}^{(r)}$$

- Salvare tutte le componenti richiede una memoria $\mathcal{O}(mnd)$, mentre la rappresentazione di rango R richiede salvare R vettori lunghi m, n, d , per un costo totale $\mathcal{O}(R(m + n + d))$.
- Calcolare il rango di un tensore (e la scomposizione) è un problema difficile (NP completo).

Confronto tra le due rappresentazioni

Valutare la superficie in un punto $\mathbf{p}(s, t) = C(\boldsymbol{\beta}(s), \boldsymbol{\tau}(t))$:

Confronto tra le due rappresentazioni

Valutare la superficie in un punto $\mathbf{p}(s, t) = C(\boldsymbol{\beta}(s), \boldsymbol{\tau}(t))$:

$$C(\boldsymbol{\beta}(s), \boldsymbol{\tau}(t)) = \sum_{r=1}^R \left(\sum_{i=1}^m u_i^{(r)} \beta^i(s) \right) \left(\sum_{j=1}^n v_j^{(r)} \tau^j(t) \right) \left(\sum_{k=1}^d w_{(r)}^k \mathbf{e}_k \right)$$

Confronto tra le due rappresentazioni

Valutare la superficie in un punto $\mathbf{p}(s, t) = C(\boldsymbol{\beta}(s), \boldsymbol{\tau}(t))$:

$$C(\boldsymbol{\beta}(s), \boldsymbol{\tau}(t)) = \sum_{r=1}^R \langle \mathbf{u}^{(r)}, \boldsymbol{\beta}(s) \rangle \cdot \langle \mathbf{v}^{(r)}, \boldsymbol{\tau}(t) \rangle \cdot \mathbf{w}_{(r)}$$

Confronto tra le due rappresentazioni

Valutare la superficie in un punto $\mathbf{p}(s, t) = C(\boldsymbol{\beta}(s), \boldsymbol{\tau}(t))$:

$$C(\boldsymbol{\beta}(s), \boldsymbol{\tau}(t)) = \sum_{r=1}^R \langle \mathbf{u}^{(r)}, \boldsymbol{\beta}(s) \rangle \cdot \langle \mathbf{v}^{(r)}, \boldsymbol{\tau}(t) \rangle \cdot \mathbf{w}_{(r)}$$

Per ogni r , $\sum_{i=1}^m u_i^{(r)} \beta^i(s)$ è una curva B-spline. Serve calcolare $2R$ curve di dimensione 1.

Confronto tra le due rappresentazioni

Valutare la superficie in un punto $\mathbf{p}(s, t) = C(\boldsymbol{\beta}(s), \boldsymbol{\tau}(t))$:

$$C(\boldsymbol{\beta}(s), \boldsymbol{\tau}(t)) = \sum_{r=1}^R \langle \mathbf{u}^{(r)}, \boldsymbol{\beta}(s) \rangle \cdot \langle \mathbf{v}^{(r)}, \boldsymbol{\tau}(t) \rangle \cdot \mathbf{w}_{(r)}$$

Per ogni r , $\sum_{i=1}^m u_i^{(r)} \beta^i(s)$ è una curva B-spline. Serve calcolare $2R$ curve di dimensione 1.

Rappresentazione piena:

$$C(\boldsymbol{\beta}(s), \boldsymbol{\tau}(t)) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^d c_{ij}^k \beta^i(s) \tau^j(t) \mathbf{e}_k$$

Scegliendo le sommatorie in ordine opportuno, viene $d(\delta + 2)$ valutazioni, dove δ è il grado delle B-spline.

Definizione

Il rango di una superficie prodotto tensore $\mathbf{p}(s, t)$, con punti di controllo P_{ij} di coordinate c_{ij}^k , è il rango del relativo tensore dei coefficienti C .

Definizione

Il rango di una superficie prodotto tensore $\mathbf{p}(s, t)$, con punti di controllo P_{ij} di coordinate c_{ij}^k , è il rango del relativo tensore dei coefficienti C .

- **Buona definizione.** Inserire nodi o elevare grado in β o τ non aumenta il rango della superficie. Quindi il rango dipende solo dalla superficie e non dalla scelta delle basi B-spline o dei punti di controllo.

Definizione

Il rango di una superficie prodotto tensore $\mathbf{p}(s, t)$, con punti di controllo P_{ij} di coordinate c_{ij}^k , è il rango del relativo tensore dei coefficienti C .

- **Buona definizione.** Inserire nodi o elevare grado in β o τ non aumenta il rango della superficie. Quindi il rango dipende solo dalla superficie e non dalla scelta delle basi B-spline o dei punti di controllo.
- Il rango di un tensore è invariante per trasformazioni lineari, ma non per trasformazioni affini.

Definizione

Il rango di una superficie prodotto tensore $\mathbf{p}(s, t)$, con punti di controllo P_{ij} di coordinate c_{ij}^k , è il rango del relativo tensore dei coefficienti C .

- **Buona definizione.** Inserire nodi o elevare grado in β o τ non aumenta il rango della superficie. Quindi il rango dipende solo dalla superficie e non dalla scelta delle basi B-spline o dei punti di controllo.
- Il rango di un tensore è invariante per trasformazioni lineari, ma non per trasformazioni affini.
- Applicare una trasformazione affine aumenta il rango del tensore (e della superficie) al massimo di 1.

Definizione

Il rango di una superficie prodotto tensore $\mathbf{p}(s, t)$, con punti di controllo P_{ij} di coordinate c_{ij}^k , è il rango del relativo tensore dei coefficienti C .

- **Buona definizione.** Inserire nodi o elevare grado in β o τ non aumenta il rango della superficie. Quindi il rango dipende solo dalla superficie e non dalla scelta delle basi B-spline o dei punti di controllo.
- Il rango di un tensore è invariante per trasformazioni lineari, ma non per trasformazioni affini.
- Applicare una trasformazione affine aumenta il rango del tensore (e della superficie) al massimo di 1.
- La costruzione dei punti di controllo di dato rango **non** è invariante per affinità. La superficie **non** è invariante per affinità.

Sia $\alpha(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ una trasformazione affine di \mathbb{R}^d .
Sia $\tilde{\mathbf{P}}_{ij} = \alpha(\mathbf{P}_{ij})$. Le sue coordinate sono:

$$\tilde{c}_{ij}^k = \sum_{l=1}^d A_l^k c_{ij}^l + b^k$$

Sia $\alpha(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ una trasformazione affine di \mathbb{R}^d .

Sia $\tilde{\mathbf{P}}_{ij} = \alpha(\mathbf{P}_{ij})$. Le sue coordinate sono:

$$\tilde{c}_{ij}^k = \sum_{l=1}^d A_l^k c_{ij}^l + b^k$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = \sum_{i,j,k} \tilde{c}_{ij}^k \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}^k = \sum_{i,j,k} \left(\sum_{l=1}^d A_l^k c_{ij}^l + b^k \right) \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}^k =$$

Sia $\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ una trasformazione affine di \mathbb{R}^d .

Sia $\tilde{\mathbf{P}}_{ij} = \alpha(\mathbf{P}_{ij})$. Le sue coordinate sono:

$$\tilde{c}_{ij}^k = \sum_{l=1}^d A_l^k c_{ij}^l + b^k$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{C}} &= \sum_{i,j,k} \tilde{c}_{ij}^k \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_k = \sum_{i,j,k} \left(\sum_{l=1}^d A_l^k c_{ij}^l + b^k \right) \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_k = \\ &= \sum_{i,j,k} \left(\sum_{l=1}^d A_l^k c_{ij}^l \right) \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_k + \sum_{i,j,k} b^k \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_k =\end{aligned}$$

Sia $\alpha(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ una trasformazione affine di \mathbb{R}^d .

Sia $\tilde{\mathbf{P}}_{ij} = \alpha(\mathbf{P}_{ij})$. Le sue coordinate sono:

$$\tilde{c}_{ij}^k = \sum_{l=1}^d A_l^k c_{ij}^l + b^k$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{C}} &= \sum_{i,j,k} \tilde{c}_{ij}^k \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_k = \sum_{i,j,k} \left(\sum_{l=1}^d A_l^k c_{ij}^l + b^k \right) \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_k = \\ &= \sum_{i,j,k} \left(\sum_{l=1}^d A_l^k c_{ij}^l \right) \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_k + \sum_{i,j,k} b^k \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_k = \\ &= \sum_{r=1}^R \mathbf{u}^{(r)} \otimes \mathbf{v}^{(r)} \otimes (A \mathbf{w}_{(r)}) + \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \left(\sum_{k=1}^d b^k \mathbf{e}_k \right)\end{aligned}$$

Il rango di \tilde{C} è al massimo $R + 1$. Visto che le trasformazioni affini formano un gruppo, non può essere minore di $R - 1$.
Le possibilità sono: $\text{rango}(\tilde{C}) = R - 1, R, R + 1$.

Il rango di \tilde{C} è al massimo $R + 1$. Visto che le trasformazioni affini formano un gruppo, non può essere minore di $R - 1$.

Le possibilità sono: $\text{rango}(\tilde{C}) = R - 1, R, R + 1$.

Il rango è minore o uguale di R se $\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$ può essere scritto come combinazione lineare di $\{u^{(r)} \otimes v^{(r)}\}$ per $r = 1, \dots, R$.

Il rango di \tilde{C} è al massimo $R + 1$. Visto che le trasformazioni affini formano un gruppo, non può essere minore di $R - 1$.

Le possibilità sono: $\text{rango}(\tilde{C}) = R - 1, R, R + 1$.

Il rango è minore o uguale di R se $\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$ può essere scritto come combinazione lineare di $\{\mathbf{u}^{(r)} \otimes \mathbf{v}^{(r)}\}$ per $r = 1, \dots, R$.

In questo caso, l'ultimo termine $\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \left(\sum_{k=1}^d b^k \mathbf{e}_k \right)$ può essere incorporato nella sommatoria $\sum_{r=1}^R \mathbf{u}^{(r)} \otimes \mathbf{v}^{(r)} \otimes (A \mathbf{w}_{(r)})$.

Costruzione della superficie

Sono dati i punti di controllo del bordo: $c_{i1}^k, c_{in}^k \forall k, i$ e $c_{1j}^k, c_{mj}^k \forall k, j$.

$$\text{Vertici: } \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{p}(0,0) = \mathbf{P}_{11} = \sum_{k=1}^d c_{11}^k \mathbf{e}_k; & \mathbf{p}(0,1) = \mathbf{P}_{1n} = \sum_{k=1}^d c_{1n}^k \mathbf{e}_k \\ \mathbf{p}(1,0) = \mathbf{P}_{m1} = \sum_{k=1}^d c_{m1}^k \mathbf{e}_k; & \mathbf{p}(1,1) = \mathbf{P}_{mn} = \sum_{k=1}^d c_{mn}^k \mathbf{e}_k \end{array} \right.$$

Costruzione della superficie

Sono dati i punti di controllo del bordo: $c_{i1}^k, c_{in}^k \forall k, i$ e $c_{1j}^k, c_{mj}^k \forall k, j$.

$$\text{Vertici: } \begin{cases} \mathbf{p}(0,0) = \mathbf{P}_{11} = \sum_{k=1}^d c_{11}^k \mathbf{e}_k; & \mathbf{p}(0,1) = \mathbf{P}_{1n} = \sum_{k=1}^d c_{1n}^k \mathbf{e}_k \\ \mathbf{p}(1,0) = \mathbf{P}_{m1} = \sum_{k=1}^d c_{m1}^k \mathbf{e}_k; & \mathbf{p}(1,1) = \mathbf{P}_{mn} = \sum_{k=1}^d c_{mn}^k \mathbf{e}_k \end{cases}$$

Definizione

I quattro vertici $\mathbf{p}(0,0)$, $\mathbf{p}(0,1)$, $\mathbf{p}(1,0)$ e $\mathbf{p}(1,1)$ sono *feasible* se per ogni coordinata spaziale k , si ha:

$$\forall 1 \leq k \leq d \quad \det \begin{pmatrix} c_{11}^k & c_{1n}^k \\ c_{m1}^k & c_{mn}^k \end{pmatrix} \neq 0$$

Questa condizione non ha un'interpretazione geometrica immediata.

Lemma

Sia B una matrice $m \times n$ con entrate b_{ij} tali che: $\det \begin{pmatrix} b_{11} & b_{1n} \\ b_{m1} & b_{mn} \end{pmatrix} \neq 0$.

Allora B ha rango 2 se e solo se:

$$b_{ij} = \frac{b_{i1} \cdot \det \begin{pmatrix} b_{1j} & b_{1n} \\ b_{mj} & b_{mn} \end{pmatrix} + b_{in} \cdot \det \begin{pmatrix} b_{11} & b_{1j} \\ b_{m1} & b_{mj} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} b_{11} & b_{1n} \\ b_{m1} & b_{mn} \end{pmatrix}}$$

Lemma

Sia B una matrice $m \times n$ con entrate b_{ij} tali che: $\det \begin{pmatrix} b_{11} & b_{1n} \\ b_{m1} & b_{mn} \end{pmatrix} \neq 0$.

Allora B ha rango 2 se e solo se:

$$b_{ij} = \frac{b_{i1} \cdot \det \begin{pmatrix} b_{1j} & b_{1n} \\ b_{mj} & b_{mn} \end{pmatrix} + b_{in} \cdot \det \begin{pmatrix} b_{11} & b_{1j} \\ b_{m1} & b_{mj} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} b_{11} & b_{1n} \\ b_{m1} & b_{mn} \end{pmatrix}}$$

L'ipotesi implica che la prima e l'ultima colonna sono linearmente indipendenti, da cui $\text{rango}(B) \geq 2$. Imponendo che la j -esima colonna è una combinazione lineare della prima e dell'ultima si ottiene la formula. L'espressione è scritta in modo che dipenda da b_{i1} , b_{in} e b_{1j} , b_{mj} , ovvero gli elementi sul "bordo" della matrice. La applicheremo a $b_{ij} = c_{ij}^k$, separatamente per ogni k .

Algoritmo CR2

Input: coordinate dei punti di controllo c_{ij}^k del bordo: $c_{i1}^k, c_{in}^k \forall i, k$ e $c_{1j}^k, c_{mj}^k \forall j, k$. I quattro vertici $c_{11}^k, c_{1n}^k, c_{m1}^k, c_{mn}^k$ devono essere feasible.

```
for  $k = 1, \dots, d$ 
   $\Delta = \det \begin{pmatrix} c_{11}^k & c_{1n}^k \\ c_{m1}^k & c_{mn}^k \end{pmatrix}$ 
  for  $j = 2, \dots, n - 1$ 
     $\lambda = \frac{1}{\Delta} \det \begin{pmatrix} c_{1j}^k & c_{1n}^k \\ c_{mj}^k & c_{mn}^k \end{pmatrix}, \quad \mu = \frac{1}{\Delta} \det \begin{pmatrix} c_{11}^k & c_{1j}^k \\ c_{m1}^k & c_{mj}^k \end{pmatrix}$ 
    for  $i = 2, \dots, m - 1$ 
       $c_{ij}^k = \lambda c_{i1}^k + \mu c_{in}^k$ 
    end
  end
end
```

Output: tutti i punti di controllo c_{ij}^k .

Proprietà dell'algoritmo CR2I

- La matrice $m \times n$ ottenuta da C fissando k , ha rango al massimo 2. Il **rango** della superficie in \mathbb{R}^d è **al massimo** $2d$.

Proprietà dell'algoritmo CR2I

- La matrice $m \times n$ ottenuta da C fissando k , ha rango al massimo 2. Il **rango** della superficie in \mathbb{R}^d è **al massimo** $2d$.
- **Non-invarianza affine.** L'espressione di c_{ij}^k è rapporto di polinomi di terzo grado e secondo grado, in particolare non è tensoriale e soprattutto non lineare. La superficie ottenuta non è invariante per affinità o trasformazioni lineari.

Proprietà dell'algoritmo CR2I

- La matrice $m \times n$ ottenuta da C fissando k , ha rango al massimo 2. Il **rango** della superficie in \mathbb{R}^d è **al massimo** $2d$.
- **Non-invarianza affine.** L'espressione di c_{ij}^k è rapporto di polinomi di terzo grado e secondo grado, in particolare non è tensoriale e soprattutto non lineare. La superficie ottenuta non è invariante per affinità o trasformazioni lineari.
- Per opportune condizioni sulle curve di bordo, la superficie può essere invariante per alcune trasformazioni affini.

Proprietà dell'algoritmo CR2I

- La matrice $m \times n$ ottenuta da C fissando k , ha rango al massimo 2. Il **rango** della superficie in \mathbb{R}^d è **al massimo** $2d$.
- **Non-invarianza affine.** L'espressione di c_{ij}^k è rapporto di polinomi di terzo grado e secondo grado, in particolare non è tensoriale e soprattutto non lineare. La superficie ottenuta non è invariante per affinità o trasformazioni lineari.
- Per opportune condizioni sulle curve di bordo, la superficie può essere invariante per alcune trasformazioni affini.
- Se i vertici non sono feasible, si può applicare una trasformazione affine semplice (es: rotazione) per permettere di utilizzare l'algoritmo.

Proprietà dell'algoritmo CR2I

- La matrice $m \times n$ ottenuta da C fissando k , ha rango al massimo 2. Il **rango** della superficie in \mathbb{R}^d è **al massimo** $2d$.
- **Non-invarianza affine.** L'espressione di c_{ij}^k è rapporto di polinomi di terzo grado e secondo grado, in particolare non è tensoriale e soprattutto non lineare. La superficie ottenuta non è invariante per affinità o trasformazioni lineari.
- Per opportune condizioni sulle curve di bordo, la superficie può essere invariante per alcune trasformazioni affini.
- Se i vertici non sono feasible, si può applicare una trasformazione affine semplice (es: rotazione) per permettere di utilizzare l'algoritmo.
- **Principio della permanenza.** Restringendo il dominio da $[0, 1]^2$ a $[s_1, s_2] \times [t_1, t_2]$, la superficie è la stessa di quella ottenuta applicando l'algoritmo CR2I a $p(s_1, t_1), \dots, p(s_2, t_2)$ e relative curve di bordo

Proprietà dell'algoritmo CR2I

- La matrice $m \times n$ ottenuta da C fissando k , ha rango al massimo 2. Il **rango** della superficie in \mathbb{R}^d è **al massimo** $2d$.
- **Non-invarianza affine.** L'espressione di c_{ij}^k è rapporto di polinomi di terzo grado e secondo grado, in particolare non è tensoriale e soprattutto non lineare. La superficie ottenuta non è invariante per affinità o trasformazioni lineari.
- Per opportune condizioni sulle curve di bordo, la superficie può essere invariante per alcune trasformazioni affini.
- Se i vertici non sono feasible, si può applicare una trasformazione affine semplice (es: rotazione) per permettere di utilizzare l'algoritmo.
- **Principio della permanenza.** Restringendo il dominio da $[0, 1]^2$ a $[s_1, s_2] \times [t_1, t_2]$, la superficie è la stessa di quella ottenuta applicando l'algoritmo CR2I a $p(s_1, t_1), \dots, p(s_2, t_2)$ e relative curve di bordo
- Se i dati iniziali sono curve da cui si ricavano punti di controllo, l'inserimento di nodi o elevamento di grado delle B-spline porta alla stessa superficie finale.

Restringiamoci al caso $d = 2$.

Supponiamo che i 4 vertici $P_{11}, P_{1n}, P_{m1}, P_{mn}$ siano feasible, non ci siano 3 vertici allineati e le diagonali $P_{11}P_{mn}, P_{1n}P_{m1}$ non siano parallele.

Restringiamoci al caso $d = 2$.

Supponiamo che i 4 vertici $P_{11}, P_{1n}, P_{m1}, P_{mn}$ siano feasible, non ci siano 3 vertici allineati e le diagonali $P_{11}P_{mn}, P_{1n}P_{m1}$ non siano parallele.

Allora esiste una trasformazione affine A che manda i quattro vertici sugli assi cartesiani, e l'intersezione delle diagonali mandata nell'origine.

$$M = \begin{pmatrix} c_{1n}^1 - c_{m1}^1 & c_{11}^1 - c_{mn}^1 \\ c_{1n}^2 - c_{m1}^2 & c_{11}^2 - c_{mn}^2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$A = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & -M_{11} c_{11}^1 - M_{12} c_{11}^2 \\ M_{21} & M_{22} & -M_{11} c_{1n}^1 - M_{12} c_{1n}^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1 Calcolare A in funzione di $c_{11}^k, c_{1n}^k, c_{m1}^k, c_{mn}^k$ con $k = 1, 2$.
- 2 Applicare la trasformazione A a ogni punto di controllo del bordo:

$$(x_{ij}, y_{ij}, 1)^T = A \cdot (c_{ij}^1, c_{ij}^2, 1)^T \quad \text{per } i \in \{1, m\} \text{ e } \forall j; \text{ per } j \in \{1, n\} \text{ e } \forall i.$$

- 3 Calcolare tutti i punti di controllo \tilde{c}_{ij}^k con l'algoritmo CR2I a partire da x_{ij}, y_{ij} .
- 4 Riportare i nuovi punti di controllo tramite la trasformazione inversa.

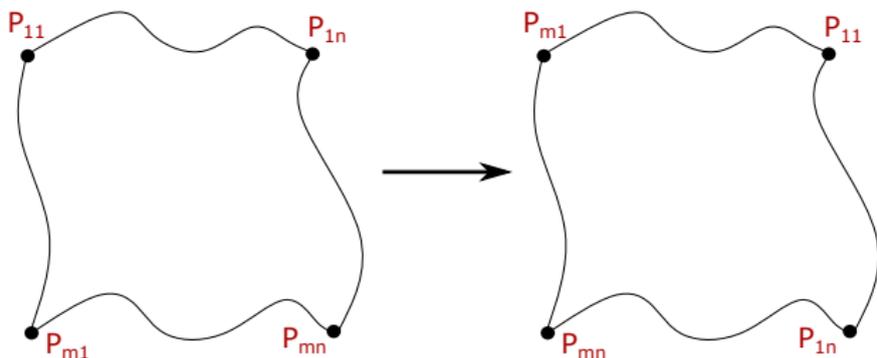
$$(c_{ij}^1, c_{ij}^2, 1)^T = A^{-1} \cdot (\tilde{c}_{ij}^1, \tilde{c}_{ij}^2, 1)^T$$

Proprietà dell'algorithm AR5I

- Essendo $d = 2$, l'algorithm CR2I genera una superficie di rango al massimo 4. La successiva trasformazione affine A^{-1} rende il rango finale al massimo 5.

Proprietà dell'algorithmo AR5I

- Essendo $d = 2$, l'algorithmo CR2I genera una superficie di rango al massimo 4. La successiva trasformazione affine A^{-1} rende il rango finale al massimo 5.
- **Invarianza affine.** La superficie ottenuta è invariante per trasformazioni affini, e per permutazioni cicliche dei quattro vertici (e relativi bordi).



Proprietà dell'algoritmo AR5I

- Essendo $d = 2$, l'algoritmo CR2I genera una superficie di rango al massimo 4. La successiva trasformazione affine A^{-1} rende il rango finale al massimo 5.
- **Invarianza affine.** La superficie ottenuta è invariante per trasformazioni affini, e per permutazioni cicliche dei quattro vertici (e relativi bordi).
- Se i dati iniziali sono curve dalle quali si ricavano punti di controllo, l'inserimento di nodi o elevamento di grado delle B-spline porta alla stessa superficie finale.

Proprietà dell'algoritmo AR5I

- Essendo $d = 2$, l'algoritmo CR2I genera una superficie di rango al massimo 4. La successiva trasformazione affine A^{-1} rende il rango finale al massimo 5.
- **Invarianza affine.** La superficie ottenuta è invariante per trasformazioni affini, e per permutazioni cicliche dei quattro vertici (e relativi bordi).
- Se i dati iniziali sono curve dalle quali si ricavano punti di controllo, l'inserimento di nodi o elevamento di grado delle B-spline porta alla stessa superficie finale.
- L'algoritmo AR5I **non** soddisfa il principio della permanenza.

L'algoritmo si può generalizzare a dimensione d generica. Bisogna scegliere una nuova posizione canonica per i 4 vertici $P_{11}, P_{1n}, P_{m1}, P_{mn}$. Supponiamo che non siano complanari.

L'algoritmo si può generalizzare a dimensione d generica. Bisogna scegliere una nuova posizione canonica per i 4 vertici $P_{11}, P_{1n}, P_{m1}, P_{mn}$. Supponiamo che non siano complanari.

Si prenda un tetraedro regolare, in modo che i suoi vertici A, B, C, D siano feasible. Allora esiste un'affinità che manda $P_{11} \rightarrow A, \dots, P_{m1} \rightarrow D$.

Una volta in posizione canonica, si applica l'algoritmo CR2I che fornisce una superficie di rango $2d$; applicando l'affinità inversa si ottiene rango al massimo $2d + 1$.

Tuttavia in generale le d coordinate dei vertici A, B, C, D saranno non simmetriche, per cui si otterranno superfici diverse permutando i vertici $P_{11} \dots P_{mn}$. Viene mantenuta l'invarianza affine solo per trasformazioni che preservano l'ordine dei vertici.

Tuttavia in generale le d coordinate dei vertici A, B, C, D saranno non simmetriche, per cui si otterranno superfici diverse permutando i vertici $P_{11} \dots P_{mn}$. Viene mantenuta l'invarianza affine solo per trasformazioni che preservano l'ordine dei vertici.

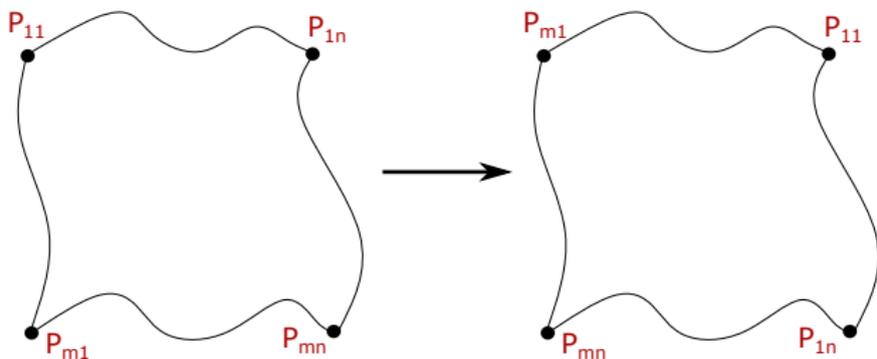
$$f(P_{11}, P_{1n}, P_{m1}, P_{mn}) = f(\alpha(P_{11}), \alpha(P_{1n}), \alpha(P_{m1}), \alpha(P_{mn})) \quad \alpha \text{ affine}$$

$$f(P_{11}, P_{1n}, P_{m1}, P_{mn}) \neq f(P_{1n}, P_{m1}, P_{mn}, P_{11})$$

Tuttavia in generale le d coordinate dei vertici A, B, C, D saranno non simmetriche, per cui si otterranno superfici diverse permutando i vertici $P_{11} \dots P_{mn}$. Viene mantenuta l'invarianza affine solo per trasformazioni che preservano l'ordine dei vertici.

$$f(P_{11}, P_{1n}, P_{m1}, P_{mn}) = f(\alpha(P_{11}), \alpha(P_{1n}), \alpha(P_{m1}), \alpha(P_{mn})) \quad \alpha \text{ affine}$$

$$f(P_{11}, P_{1n}, P_{m1}, P_{mn}) \neq f(P_{1n}, P_{m1}, P_{mn}, P_{11})$$



Problema. Trovare quattro vertici $A, B, C, D \in \mathbb{R}^d$ di coordinate $A = (A^1, \dots, A^k)$ in modo che per ogni trasformazione affine α che permuta i vertici (per esempio $\alpha(A) = B, \dots, \alpha(D) = A$), le coordinate dei punti di controllo c_{ij}^k ottenuti con l'algoritmo CR2I soddisfino:

Problema. Trovare quattro vertici $A, B, C, D \in \mathbb{R}^d$ di coordinate $A = (A^1, \dots, A^k)$ in modo che per ogni trasformazione affine α che permuta i vertici (per esempio $\alpha(A) = B, \dots, \alpha(D) = A$), le coordinate dei punti di controllo c_{ij}^k ottenuti con l'algoritmo CR2I soddisfino:

$$c_{ij}^k = \frac{c_{i1}^k \cdot \det \begin{pmatrix} c_{1j}^k & B^k \\ c_{mj}^k & C^k \end{pmatrix} + c_{in}^k \cdot \det \begin{pmatrix} A^k & c_{1j}^k \\ D^k & c_{mj}^k \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} A^k & B^k \\ D^k & C^k \end{pmatrix}}$$

Problema. Trovare quattro vertici $A, B, C, D \in \mathbb{R}^d$ di coordinate $A = (A^1, \dots, A^k)$ in modo che per ogni trasformazione affine α che permuta i vertici (per esempio $\alpha(A) = B, \dots, \alpha(D) = A$), le coordinate dei punti di controllo c_{ij}^k ottenuti con l'algoritmo CR2I soddisfino:

$$c_{ij}^k = \frac{c_{i1}^k \cdot \det \begin{pmatrix} c_{1j}^k & B^k \\ c_{mj}^k & C^k \end{pmatrix} + c_{in}^k \cdot \det \begin{pmatrix} A^k & c_{1j}^k \\ D^k & c_{mj}^k \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} A^k & B^k \\ D^k & C^k \end{pmatrix}}$$

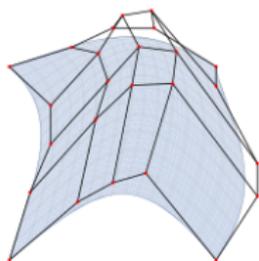
$$\alpha(c_{ij}^k) \stackrel{?}{=} \frac{\alpha(c_{i1}^k) \cdot \det \begin{pmatrix} \alpha(c_{1j}^k) & \alpha(B^k) \\ \alpha(c_{mj}^k) & \alpha(C^k) \end{pmatrix} + \alpha(c_{in}^k) \cdot \det \begin{pmatrix} \alpha(A^k) & \alpha(c_{1j}^k) \\ \alpha(D^k) & \alpha(c_{mj}^k) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} \alpha(A^k) & \alpha(B^k) \\ \alpha(D^k) & \alpha(C^k) \end{pmatrix}}$$

In qualsiasi modo si scelgano i vertici canonici, bisogna distinguere due casi, a seconda se i 4 vertici da interpolare sono complanari oppure no.

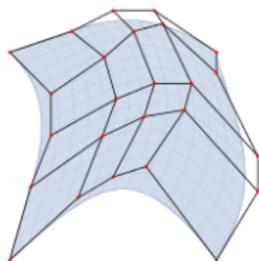
Se si limita l'algoritmo solo al caso non complanare, possono sorgere problemi di continuità quando si parte da quattro vertici quasi complanari.

Confrontiamo alcuni metodi per costruire superfici di interpolazione, per $d = 2$.

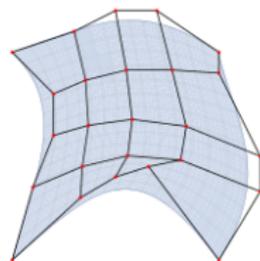
- Metodo Biarmonico
- Interpolazione di Coons
- Laplacian Smoothing
- Algoritmo AR5I
- Algoritmo CR2I, con eventuale rotazione per avere vertici feasible.



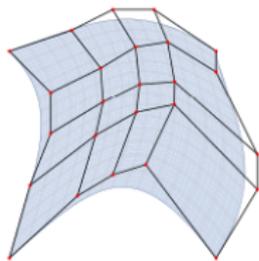
(a) Biharmonic method



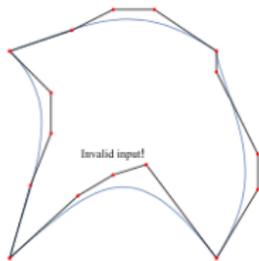
(b) Coons interpolation



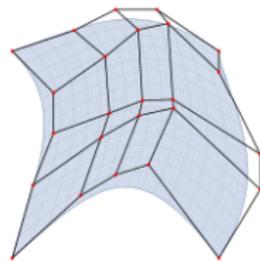
(c) Laplacian smoothing



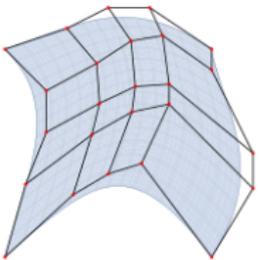
(d) AR5I



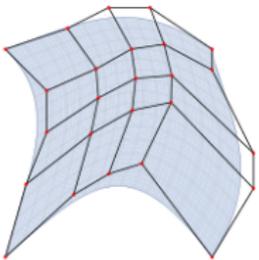
(e) CR2I, $\varphi = 0$



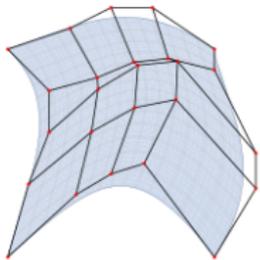
(f) CR2I, $\varphi = \pi/10$



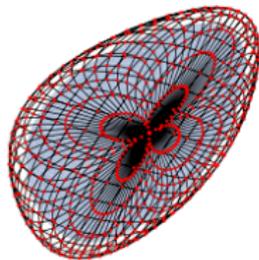
(g) CR2I, $\varphi = 2\pi/10$



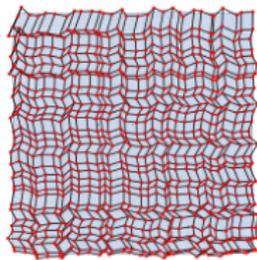
(h) CR2I, $\varphi = 3\pi/10$



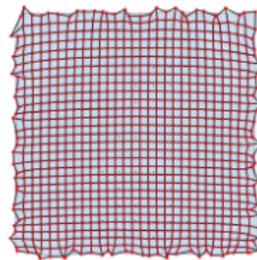
(i) CR2I, $\varphi = 4\pi/10$



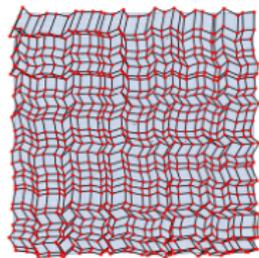
(a) Biharmonic method



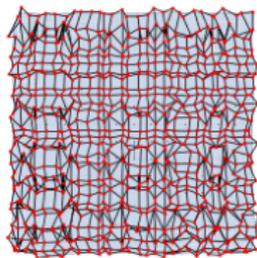
(b) Coons interpolation



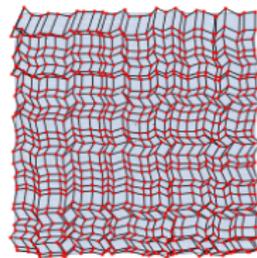
(c) Laplacian smoothing



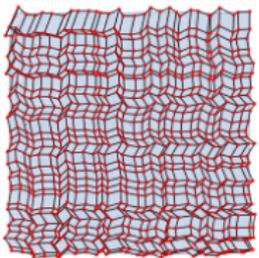
(d) AR5I



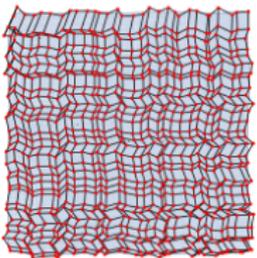
(e) CR2I, $\varphi = 0$



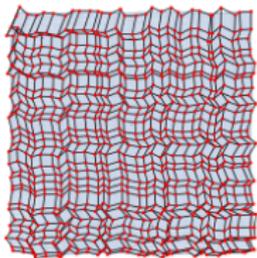
(f) CR2I, $\varphi = \pi/10$



(g) CR2I, $\varphi = 2\pi/10$



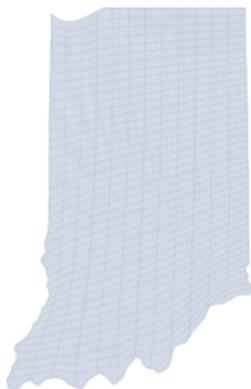
(h) CR2I, $\varphi = 3\pi/10$



(i) CR2I, $\varphi = 4\pi/10$



(a) Coons interpolation



(b) Laplacian smoothing



(c) AR5I



(d) CR2I, $\varphi = 0$



(e) CR2I, $\varphi = \frac{\pi}{6}$



(f) CR2I, $\varphi = \frac{\pi}{3}$

- Il metodo Biarmonico produce risultati generalmente peggiori e più "degeneri".
- In molti casi, AR5I, CR2I e Coons producono delle buone superfici. Però in alcune situazioni, la superficie si autointerseca.
- Il Laplacian Smoothing produce una suddivisione molto regolare; non ci sono autointersezioni.
- CR2I, AR5I e Coons producono superfici di basso rango, mentre quelle ottenute con il Laplacian Smoothing hanno rango elevato.

Grazie per l'attenzione!

Bibliografia

- 1 BERT JÜTTLER, DOMINIK MOKRIŠ, *Low rank interpolation of boundary spline curves*, Computer Aided Geometric Design 55 (2017), pp. 48–68.