

# Misure di centralità in grafi

## Dimostrazione della congettura di Estrada e interlacciamento di misure

*Candidato*  
Nikita Deniskin

*Relatore*  
prof. Michele Benzi

Università di Pisa

25 settembre 2020

Un **grafo**  $\mathcal{G}$  è definito da un insieme finito di vertici  $V$  e da un insieme di archi  $E \subseteq V \times V$ . Per semplicità consideriamo grafi non orientati.

Un **grafo**  $\mathcal{G}$  è definito da un insieme finito di vertici  $V$  e da un insieme di archi  $E \subseteq V \times V$ . Per semplicità consideriamo grafi non orientati.

I grafi sono un modello per molte reti reali: pagine web, traffico aereo, reti sociali, interazioni tra neuroni, ecc.

Un **grafo**  $\mathcal{G}$  è definito da un insieme finito di vertici  $V$  e da un insieme di archi  $E \subseteq V \times V$ . Per semplicità consideriamo grafi non orientati.

I grafi sono un modello per molte reti reali: pagine web, traffico aereo, reti sociali, interazioni tra neuroni, ecc. In tali contesti, spesso serve trovare i vertici “più importanti” di un grafo.

Un **grafo**  $\mathcal{G}$  è definito da un insieme finito di vertici  $V$  e da un insieme di archi  $E \subseteq V \times V$ . Per semplicità consideriamo grafi non orientati.

I grafi sono un modello per molte reti reali: pagine web, traffico aereo, reti sociali, interazioni tra neuroni, ecc. In tali contesti, spesso serve trovare i vertici “più importanti” di un grafo.

### Misura di centralità

Una *misura di centralità* è una funzione  $f : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ , tale che più un vertice  $i$  è “importante” e “ben collegato”, maggiore è  $f(i)$ .

Un **grafo**  $\mathcal{G}$  è definito da un insieme finito di vertici  $V$  e da un insieme di archi  $E \subseteq V \times V$ . Per semplicità consideriamo grafi non orientati.

I grafi sono un modello per molte reti reali: pagine web, traffico aereo, reti sociali, interazioni tra neuroni, ecc. In tali contesti, spesso serve trovare i vertici “più importanti” di un grafo.

## Misura di centralità

Una *misura di centralità* è una funzione  $f : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ , tale che più un vertice  $i$  è “importante” e “ben collegato”, maggiore è  $f(i)$ .

Ci concentriamo su alcune misure di centralità **basate sull'algebra lineare**; per esse mostreremo alcuni risultati originali, in particolare dimostreremo la congettura di Estrada.

Un **grafo**  $\mathcal{G}$  è definito da un insieme finito di vertici  $V$  e da un insieme di archi  $E \subseteq V \times V$ . Per semplicità consideriamo grafi non orientati.

I grafi sono un modello per molte reti reali: pagine web, traffico aereo, reti sociali, interazioni tra neuroni, ecc. In tali contesti, spesso serve trovare i vertici “più importanti” di un grafo.

## Misura di centralità

Una *misura di centralità* è una funzione  $f : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ , tale che più un vertice  $i$  è “importante” e “ben collegato”, maggiore è  $f(i)$ .

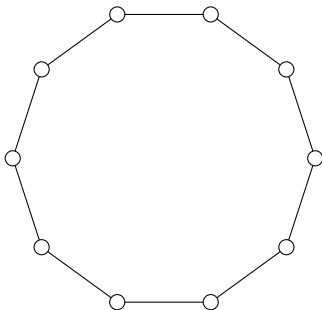
Ci concentriamo su alcune misure di centralità **basate sull'algebra lineare**; per esse mostreremo alcuni risultati originali, in particolare dimostreremo la congettura di Estrada.

*Sotto quali condizioni una misura di centralità assegna lo stesso peso a due vertici “diversi”?*

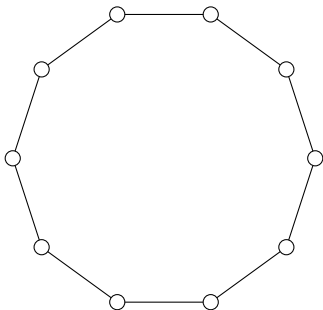
*Sotto quali condizioni una misura di centralità assegna lo stesso peso a due vertici “diversi”?*



*Sotto quali condizioni una misura di centralità assegna lo stesso peso a due vertici "diversi"?*

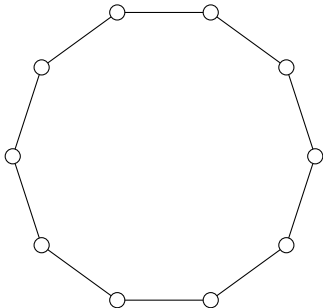


*Sotto quali condizioni una misura di centralità assegna lo stesso peso a due vertici "diversi"?*



Tutti i vertici sono indistinguibili, dunque ogni misura di centralità "naturale" deve assegnare lo stesso peso a ogni vertice.

*Sotto quali condizioni una misura di centralità assegna lo stesso peso a due vertici “diversi”?*



Tutti i vertici sono indistinguibili, dunque ogni misura di centralità “naturale” deve assegnare lo stesso peso a ogni vertice.

Può accadere che una misura di centralità assegni lo stesso peso a due vertici “diversi”.

# Grafi $\iff$ Matrici

A ogni grafo possiamo associare una *matrice di adiacenza*  $A$ , mettendo  $A_{ij} = 1$  se c'è un arco  $i \rightarrow j$ , e 0 altrimenti.

Se il grafo è non orientato allora  $A$  è simmetrica. In particolare, è ortogonalmente diagonalizzabile:  $A = QDQ^T$ .

# Grafi $\iff$ Matrici

A ogni grafo possiamo associare una *matrice di adiacenza*  $A$ , mettendo  $A_{ij} = 1$  se c'è un arco  $i \rightarrow j$ , e 0 altrimenti.

Se il grafo è non orientato allora  $A$  è simmetrica. In particolare, è ortogonalmente diagonalizzabile:  $A = QDQ^T$ .

## Proposizione

Per  $A$  matrice di adiacenza di un grafo  $\mathcal{G}$  si ha:

$$[A^k]_{ij} = \text{numero di cammini da } i \text{ a } j \text{ di lunghezza } k$$

# Funzioni di Matrice

## Definizione

Sia  $A$  matrice diagonalizzabile con autovalori  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ,  $A = QDQ^{-1}$ . Sia  $f$  una funzione definita sullo spettro di  $A$  a valori in  $\mathbb{C}$ . Allora:

$$A = Q D Q^{-1} = Q \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} Q^{-1}$$

Se  $A$  non è diagonalizzabile, la definizione è un po' più complicata.  $f$  inoltre deve rispettare alcune condizioni di regolarità aggiuntive.

# Funzioni di Matrice

## Definizione

Sia  $A$  matrice diagonalizzabile con autovalori  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ,  $A = QDQ^{-1}$ . Sia  $f$  una funzione definita sullo spettro di  $A$  a valori in  $\mathbb{C}$ . Allora:

$$f(A) = Q f(D) Q^{-1} = Q \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & & \\ & f(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(\lambda_n) \end{pmatrix} Q^{-1}$$

Se  $A$  non è diagonalizzabile, la definizione è un po' più complicata.  $f$  inoltre deve rispettare alcune condizioni di regolarità aggiuntive.

## Proposizione

Sia  $A$  matrice con raggio spettrale  $\rho(A)$ .

Se  $f(x)$  è analitica in  $x = 0$  con raggio di convergenza  $R > \rho(A)$ , con sviluppo in serie di Taylor:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots$$

Allora  $f(A)$  si può calcolare come:

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k = c_0 I + c_1 A + c_2 A^2 + c_3 A^3 + \dots$$



Lavoreremo con le seguenti due funzioni di matrice.

La prima è  $f(x) = e^x$ :

$$e^{\beta A} = I + \beta A + \frac{1}{2} \beta^2 A^2 + \frac{1}{3!} \beta^3 A^3 + \dots$$

dove  $\beta > 0$  è un parametro.

Lavoreremo con le seguenti due funzioni di matrice.

La prima è  $f(x) = e^x$ :

$$e^{\beta A} = I + \beta A + \frac{1}{2} \beta^2 A^2 + \frac{1}{3!} \beta^3 A^3 + \dots$$

dove  $\beta > 0$  è un parametro.

La seconda è  $f(x) = \frac{1}{1-\alpha x}$ :

$$(I - \alpha A)^{-1} = I + \alpha A + \alpha^2 A^2 + \alpha^3 A^3 + \dots$$

Serve  $\alpha < \frac{1}{\rho(A)}$ , in questo modo  $\alpha A$  ha raggio spettrale  $< 1$  e vale l'espansione in serie di potenze.

Sia  $i$  un vertice del grafo. Mostriamo qualche esempio di misure di centralità:

- **Degree Centrality**  $DC(i) = \deg(i)$  è il grado di  $i$ .  
Si può calcolare come  $DC(i) = [A^2]_{ii} = [A\mathbb{1}]_i$ .

Sia  $i$  un vertice del grafo. Mostriamo qualche esempio di misure di centralità:

- **Degree Centrality**  $DC(i) = \deg(i)$  è il grado di  $i$ .  
Si può calcolare come  $DC(i) = [A^2]_{ii} = [A\mathbb{1}]_i$ .
- **Eigenvector Centrality** (simile al PageRank): per il teorema di Perron-Frobenius,  $\rho(A)$  è autovalore semplice di  $A$ ; il relativo autovettore  $v$  ha tutte componenti positive.  $EC(i) = v(i)$ .

Sia  $i$  un vertice del grafo. Mostriamo qualche esempio di misure di centralità:

- **Degree Centrality**  $DC(i) = \deg(i)$  è il grado di  $i$ .  
Si può calcolare come  $DC(i) = [A^2]_{ii} = [A\mathbb{1}]_i$ .
- **Eigenvector Centrality** (simile al PageRank): per il teorema di Perron-Frobenius,  $\rho(A)$  è autovalore semplice di  $A$ ; il relativo autovettore  $v$  ha tutte componenti positive.  $EC(i) = v(i)$ .
- **Exponential Subgraph Centrality**  $SC(i, \beta) = [e^{\beta A}]_{ii}$  con parametro  $\beta \in (0, \infty)$ .

Sia  $i$  un vertice del grafo. Mostriamo qualche esempio di misure di centralità:

- **Degree Centrality**  $DC(i) = \deg(i)$  è il grado di  $i$ .  
Si può calcolare come  $DC(i) = [A^2]_{ii} = [A\mathbb{1}]_i$ .
- **Eigenvector Centrality** (simile al PageRank): per il teorema di Perron-Frobenius,  $\rho(A)$  è autovalore semplice di  $A$ ; il relativo autovettore  $v$  ha tutte componenti positive.  $EC(i) = v(i)$ .
- **Exponential Subgraph Centrality**  $SC(i, \beta) = [e^{\beta A}]_{ii}$  con parametro  $\beta \in (0, \infty)$ .
- **Resolvent Subgraph Centrality**  $RC(i, \alpha) = [(I - \alpha A)^{-1}]_{ii}$  con parametro  $\alpha \in (0, \frac{1}{\rho(A)})$ .

Sia  $i$  un vertice del grafo. Mostriamo qualche esempio di misure di centralità:

- **Degree Centrality**  $DC(i) = \deg(i)$  è il grado di  $i$ .  
Si può calcolare come  $DC(i) = [A^2]_{ii} = [A \mathbf{1}]_i$ .
- **Eigenvector Centrality** (simile al PageRank): per il teorema di Perron-Frobenius,  $\rho(A)$  è autovalore semplice di  $A$ ; il relativo autovettore  $v$  ha tutte componenti positive.  $EC(i) = v(i)$ .
- **Exponential Subgraph Centrality**  $SC(i, \beta) = [e^{\beta A}]_{ii}$  con parametro  $\beta \in (0, \infty)$ .
- **Resolvent Subgraph Centrality**  $RC(i, \alpha) = [(I - \alpha A)^{-1}]_{ii}$  con parametro  $\alpha \in (0, \frac{1}{\rho(A)})$ .
- **Katz Centrality**  $KC(i, \alpha) = [(I - \alpha A)^{-1} \mathbf{1}]_i$   
**Total Communicability**  $TC(i, \beta) = [e^{\beta A} \mathbf{1}]_i$

Interpretazione combinatorica di  $SC$  e  $RC$  in termini di cammini sul grafo:

$$e^{\beta A} = I + \beta A + \frac{1}{2} \beta^2 A^2 + \frac{1}{3!} \beta^3 A^3 + \dots$$



Interpretazione combinatorica di  $SC$  e  $RC$  in termini di cammini sul grafo:

$$e^{\beta A} = I + \beta A + \frac{1}{2} \beta^2 A^2 + \frac{1}{3!} \beta^3 A^3 + \dots$$

$$SC(i, \beta) = [e^{\beta A}]_{ii} = 1 + \beta A_{ii} + \frac{1}{2} \beta^2 A_{ii}^2 + \frac{1}{3!} \beta^3 A_{ii}^3 + \dots$$

Interpretazione combinatorica di  $SC$  e  $RC$  in termini di cammini sul grafo:

$$e^{\beta A} = I + \beta A + \frac{1}{2} \beta^2 A^2 + \frac{1}{3!} \beta^3 A^3 + \dots$$

$$SC(i, \beta) = [e^{\beta A}]_{ii} = 1 + \beta A_{ii} + \frac{1}{2} \beta^2 A_{ii}^2 + \frac{1}{3!} \beta^3 A_{ii}^3 + \dots$$

$SC(i, \beta)$  rappresenta una somma pesata dei cammini chiusi che partono e tornano in  $i$ , con coefficiente  $\frac{\beta^k}{k!}$ .

Interpretazione combinatorica di  $SC$  e  $RC$  in termini di cammini sul grafo:

$$e^{\beta A} = I + \beta A + \frac{1}{2} \beta^2 A^2 + \frac{1}{3!} \beta^3 A^3 + \dots$$

$$SC(i, \beta) = [e^{\beta A}]_{ii} = 1 + \beta A_{ii} + \frac{1}{2} \beta^2 A_{ii}^2 + \frac{1}{3!} \beta^3 A_{ii}^3 + \dots$$

$SC(i, \beta)$  rappresenta una somma pesata dei cammini chiusi che partono e tornano in  $i$ , con coefficiente  $\frac{\beta^k}{k!}$ .

Se  $SC(i, \beta)$  è grande, il vertice  $i$  riesce a comunicare meglio con il resto del grafo.

Interpretazione combinatorica di  $SC$  e  $RC$  in termini di cammini sul grafo:

$$e^{\beta A} = I + \beta A + \frac{1}{2} \beta^2 A^2 + \frac{1}{3!} \beta^3 A^3 + \dots$$

$$SC(i, \beta) = [e^{\beta A}]_{ii} = 1 + \beta A_{ii} + \frac{1}{2} \beta^2 A_{ii}^2 + \frac{1}{3!} \beta^3 A_{ii}^3 + \dots$$

$SC(i, \beta)$  rappresenta una somma pesata dei cammini chiusi che partono e tornano in  $i$ , con coefficiente  $\frac{\beta^k}{k!}$ .

Se  $SC(i, \beta)$  è grande, il vertice  $i$  riesce a comunicare meglio con il resto del grafo.

Analogamente per la Resolvent Centrality:

$$RC(i, \alpha) = [(I - \alpha A)^{-1}]_{ii} = I + \alpha A_{ii} + \alpha^2 A_{ii}^2 + \alpha^3 A_{ii}^3 + \dots$$

Qual è il ruolo di  $\alpha$  e  $\beta$  in queste centralità?

Qual è il ruolo di  $\alpha$  e  $\beta$  in queste centralità?

### Teorema (Benzi e Klymko, 2015)

Sia  $\mathcal{G}$  un grafo non orientato, connesso e non bipartito. Allora:

- Per  $\alpha, \beta \rightarrow 0$ , le centralità  $RC(\cdot, \alpha)$  e  $SC(\cdot, \beta)$  si comportano come la Degree Centrality.
- Per  $\alpha \rightarrow \frac{1}{\rho(A)}$ ,  $\beta \rightarrow \infty$ , le centralità  $RC(\cdot, \alpha)$  e  $SC(\cdot, \beta)$  si comportano come l'Eigenvector Centrality.

Qual è il ruolo di  $\alpha$  e  $\beta$  in queste centralità?

### Teorema (Benzi e Klymko, 2015)

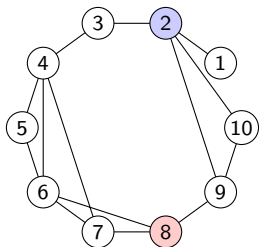
Sia  $\mathcal{G}$  un grafo non orientato, connesso e non bipartito. Allora:

- Per  $\alpha, \beta \rightarrow 0$ , le centralità  $RC(\cdot, \alpha)$  e  $SC(\cdot, \beta)$  si comportano come la Degree Centrality.
- Per  $\alpha \rightarrow \frac{1}{\rho(A)}$ ,  $\beta \rightarrow \infty$ , le centralità  $RC(\cdot, \alpha)$  e  $SC(\cdot, \beta)$  si comportano come l'Eigenvector Centrality.

$\alpha$  e  $\beta$  si possono vedere come delle manopole di “zoom”, per dare più importanza alla struttura locale (Degree) o globale (Eigenvector) del grafo.

$$DC(2) = 4 > 3 = DC(8)$$

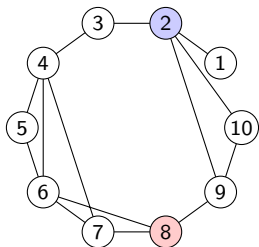
$$EC(2) = 0.29 < 0.34 = EC(8)$$





$$DC(2) = 4 > 3 = DC(8)$$

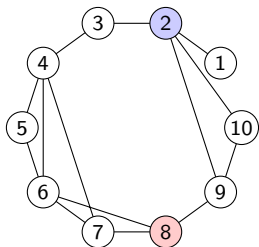
$$EC(2) = 0.29 < 0.34 = EC(8)$$



Per  $\beta$  piccolo,  $SC(2, \beta) > SC(8, \beta)$

$$DC(2) = 4 > 3 = DC(8)$$

$$EC(2) = 0.29 < 0.34 = EC(8)$$

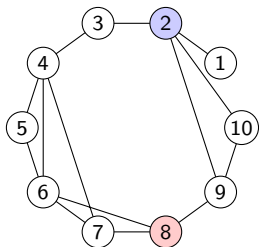


Per  $\beta$  piccolo,  $SC(2, \beta) > SC(8, \beta)$

Per  $\beta$  grande,  $SC(2, \beta) < SC(8, \beta)$

$$DC(2) = 4 > 3 = DC(8)$$

$$EC(2) = 0.29 < 0.34 = EC(8)$$



Per  $\beta$  piccolo,  $SC(2, \beta) > SC(8, \beta)$       Per  $\beta$  grande,  $SC(2, \beta) < SC(8, \beta)$

Per continuità, esiste  $\beta_0 (\approx 2.48)$  tale che  $SC(2, \beta_0) = SC(8, \beta_0)$ .

$$DC(2) = 4 > 3 = DC(8)$$

$$EC(2) = 0.29 < 0.34 = EC(8)$$

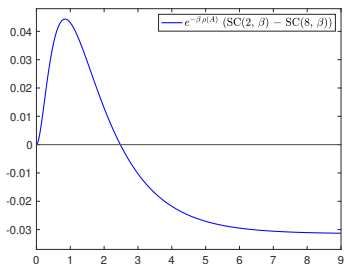
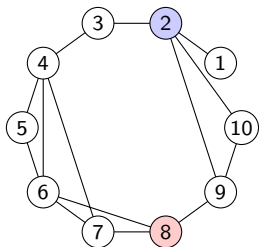


Grafico di  $SC(2, \beta) - SC(8, \beta)$

Per  $\beta$  piccolo,  $SC(2, \beta) > SC(8, \beta)$       Per  $\beta$  grande,  $SC(2, \beta) < SC(8, \beta)$

Per continuità, esiste  $\beta_0 (\approx 2.48)$  tale che  $SC(2, \beta_0) = SC(8, \beta_0)$ .

$$DC(2) = 4 > 3 = DC(8)$$

$$EC(2) = 0.29 < 0.34 = EC(8)$$

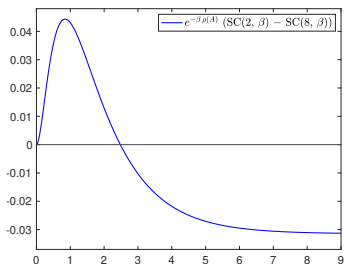
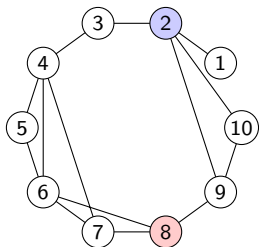


Grafico di  $SC(2, \beta) - SC(8, \beta)$

Per  $\beta$  piccolo,  $SC(2, \beta) > SC(8, \beta)$       Per  $\beta$  grande,  $SC(2, \beta) < SC(8, \beta)$

Per continuità, esiste  $\beta_0 (\approx 2.48)$  tale che  $SC(2, \beta_0) = SC(8, \beta_0)$ .

Chiamiamo questo fenomeno *interlacciamento*.

$$DC(2) = 4 > 3 = DC(8)$$

$$EC(2) = 0.29 < 0.34 = EC(8)$$

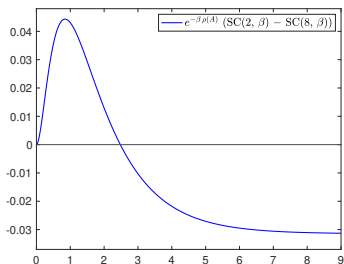
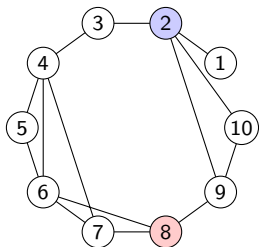


Grafico di  $SC(2, \beta) - SC(8, \beta)$

Per  $\beta$  piccolo,  $SC(2, \beta) > SC(8, \beta)$     Per  $\beta$  grande,  $SC(2, \beta) < SC(8, \beta)$

Per continuità, esiste  $\beta_0 (\approx 2.48)$  tale che  $SC(2, \beta_0) = SC(8, \beta_0)$ .

Chiamiamo questo fenomeno *interlacciamento*.

Esistono esempi di interlacciamento doppio e triplo!

$$DC(2) = 4 > 3 = DC(8)$$

$$EC(2) = 0.29 < 0.34 = EC(8)$$

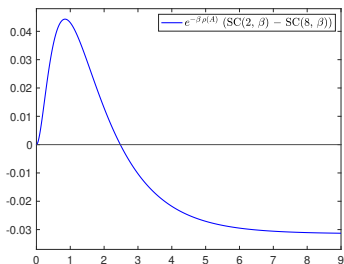
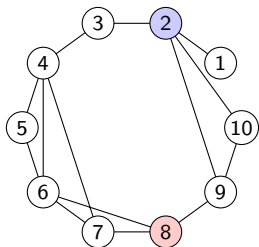


Grafico di  $SC(2, \beta) - SC(8, \beta)$

Per  $\beta$  piccolo,  $SC(2, \beta) > SC(8, \beta)$     Per  $\beta$  grande,  $SC(2, \beta) < SC(8, \beta)$

Per continuità, esiste  $\beta_0 (\approx 2.48)$  tale che  $SC(2, \beta_0) = SC(8, \beta_0)$ .

Chiamiamo questo fenomeno *interlacciamento*.

Esistono esempi di interlacciamento doppio e triplo!

Quando ci può essere un interlacciamento tra due vertici "diversi"?

$$DC(2) = 4 > 3 = DC(8)$$

$$EC(2) = 0.29 < 0.34 = EC(8)$$

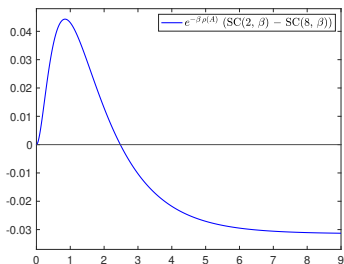
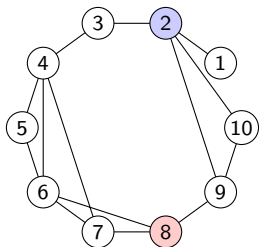


Grafico di  $SC(2, \beta) - SC(8, \beta)$

Per  $\beta$  piccolo,  $SC(2, \beta) > SC(8, \beta)$     Per  $\beta$  grande,  $SC(2, \beta) < SC(8, \beta)$

Per continuità, esiste  $\beta_0 (\approx 2.48)$  tale che  $SC(2, \beta_0) = SC(8, \beta_0)$ .

Chiamiamo questo fenomeno *interlacciamento*.

Esistono esempi di interlacciamento doppio e triplo!

Quando ci può essere un interlacciamento tra due vertici "diversi"?

Quanti ce ne possono essere, al massimo?



Cosa vuol dire che due vertici sono “diversi”?

Cosa vuol dire che due vertici sono “diversi”? Condizione forte:

### Definizione

Due vertici  $i, j$  sono *isomorfi* se esiste un automorfismo del grafo  $\varphi$  tale che  $\varphi(i) = j$ .

Cosa vuol dire che due vertici sono “diversi”? Condizione forte:

### Definizione

Due vertici  $i, j$  sono *isomorfi* se esiste un automorfismo del grafo  $\varphi$  tale che  $\varphi(i) = j$ .

Condizione più debole:

### Definizione

Due vertici  $i, j$  sono *cospettrali* se per ogni  $k \geq 0$ ,  $A_{ii}^k = A_{jj}^k$

Per Hamilton-Cayley, è sufficiente controllare per  $k \leq n - 1$ .

Cosa vuol dire che due vertici sono “diversi”? Condizione forte:

### Definizione

Due vertici  $i, j$  sono *isomorfi* se esiste un automorfismo del grafo  $\varphi$  tale che  $\varphi(i) = j$ .

Condizione più debole:

### Definizione

Due vertici  $i, j$  sono *cospettrali* se per ogni  $k \geq 0$ ,  $A_{ii}^k = A_{jj}^k$

Per Hamilton-Cayley, è sufficiente controllare per  $k \leq n - 1$ .

### Definizione

Un grafo è *walk-regular* se tutti i suoi vertici sono cospettrali tra di loro. È equivalente a chiedere che  $A^k$  abbia diagonale costante per ogni  $k \geq 0$ .

## Proposizione

Se  $i, j$  sono cospettrali, per qualsiasi funzione di matrice  $f$  si ha

$$f(A)_{ii} = f(A)_{jj}$$

## Proposizione

Se  $i, j$  sono cospettrali, per qualsiasi funzione di matrice  $f$  si ha

$$f(A)_{ii} = f(A)_{jj}$$

Segue che la Resolvent e l'Exponential Subgraph Centrality danno sempre lo stesso peso a vertici cospettrali, per qualsiasi  $\alpha, \beta$ .

$$SC(i, \beta) = [e^{\beta A}]_{ii} \quad RC(i, \alpha) = [(I - \alpha A)^{-1}]_{ii}$$

Abbiamo ottenuto la seguente stima per il numero di interlacciamenti:

### Teorema

Sia  $\mathcal{G}$  un grafo non orientato con matrice di adiacenza  $A$ . Sia  $d$  il numero di autovalori distinti di  $A$  e siano  $i, j$  due vertici non cospettrali. Allora:

- Le Resolvent Subgraph Centrality  $RC(i, \cdot)$  e  $RC(j, \cdot)$  possono interlacciarsi al massimo  $d - 1$  volte.
- Le Exponential Subgraph Centrality  $SC(i, \cdot)$  e  $SC(j, \cdot)$  possono interlacciarsi al massimo  $d - 1$  volte.

### *Dimostrazione per la Resolvent Centrality:*

Data  $B$  matrice, si può scrivere l'entrata generica della sua inversa come:

$$B_{ii}^{-1} = \frac{\det(B \setminus \{i, i\})}{\det B}$$

$B \setminus \{i, i\}$  si ottiene da  $B$  rimuovendo l' $i$ -esima riga e l' $i$ -esima colonna.



### *Dimostrazione per la Resolvent Centrality:*

Data  $B$  matrice, si può scrivere l'entrata generica della sua inversa come:

$$B_{ii}^{-1} = \frac{\det(B \setminus \{i, i\})}{\det B}$$

$B \setminus \{i, i\}$  si ottiene da  $B$  rimuovendo l' $i$ -esima riga e l' $i$ -esima colonna.

$$RC(i, \alpha) = [(I - \alpha A)^{-1}]_{ii} = \frac{\det(I - \alpha A \setminus \{i, i\})}{\det(I - \alpha A)}$$

### *Dimostrazione per la Resolvent Centrality:*

Data  $B$  matrice, si può scrivere l'entrata generica della sua inversa come:

$$B_{ii}^{-1} = \frac{\det(B \setminus \{i, i\})}{\det B}$$

$B \setminus \{i, i\}$  si ottiene da  $B$  rimuovendo l' $i$ -esima riga e l' $i$ -esima colonna.

$$RC(i, \alpha) = [(I - \alpha A)^{-1}]_{ii} = \frac{\det(I - \alpha A \setminus \{i, i\})}{\det(I - \alpha A)} = q_i(\alpha)$$

Analogamente sia  $q_j(\alpha) = \det(I - \alpha A \setminus \{j, j\})$ .

### *Dimostrazione per la Resolvent Centrality:*

Data  $B$  matrice, si può scrivere l'entrata generica della sua inversa come:

$$B_{ii}^{-1} = \frac{\det(B \setminus \{i, i\})}{\det B}$$

$B \setminus \{i, i\}$  si ottiene da  $B$  rimuovendo l' $i$ -esima riga e l' $i$ -esima colonna.

$$RC(i, \alpha) = [(I - \alpha A)^{-1}]_{ii} = \frac{\det(I - \alpha A \setminus \{i, i\})}{\det(I - \alpha A)} = q_i(\alpha)$$

Analogamente sia  $q_j(\alpha) = \det(I - \alpha A \setminus \{j, j\})$ .

$q_i(\alpha)$  e  $q_j(\alpha)$  sono polinomi di grado  $n - 1$ ; se  $A$  ha  $d$  autovalori distinti, hanno un fattore di grado  $n - d$  in comune.

### *Dimostrazione per la Resolvent Centrality:*

Data  $B$  matrice, si può scrivere l'entrata generica della sua inversa come:

$$B_{ii}^{-1} = \frac{\det(B \setminus \{i, i\})}{\det B}$$

$B \setminus \{i, i\}$  si ottiene da  $B$  rimuovendo l' $i$ -esima riga e l' $i$ -esima colonna.

$$RC(i, \alpha) = [(I - \alpha A)^{-1}]_{ii} = \frac{\det(I - \alpha A \setminus \{i, i\})}{\det(I - \alpha A)} = q_i(\alpha)$$

Analogamente sia  $q_j(\alpha) = \det(I - \alpha A \setminus \{j, j\})$ .

$q_i(\alpha)$  e  $q_j(\alpha)$  sono polinomi di grado  $n - 1$ ; se  $A$  ha  $d$  autovalori distinti, hanno un fattore di grado  $n - d$  in comune.

Se  $q_i(\alpha) = q_j(\alpha)$  per  $d$  valori distinti di  $\alpha$  allora i polinomi coincidono; si dimostra che questo implica che  $i$  e  $j$  sono cospettrali.

### Dimostrazione per la Resolvent Centrality:

Data  $B$  matrice, si può scrivere l'entrata generica della sua inversa come:

$$B_{ii}^{-1} = \frac{\det(B \setminus \{i, i\})}{\det B}$$

$B \setminus \{i, i\}$  si ottiene da  $B$  rimuovendo l' $i$ -esima riga e l' $i$ -esima colonna.

$$RC(i, \alpha) = [(I - \alpha A)^{-1}]_{ii} = \frac{\det(I - \alpha A \setminus \{i, i\})}{\det(I - \alpha A)} = q_i(\alpha)$$

Analogamente sia  $q_j(\alpha) = \det(I - \alpha A \setminus \{j, j\})$ .

$q_i(\alpha)$  e  $q_j(\alpha)$  sono polinomi di grado  $n - 1$ ; se  $A$  ha  $d$  autovalori distinti, hanno un fattore di grado  $n - d$  in comune.

Se  $q_i(\alpha) = q_j(\alpha)$  per  $d$  valori distinti di  $\alpha$  allora i polinomi coincidono; si dimostra che questo implica che  $i$  e  $j$  sono cospettrali.

Dunque per  $i, j$  non cospettrali, i polinomi possono coincidere al massimo per  $d - 1$  valori, e di conseguenza anche le Resolvent Subgraph Centrality  $RC(i, \alpha)$  e  $RC(j, \alpha)$ .  $\square$

# Conggettura di Estrada

## Conggettura di Estrada

L'Exponential Subgraph Centrality è stata definita da Estrada nel 2005. Uno dei motivi per cui è stata introdotta è che per alcuni grafi regolari varie misure di centralità danno lo stesso peso a *tutti* i vertici, mentre l'Exponential Subgraph Centrality non è costante su tutti i vertici.

# Conggettura di Estrada

L'Exponential Subgraph Centrality è stata definita da Estrada nel 2005. Uno dei motivi per cui è stata introdotta è che per alcuni grafi regolari varie misure di centralità danno lo stesso peso a *tutti* i vertici, mentre l'Exponential Subgraph Centrality non è costante su tutti i vertici.

Per questo, è stata proposta la seguente congettura:

## Conggettura

Sia  $\beta > 0$ . Un grafo è walk-regular  $\iff$  se  $SC(\cdot, \beta)$  assegna lo stesso peso a tutti i vertici.



## Conggettura di Estrada

L'Exponential Subgraph Centrality è stata definita da Estrada nel 2005. Uno dei motivi per cui è stata introdotta è che per alcuni grafi regolari varie misure di centralità danno lo stesso peso a *tutti* i vertici, mentre l'Exponential Subgraph Centrality non è costante su tutti i vertici.

Per questo, è stata proposta la seguente congettura:

### Conggettura

Sia  $\beta > 0$ . Un grafo è walk-regular  $\iff$  se  $SC(\cdot, \beta)$  assegna lo stesso peso a tutti i vertici.

La freccia  $\implies$  è vera per ogni  $\beta$ , perché una funzione di matrice da *sempre* lo stesso valore a tutti i vertici di un grafo walk-regular.

# Conggettura di Estrada

L'Exponential Subgraph Centrality è stata definita da Estrada nel 2005. Uno dei motivi per cui è stata introdotta è che per alcuni grafi regolari varie misure di centralità danno lo stesso peso a *tutti* i vertici, mentre l'Exponential Subgraph Centrality non è costante su tutti i vertici.

Per questo, è stata proposta la seguente congettura:

## Conggettura

Sia  $\beta > 0$ . Un grafo è walk-regular  $\iff$  se  $SC(\cdot, \beta)$  assegna lo stesso peso a tutti i vertici.

La freccia  $\implies$  è vera per ogni  $\beta$ , perché una funzione di matrice da *sempre* lo stesso valore a tutti i vertici di un grafo walk-regular.

La freccia  $\impliedby$  claima che  $SC(\cdot, \beta)$  riesce a distinguere tutti i grafi non walk-regular.

In collaborazione con F. Ballini, abbiamo dimostrato il seguente risultato:

### Teorema

Sia  $\beta > 0$  un numero algebrico. Allora  $SC(i, \beta) = SC(j, \beta)$  se e solo se i vertici  $i$  e  $j$  sono cospettrali.

In collaborazione con F. Ballini, abbiamo dimostrato il seguente risultato:

### Teorema

Sia  $\beta > 0$  un numero algebrico. Allora  $SC(i, \beta) = SC(j, \beta)$  se e solo se i vertici  $i$  e  $j$  sono cospettrali.

Questo implica che la congettura è vera per  $\beta$  algebrico, poiché un grafo è walk-regular se e solo se tutti i vertici sono cospettrali tra di loro.

## Teorema di Lindemann-Weierstrass

Siano  $a_1, \dots, a_d$  algebrici distinti, allora gli esponenziali  $e^{a_h}$  sono linearmente indipendenti su  $\overline{\mathbb{Q}}$ .

Ovvero, presi  $c_1, \dots, c_d$  algebrici (non necessariamente distinti), si ha:

$$c_1 e^{a_1} + \dots + c_d e^{a_d} = 0 \iff c_h = 0 \quad \forall 1 \leq h \leq d$$

## Teorema di Lindemann-Weierstrass

Siano  $a_1, \dots, a_d$  algebrici distinti, allora gli esponenziali  $e^{a_h}$  sono linearmente indipendenti su  $\overline{\mathbb{Q}}$ .

Ovvero, presi  $c_1, \dots, c_d$  algebrici (non necessariamente distinti), si ha:

$$c_1 e^{a_1} + \dots + c_d e^{a_d} = 0 \iff c_h = 0 \quad \forall 1 \leq h \leq d$$

*Dimostrazione proposizione:*

Siano  $\lambda_k, k = 1, \dots, n$  gli autovalori (eventualmente ripetuti) di  $A$ . Da  $f(A) = Q f(D) Q^\top$  otteniamo:

$$f(A)_{ii} = \sum_{k=1}^n Q_{ik} f(\lambda_k) Q_{ki}^\top = \sum_{k=1}^n f(\lambda_k) Q_{ik}^2$$

## Teorema di Lindemann-Weierstrass

Siano  $a_1, \dots, a_d$  algebrici distinti, allora gli esponenziali  $e^{a_h}$  sono linearmente indipendenti su  $\overline{\mathbb{Q}}$ .

Ovvero, presi  $c_1, \dots, c_d$  algebrici (non necessariamente distinti), si ha:

$$c_1 e^{a_1} + \dots + c_d e^{a_d} = 0 \iff c_h = 0 \quad \forall 1 \leq h \leq d$$

*Dimostrazione proposizione:*

Siano  $\lambda_k, k = 1, \dots, n$  gli autovalori (eventualmente ripetuti) di  $A$ . Da  $f(A) = Q f(D) Q^\top$  otteniamo:

$$f(A)_{ii} = \sum_{k=1}^n Q_{ik} f(\lambda_k) Q_{ki}^\top = \sum_{k=1}^n f(\lambda_k) Q_{ik}^2$$

Raggruppiamo autovalori uguali in  $\mu_h$ .  $C_{h,i}$  dipende solo da  $Q$  e non da  $f$ :

$$f(A)_{ii} = \sum_{h=1}^d f(\mu_h) C_{h,i}$$

## Teorema di Lindemann-Weierstrass

Siano  $a_1, \dots, a_d$  algebrici distinti, allora gli esponenziali  $e^{a_h}$  sono linearmente indipendenti su  $\overline{\mathbb{Q}}$ .

Ovvero, presi  $c_1, \dots, c_d$  algebrici (non necessariamente distinti), si ha:

$$c_1 e^{a_1} + \dots + c_d e^{a_d} = 0 \iff c_h = 0 \quad \forall 1 \leq h \leq d$$

*Dimostrazione proposizione:*

Siano  $\lambda_k, k = 1, \dots, n$  gli autovalori (eventualmente ripetuti) di  $A$ . Da  $f(A) = Q f(D) Q^\top$  otteniamo:

$$f(A)_{ii} = \sum_{k=1}^n Q_{ik} f(\lambda_k) Q_{ki}^\top = \sum_{k=1}^n f(\lambda_k) Q_{ik}^2$$

Raggruppiamo autovalori uguali in  $\mu_h$ .  $C_{h,i}$  dipende solo da  $Q$  e non da  $f$ :

$$[e^{\beta A}]_{ii} = \sum_{h=1}^d e^{\beta \mu_h} C_{h,i}$$



Sia  $\beta > 0$  algebrico e presupponiamo che  $SC(i, \beta) = SC(j, \beta)$ , allora

$$0 = [e^{\beta A}]_{ii} - [e^{\beta A}]_{jj}$$

Sia  $\beta > 0$  algebrico e presupponiamo che  $SC(i, \beta) = SC(j, \beta)$ , allora

$$0 = [e^{\beta A}]_{ii} - [e^{\beta A}]_{jj} = \sum_{h=1}^d e^{\beta \mu_h} (C_{h,i} - C_{h,j})$$

Sia  $\beta > 0$  algebrico e presupponiamo che  $SC(i, \beta) = SC(j, \beta)$ , allora

$$0 = [e^{\beta A}]_{ii} - [e^{\beta A}]_{jj} = \sum_{h=1}^d e^{\beta \mu_h} (C_{h,i} - C_{h,j})$$

Il polinomio caratteristico di  $A$  ha coefficienti interi, dunque le sue radici  $\mu_h$  sono algebrici (distinti). Segue che i  $\beta \mu_h$  sono algebrici distinti.

Sia  $\beta > 0$  algebrico e presupponiamo che  $SC(i, \beta) = SC(j, \beta)$ , allora

$$0 = [e^{\beta A}]_{ii} - [e^{\beta A}]_{jj} = \sum_{h=1}^d e^{\beta \mu_h} (C_{h,i} - C_{h,j})$$

Il polinomio caratteristico di  $A$  ha coefficienti interi, dunque le sue radici  $\mu_h$  sono algebrici (distinti). Segue che i  $\beta \mu_h$  sono algebrici distinti. Scegliendo opportunamente  $Q$ , si dimostra che  $C_{h,i}, C_{h,j}$  sono algebrici.

Sia  $\beta > 0$  algebrico e presupponiamo che  $SC(i, \beta) = SC(j, \beta)$ , allora

$$0 = [e^{\beta A}]_{ii} - [e^{\beta A}]_{jj} = \sum_{h=1}^d e^{\beta \mu_h} (C_{h,i} - C_{h,j})$$

Il polinomio caratteristico di  $A$  ha coefficienti interi, dunque le sue radici  $\mu_h$  sono algebrici (distinti). Segue che i  $\beta \mu_h$  sono algebrici distinti. Scegliendo opportunamente  $Q$ , si dimostra che  $C_{h,i}, C_{h,j}$  sono algebrici.

Per il teorema di Lindemann-Weierstrass, necessariamente  $C_{h,i} - C_{h,j} = 0$  per ogni  $h$ .

Sia  $\beta > 0$  algebrico e presupponiamo che  $SC(i, \beta) = SC(j, \beta)$ , allora

$$0 = [e^{\beta A}]_{ii} - [e^{\beta A}]_{jj} = \sum_{h=1}^d e^{\beta \mu_h} (C_{h,i} - C_{h,j})$$

Il polinomio caratteristico di  $A$  ha coefficienti interi, dunque le sue radici  $\mu_h$  sono algebrici (distinti). Segue che i  $\beta \mu_h$  sono algebrici distinti. Scegliendo opportunamente  $Q$ , si dimostra che  $C_{h,i}, C_{h,j}$  sono algebrici.

Per il teorema di Lindemann-Weierstrass, necessariamente  $C_{h,i} - C_{h,j} = 0$  per ogni  $h$ .

$$A_{ii}^k =$$

Sia  $\beta > 0$  algebrico e presupponiamo che  $SC(i, \beta) = SC(j, \beta)$ , allora

$$0 = [e^{\beta A}]_{ii} - [e^{\beta A}]_{jj} = \sum_{h=1}^d e^{\beta \mu_h} (C_{h,i} - C_{h,j})$$

Il polinomio caratteristico di  $A$  ha coefficienti interi, dunque le sue radici  $\mu_h$  sono algebrici (distinti). Segue che i  $\beta \mu_h$  sono algebrici distinti. Scegliendo opportunamente  $Q$ , si dimostra che  $C_{h,i}, C_{h,j}$  sono algebrici.

Per il teorema di Lindemann-Weierstrass, necessariamente  $C_{h,i} - C_{h,j} = 0$  per ogni  $h$ .

$$A_{ii}^k = \sum_{h=1}^d \mu_h^k C_{h,i}$$

Sia  $\beta > 0$  algebrico e presupponiamo che  $SC(i, \beta) = SC(j, \beta)$ , allora

$$0 = [e^{\beta A}]_{ii} - [e^{\beta A}]_{jj} = \sum_{h=1}^d e^{\beta \mu_h} (C_{h,i} - C_{h,j})$$

Il polinomio caratteristico di  $A$  ha coefficienti interi, dunque le sue radici  $\mu_h$  sono algebrici (distinti). Segue che i  $\beta \mu_h$  sono algebrici distinti. Scegliendo opportunamente  $Q$ , si dimostra che  $C_{h,i}, C_{h,j}$  sono algebrici.

Per il teorema di Lindemann-Weierstrass, necessariamente  $C_{h,i} - C_{h,j} = 0$  per ogni  $h$ .

$$A_{ii}^k = \sum_{h=1}^d \mu_h^k C_{h,i} = \sum_{h=1}^d \mu_h^k C_{h,j}$$



Sia  $\beta > 0$  algebrico e presupponiamo che  $SC(i, \beta) = SC(j, \beta)$ , allora

$$0 = [e^{\beta A}]_{ii} - [e^{\beta A}]_{jj} = \sum_{h=1}^d e^{\beta \mu_h} (C_{h,i} - C_{h,j})$$

Il polinomio caratteristico di  $A$  ha coefficienti interi, dunque le sue radici  $\mu_h$  sono algebrici (distinti). Segue che i  $\beta \mu_h$  sono algebrici distinti. Scegliendo opportunamente  $Q$ , si dimostra che  $C_{h,i}, C_{h,j}$  sono algebrici.

Per il teorema di Lindemann-Weierstrass, necessariamente  $C_{h,i} - C_{h,j} = 0$  per ogni  $h$ .

$$A_{ii}^k = \sum_{h=1}^d \mu_h^k C_{h,i} = \sum_{h=1}^d \mu_h^k C_{h,j} = A_{jj}^k$$

Sia  $\beta > 0$  algebrico e presupponiamo che  $SC(i, \beta) = SC(j, \beta)$ , allora

$$0 = [e^{\beta A}]_{ii} - [e^{\beta A}]_{jj} = \sum_{h=1}^d e^{\beta \mu_h} (C_{h,i} - C_{h,j})$$

Il polinomio caratteristico di  $A$  ha coefficienti interi, dunque le sue radici  $\mu_h$  sono algebrici (distinti). Segue che i  $\beta \mu_h$  sono algebrici distinti. Scegliendo opportunamente  $Q$ , si dimostra che  $C_{h,i}, C_{h,j}$  sono algebrici.

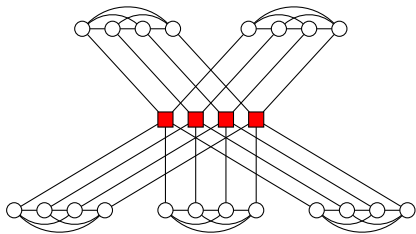
Per il teorema di Lindemann-Weierstrass, necessariamente  $C_{h,i} - C_{h,j} = 0$  per ogni  $h$ .

$$A_{ii}^k = \sum_{h=1}^d \mu_h^k C_{h,i} = \sum_{h=1}^d \mu_h^k C_{h,j} = A_{jj}^k$$

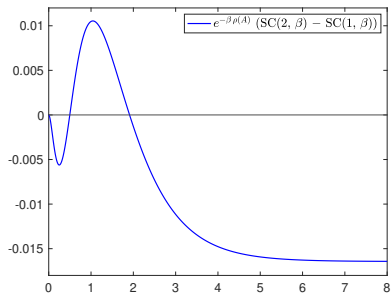
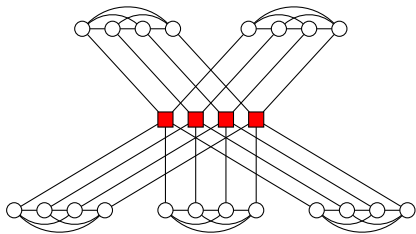
Questo vale per ogni  $k$ , dunque  $i$  e  $j$  sono cospettrali.  $\square$

Perché solo per  $\beta$  algebrico e non per tutti i  $\beta > 0$ ?

Perché solo per  $\beta$  algebrico e non per tutti i  $\beta > 0$ ?  
C'è un controesempio! Kloster, Král, Sullivan (2018)

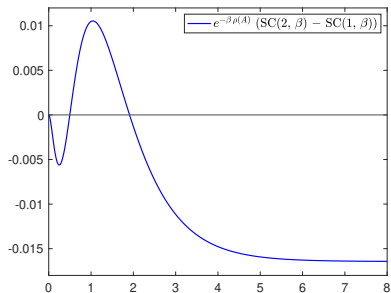
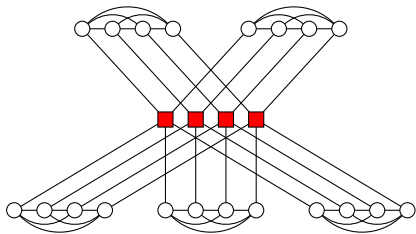


Perché solo per  $\beta$  algebrico e non per tutti i  $\beta > 0$ ?  
 C'è un controesempio! Kloster, Král, Sullivan (2018)



I 20 vertici bianchi sono tutti isomorfi tra di loro, così come i 4 rossi.  
 Il grafico mostra la differenza  $SC(\text{bianco}, \beta) - SC(\text{rosso}, \beta)$ ; ci sono due zeri per  $\beta \approx 0.49, 1.91$ .

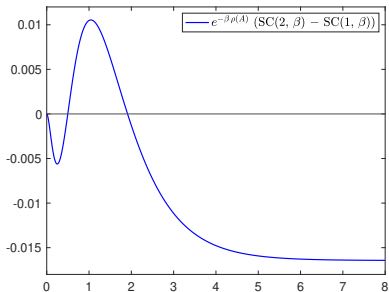
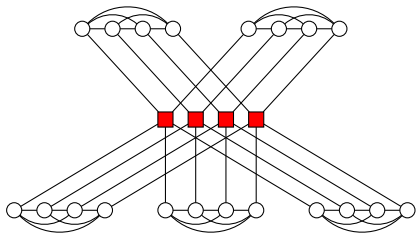
Perché solo per  $\beta$  algebrico e non per tutti i  $\beta > 0$ ?  
 C'è un controesempio! Kloster, Král, Sullivan (2018)



I 20 vertici bianchi sono tutti isomorfi tra di loro, così come i 4 rossi.  
 Il grafico mostra la differenza  $SC(\text{bianco}, \beta) - SC(\text{rosso}, \beta)$ ; ci sono due zeri per  $\beta \approx 0.49, 1.91$ .

Per questi  $\beta$  l'Exponential Subgraph Centrality dà lo stesso peso a tutti i vertici.

Perché solo per  $\beta$  algebrico e non per tutti i  $\beta > 0$ ?  
 C'è un controesempio! Kloster, Král, Sullivan (2018)



I 20 vertici bianchi sono tutti isomorfi tra di loro, così come i 4 rossi.  
 Il grafico mostra la differenza  $SC(\text{bianco}, \beta) - SC(\text{rosso}, \beta)$ ; ci sono due zeri per  $\beta \approx 0.49, 1.91$ .

Per questi  $\beta$  l'Exponential Subgraph Centrality dà lo stesso peso a tutti i vertici. Tuttavia, per il teorema appena dimostrato questi  $\beta$  sono necessariamente trascendenti!

## Conclusioni

- La RC e SC possono interlacciarsi al massimo  $d - 1$  volte per vertici non cospettrali.
- Ci basta un solo valore di  $\beta$  algebrico per distinguere vertici non cospettrali, utilizzando la SC.
- Non si conosce ancora una funzione "facile da calcolare" che assegni lo stesso valore a due vertici se e solo se sono isomorfi. Infatti, è legato al trovare tutti gli automorfismi di un grafo; attualmente non si conoscono algoritmi polinomiali per ciò.
- Tuttavia la SC riesce a distinguere vertici non cospettrali, e questo è il massimo potere risolutivo possibili per una misura derivante da funzioni di matrice.



**Grazie per l'attenzione!**

# Bibliografia

- F. Ballini, N. Deniskin, *Vertex distinction with subgraph centrality: a proof of Estrada's conjecture and some generalizations*, arXiv preprint (July 2020) <https://arxiv.org/abs/2007.08956>
- E. Estrada, J. A. Rodríguez-Velázquez, *Subgraph centrality in complex networks*, Physical Review Vol.71 Iss. 5 (2005)
- E. Estrada, J.A. de la Peña, N. Hatano, *Walk entropies in graphs*, Linear Algebra Appl. 443C (2014), pp. 235–244
- K. Kloster, D. Král, B. D. Sullivan, *Walk entropy and walk-regularity*, Linear Algebra Appl., Vol. 546 (2018), pp. 115-121.

# Supplementi

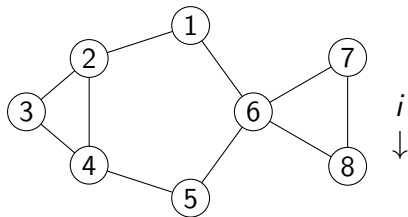
Sia  $A$  matrice simmetrica di taglia  $n$  con  $\mu_1, \dots, \mu_d$  autovalori distinti. Sia  $E_h$  il proiettore ortogonale sull'autospazio  $V_h = \text{Ker } A - \mu_h I$ .

Sono equivalenti:

- 1  $i$  e  $j$  sono cospettrali.
- 2 per ogni  $k \geq 0$ ,  $A_{ii}^k = A_{jj}^k$ .
- 3 Definita  $W_A(i, t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k A_{ii}^k$ , si ha che  $W_A(i, t) = W_A(j, t)$  per ogni  $t$  in cui la serie converge.
- 4 Per ogni proiettore spettrale  $E_h$  di  $A$ , si ha che  $[E_h]_{ii} = [E_h]_{jj}$
- 5  $A \setminus \{i, i\}$  e  $A \setminus \{j, j\}$  hanno lo polinomio caratteristico.

# Supplementi

Esempio di due vertici cospettrali non isomorfi (vertici 3 e 8).



	$k \longrightarrow$					
$[A^k]_{ii}$	2	3	4	5	6	7
1	2	0	9	6	49	64
2	3	2	13	18	68	130
3	2	2	8	14	42	88
4	3	2	13	18	68	130
5	2	0	9	6	49	64
6	4	2	20	20	110	160
7	2	2	8	14	42	88
8	2	2	8	14	42	88

## Supplementi

Sia  $\mathcal{G}$  un grafo non orientato con matrice di adiacenza  $A$  e sia  $d$  il numero di autovalori distinti di  $A$ . Siano  $i, j$  due vertici non cospettrali.

Allora le Exponential Subgraph Centrality  $SC(i, \beta)$  e  $SC(j, \beta)$  possono interlacciarsi al massimo  $d - 1$  volte.

### Proposizione

Siano  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  reali distinti e siano  $c_1, \dots, c_n$  reali (non necessariamente distinti). Si definisca la seguente funzione:

$$f(\beta) = c_1 e^{\beta \lambda_1} + c_2 e^{\beta \lambda_2} + \dots + c_n e^{\beta \lambda_n}$$

Si supponga che  $f(\beta)$  non sia costante, ovvero che i  $c_i$  non siano tutti nulli, e se c'è un solo  $c_j \neq 0$ , allora il relativo  $\lambda_j \neq 0$ .

Allora l'equazione  $f(\beta) = 0$  ha al massimo  $n - 1$  soluzioni, e  $f(\beta) = a$  con  $a \neq 0$  ne ha al massimo  $n$ .

# Supplementi

Per grafi non orientati, ogni vertice può svolgere due ruoli: quello di broadcaster e receiver. I broadcaster hanno tanti archi uscenti e riescono a diffondere bene le informazioni, mentre i receiver hanno tanti archi entranti e molti percorsi passano necessariamente per essi.

Katz Centrality, Total Communicability, PageRank, HITS sono esempi di misure che possono dare un peso per i broadcaster e uno per i receiver. (In generale i ranking ottenuti sono diversi)

$$\begin{aligned} \text{Broadcaster:} \quad & TC(i, \alpha) = [e^{\beta A} \mathbf{1}]_i \\ \text{Receiver:} \quad & TC(i, \alpha) = [(e^{\beta A})^\top \mathbf{1}]_i \end{aligned}$$

La SC e RC non riescono a distinguere broadcaster da authority.

**Grazie per l'attenzione!**