Esercizi Elementi di Teoria degli insiemi

Simmaco Di Lillo

Indice

Parte I. Teoria ingenua degli insiemi

1 Lezione del 25 febbraio

1.1 Coppia di Kuratowski

Esercizio 1.1. *Data la definizione di coppia*

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

dimostrare che

1. *Se X è una coppia, esiste un unico elemento che appartiene a tutti gli elementi di X*
2. *Se $(a, b) = (a, b')$ allora $b = b'$*
3. $(a, b) = (a', b')$ *se e solo se* $a = a' \wedge b = b'$

2 Lezione del 27 febbraio

2.1 Ordini

Esercizio 2.1 (Ordine della minima differenza)**.** *Su* $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ *definiamo la seguente relazione:*
$f < g$ *se* $f(k) < g(k)$ *con* $k = \min\{n \mid f(n) \neq g(n)\}$.
Mostrare che è un ordine totale e che tale ordine non è un buon ordinamento.

Esercizio 2.2. *Consideriamo l'insieme* $Fun_0(\mathbb{N}, \mathbb{N}) = \{f : N_0 \to N_0 \mid f(n)$ *definitivamente* $0\}$ *con la seguente relazione* $f < g$ *se* $f(k) < g(k)$ *dove* $k = \max\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \neq g(n)\}$.
Mostrare che tale relazione è un buon ordine.

2.2 Assioma di scelta

Esercizio 2.3. *I seguenti fatti sono equivalenti*

1. *A.C.*
2. *Ogni famiglia non vuota $\mathfrak{F}$ di insiemi non vuoti ha una funzione di scelta f.*
   $dom f = \mathfrak{F}$ e $f(F) \in F \,\forall F \in \mathfrak{F}$
3. *Ogni insieme non vuoto ha una funzione di scelta f*

$$f : \mathcal{P}(A) - \emptyset \to A \quad f(X) \in X \,\forall X \in \mathcal{P}(A)$$

4. *Ogni famiglia $\mathfrak{F}$ non vuota di insiemi non vuoti a 2 a 2 disgiunti ha un selettore X ciòè un insieme X con $|X \cap F| = 1 \;\forall F \in \mathfrak{F}$*
5. *Ogni funzione suriettiva ha un inversa destra*

Esercizio 2.4. *Sia $\langle F_{i,j} \,|\, (i,j) \in I \times J \,\rangle$ una sequenza di insiemi non vuoti.*

1. *Dimostrare usando (A.C) che*

$$\bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J} F_{i,j} = \bigcup_{f : I \to J} \bigcap_{i \in I} F_{i,f(i)}$$

2. *Dimostrare che l'uguaglianza di sopra è equivalente a A.C*

3 Lezione del 28 Febbraio

3.1 Teoria della cardinalità

Esercizio 3.1. *Siano* $|A| = |A'|$ *e* $|B| = |B'|$ *allora*

Esercizio 3.2.
$$|A| = \aleph_0 \text{ e } F \subset A \text{ finito} \quad \rightarrow \quad |A - F| = \aleph_0$$

Esercizio 3.3.
$$|A| = \aleph_0 \text{ e } F \text{ finito} \quad \rightarrow \quad |A \cup F| = \aleph_0$$

Esercizio 3.4.
$$|A| = \aleph_0 \text{ e } B \triangle A \text{ finito} \quad \rightarrow \quad |B| = \aleph_0$$

Esercizio 3.5.
$$|A| = |B| = \aleph_0 \quad \rightarrow \quad |A \cup B| = \aleph_0$$

4 Lezione del 3 marzo

4.1 Ancora teoria della cardinalità

Esercizio 4.1. *Se $A \subseteq \mathbb{N}$ infinito, allora A è numerabile.*

Esercizio 4.2.

$$\forall i \in I \ |A_i| = |A'_i| \quad \to \quad \left|\prod_{i\in I} A_i\right| = \left|\prod_{i\in I} A'_i\right|$$

Esercizio 4.3.

$$\forall i \in I \ |A_i| = |A'_i| \ \textit{ con } A_i \cap A_j = A'_i \cap A'_j = \emptyset \textit{ se } i \neq j \quad \to \quad |\cup_{i\in I} A_i| = |\cup_{i\in I} A'_i|$$

Esercizio 4.4. *Se $|X| = |Y|$ allora $|FS(X)| = |FS(Y)|$*

Esercizio 4.5. *Se $|X| = |Y|$ allora $|Fin(X)| = |Fin(Y)|$*

5 Lezione del 10 marzo

Esercizio 5.1. *Non esiste l'insieme* $\mathfrak{v}$ *di tutti gli insiemi*

Esercizio 5.2. $|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(B)| \to |A| = |B|$
Tale enunciato è indecidibile.

Esercizio 5.3. *Se* $A \cap B = \emptyset$ *allora* $\left|X^A \times X^B\right| = \left|X^{A\cup B}\right|$

Esercizio 5.4. *Trovare dimostrazioni alternativa (da quella vista a lezione) del fatto che* $|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$

Esercizio 5.5. *(A.C.) Se* X *è infinito con* $|X \times X| = |X|$ *allora* $|Fin(X)| = |FS(X)| = |X|$

Esercizio 5.6. $|\mathcal{P}(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}(\mathbb{R})| = |\mathcal{P}(\mathbb{R})|$

Esercizio 5.7. $\left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right| = c$

Esercizio 5.8. $\left|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right| = c$

Esercizio 5.9. $\left|[\mathbb{R}]^{\aleph_0}\right| = c$

Esercizio 5.10. $\left|[\mathbb{R}]^{<\aleph_0}\right| = c$

Esercizio 5.11. *(A.C)Se* $\langle A_i \,|\, i \in I\rangle$ *è una* I*-sequenza di insiemi dove* $|A_i| \leq c$ *e* $|I| \leq c$ *allora*

$$\left|\bigcup_{i\in I} A_i\right| \leq c$$

6 Lezione del 12 marzo

Esercizio 6.1. *(A.C.) Se* $A \subseteq B$ *con* $|A| < |B|$ *allora* $|B \setminus A| = |B|$ *(*B *è infinito) VISTO AD ESERCITAZIONE.*

Esercizio 6.2. *(A.C.) Sia* $\langle A_i \,|i \in I \rangle$ *dove* $|I|\,, |A_i| \leq c$

1. *Se* $\exists i_0 \in I$ *con* $|A_{i_0}| = c$ *allora* $\left| \bigcup_{j \in I} A_j \right| = c$

2. *Se* $A_i \neq \emptyset$*,* $|I| = c$ *e* $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ *se* $i \neq j$ *allora* $\left| \bigcup_{i \in i} A_i \right| = c$

7 Lezione del 13 marzo

Esercizio 7.1. *Sia* $A = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \,|\, f(n) \neq n\}$, *dimostrare che* $|A| = c$

Esercizio 7.2. *Sia* $A = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \,|\, f \text{ illimitata}\}$, *dimostrare che* $|A| = c$

Esercizio 7.3. *Sia* $B = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \,|\, f \text{ limitata}\}$. *Calcolare* $|B|$

8 Lezione del 17 marzo

Esercizio 8.1. *Gli aperti di* $\mathbb{R}^n$ *hanno cardinalità del continuo.*

Parte II.

9 Lezione del 12 marzo

9.1 Teoria Assiomatica degli insiemi

Esercizio 9.1. *A partire dagli assiomi dati (1-6) dimostrare che*

1. *Se* R *è una relazione binaria, allora esistono* $dom(R)$ *e* $Imm(R)$
2. *Se* $\equiv$ *è una relazione di equivalenza su* A*, allora esiste l'insieme quoziente*
3. $\forall A\ \forall B$ *esiste* $Fun(A, B)$
4. *Data la sequenza* $\langle A_i \mid i \in I \rangle$ *esiste* $\prod_{i \in I} A_i$

10 Lezione del 17 marzo

10.1 Numeri naturali

Esercizio 10.1. $0, 1, 2, 3$ *sono a 2 a 2 diversi.*
Se $i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$ *si ha* $i < j$ *(nel senso informale)* $\Leftrightarrow i \in j$

Esercizio 10.2. $\{\{\emptyset\}\}$ *non è un numero naturale*

Esercizio 10.3. $\{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}$ *non è un numero naturale.*

Esercizio 10.4. *Dimostrare le seguenti proprietà per* $n, m \in \omega$

1. $n \in m \Leftrightarrow n \subsetneq m$
2. $\hat{n} \in \hat{m} \to n \in m$
3. $\forall x \; x \in n \to x \in \omega$
4. $n \cap m$ *è un numero naturale e* $n \cap m = \min\{n, m\}$
5. $n \cup m$ *è un numero naturale e* $n \cup m = \max\{n, m\}$
6. $\hat{n}$ *è il successore di* n*, cioè non accade per nessun* m *che* $n < m < \hat{n}$

11 Lezione del 19 marzo

11.1 Numeri naturali

Esercizio 11.1. *Mostrare che l'induzione usuale e l'induzione "forte" sono equivalenti.*

Esercizio 11.2. *Se $\mathfrak{F}$ è una famiglia di funzioni a 2 a 2 compatibili allora $F = \bigcup \mathfrak{F}$ è una funzione e $dom(F) = \bigcup_{f \in \mathfrak{F}} dom(f)$*

Esercizio 11.3. *Sia A un insieme, $a \in A$ e $g : \omega \times A \to A$ una funzione.*
ψ è un'approssimazione finita se

$$\psi : k+1 \to A$$

dove k numero naturale e

$$\begin{cases} \psi(0) = a \\ \psi(n+1) = g(n, \psi(n)) \end{cases}$$

Mostrare che

$$\mathfrak{F} = \{\varphi \,|\, \varphi \text{ è } A.F\}$$

è un insieme

12 Lezione del 22 marzo

Esercizio 12.1. *Trovare **esplicitamente** una bigezione* $\psi : [0,1] \to (0,1)$

13 Lezione del 24 marzo

Esercizio 13.1. *.*

1. $X = \bigcup \mathcal{P}(X)$
2. $X \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\bigcup X))$
3. $\bigcup \bigcup \mathcal{P}(X) \in \mathcal{P}\left(\bigcup X\right)$
4. *A partire dagli assiomi dimostrare che esiste X allora esiste* $\{\mathcal{P}(x)\,|x \in X\}$
5. *Per quali* $X = \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$

Esercizio 13.2. *Usando (A.C.) e la ricorsione dimostrare che se A è infinito, allora esiste $f : \mathbb{N} \to A$ iniettiva*

13.1 Insiemi finiti

Esercizio 13.3. *Se A e B sono finiti, allora anche $A \cup B$ è finito .*

Esercizio 13.4. *Se A e B sono finiti, allora anche $A \times B$ è finito.*

Esercizio 13.5. *Se A e B sono finiti, allora anche $Fun(A, B)$ è finito.*

Esercizio 13.6. *Se A è finito, allora anche $\mathcal{P}(A)$ è finito*

Esercizio 13.7. *Se R è una relazione finita, $dom(R)$ e $Imm(R)$ sono finiti*

Esercizio 13.8. *Se $\mathfrak{F}$ è una famiglia finita di insiemi finiti, $\bigcup \mathfrak{F}$ è finita*

13.2 Assiomi di Peano

Esercizio 13.9. *Assumendo* PA_{II} *dimostrare che* $\forall x, y, z$

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

Esercizio 13.10. *Assumendo* PA_{II} *dimostrare che* $\forall x, y$

$$x + y = y + x$$

Esercizio 13.11. *Assumendo* PA_{II} *dimostrare che* $\forall x, y$

$$x \cdot y = y \cdot x$$

Esercizio 13.12. *Assumendo* PA_{II} *dimostrare che* $\forall x, y, z$

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

Esercizio 13.13. *Assumendo* PA_{II} *dimostrare che* $\forall x, y, z$

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

13.2.1 Struttura d'ordine su $\mathbb{N}$

Esercizio 13.14. *Assumendo PA_{II} si ha $(N, <)$ è totalmente ordinato*

Esercizio 13.15. *Assumendo* PA_{II} *si ha* $\forall x, y, z \in \mathbb{N}$

$$x < y \to x + z < y + z$$

Esercizio 13.16. *Assumendo* PA_{II} *si ha* $\forall x, y, z \in \mathbb{N}$

$$z \neq 0 \quad \to \quad (x < y \to x \cdot z < y \cdot z)$$

14 Lezione del 26 marzo

Esercizio 14.1. *Definire somma e prodotto su ω (che rispetti PA_{II}) usando la ricorsione numerabile.*

14.1 Buoni ordini

Esercizio 14.2. *Se $(A, <)$ e $(B, <)$ sono insiemi totalmente ordinati finiti con $|A| = |B|$ allora sono isomorfi, dunque, ogni insieme totalmente ordinato finito è ben ordinato.*

Esercizio 14.3. *L'insieme ordinato $(Fun(\mathbb{N}, \mathbb{Z}), <)$ con l'ordine della minima differenza è separabile.*

15 Lezione del 27 marzo

15.1 Tagli di Dedekind

Esercizio 15.1. *$X+Y$ è un taglio, inoltre $\mathbb{Q}_q + \mathbb{Q}_{q'} = \mathbb{Q}_{q+q'}$*

Esercizio 15.2. $-X$ *è un taglio, inoltre* $X + (-X) = \mathbb{Q}_0$

Esercizio 15.3. *Se* $X, Y > 0$ *allora* $X \cdot Y$ *è un taglio*

Esercizio 15.4. .

1. $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$
2. $X \cdot (Y \cdot Z) = (X \cdot Y) \cdot Z$
3. $X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$

Esercizio 15.5. $X \cdot \frac{1}{X} = \mathbb{Q}_1$ *per ogni* $X \neq 0$

Esercizio 15.6. *Se* $A \neq \emptyset$ *allora* $\{B \mid |B| = |A|\}$ *non è un insieme.*

16 Lezione del 31 marzo

16.1 Ancora buoni ordini

Esercizio 16.1. *Se* $(A, <)$ *e* $(B, <)$ *sono buoni ordini, allora esiste al più un isomorfismo tra loro*

Esercizio 16.2. *Se* $A \subset \mathbb{R}$ *è ben ordinato,* A *è al più numerabile.*

Esercizio 16.3. *Sia* $(A, <)$ *un insieme ordinato*

$$(A, <) \cong (\omega, <) \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ è infinito e ogni suo segmento iniziale è finito}$$

16.2 Tipi d'ordine

Esercizio 16.4. *Assumendo la tricotomia dei buoni ordini, mostrare che se* $\mathfrak{F}$ *è un insieme non vuoto di buoni ordini, allora esiste* $(A, <) \in \mathfrak{F}$ *tale che* $\forall (B, <) \in \mathfrak{F}$ *si ha* $ot(A) \leq ot(B)$.

17 Lezione del 2 aprile

Esercizio 17.1. *$ot(\omega)$ è il più piccolo tra i tipi d'ordine di insiemi infiniti.*

17.1 Operazioni sui buoni ordini

Esercizio 17.2. $(A, <)$ *e* $(B, <)$ *sono buoni ordini se e solo se* $(A \oplus B, <)$ *è un buon totale.*

Esercizio 17.3. $(A \oplus B) \oplus C \cong A \oplus (B \oplus C)$.

Esercizio 17.4. $(A \otimes B) \otimes C \cong A \otimes (B \otimes C)$

Esercizio 17.5. $\{0, 1\} \otimes \omega \cong \omega$

Esercizio 17.6. $\omega \otimes \{0, 1\} \cong \omega \oplus \omega$

Esercizio 17.7. *Siano* $(A, <)$ *e* $(B, <)$ *ordini totali.*

$$A \otimes B \text{ buon ordine} \quad \Leftrightarrow \quad A, B \text{ buon ordini}$$

Esercizio 17.8.

$$A \otimes (B \oplus C) = (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$$

Esercizio 17.9. $|Fun_0(\omega, w)| = \aleph_0$

18 Lezione del 3 aprile

18.1 Ancora operazioni sui buoni ordini

Esercizio 18.1. *Se* $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$ *con* $b_i < b_j$ *se* $i < j$ *è finito con* k *elementi. Allora*

$$exp(A, B) = \underbrace{A \otimes \cdots \otimes A}_{k \text{ volte}}$$

Esercizio 18.2. *Se* $A \cong A'$ *e* $B \cong B'$ *allora* $A \oplus B \cong A' \oplus B'$

Esercizio 18.3. *Se* $A \cong A'$ *e* $B \cong B'$ *allora* $A \otimes B \cong A' \otimes B'$

Esercizio 18.4. *Se* $A \cong A'$ *e* $B \cong B'$ *allora* $exp(A, B) \cong exp(A', B')$

Esercizio 18.5. *Se* $exp(A, B)$ *è ben ordinato, allora* A *e* B *sono bene ordinati.*

Esercizio 18.6. *(senza (A.C.)).*
Supponiamo X *infinito con* $|X \times X| = |X|$.
Se $|A_i| = |X|$ *per* $i = 1, \dots, k$ *allora* $|A_1 \cup \cdots \cup A_k| = |X|$

19 Lezione del 7 aprile

19.1 Ordinali

Esercizio 19.1. *Se* $\alpha \neq \emptyset$ *è un ordinale,* $\emptyset \in \alpha$

Esercizio 19.2. *Se* α *è un ordinale infinito,* $\omega \subseteq \alpha$.

Esercizio 19.3. *Sia X un insieme di ordinali non vuoto , allora $\bigcup X$ è un ordinale. In particolare $\bigcup X = SupX$.*

Esercizio 19.4. *Sia X un insieme di ordinali non vuoto, allora $\bigcap X$ è n ordinale. In particolare $\min X = \bigcap X$*

Parte III.

20 Lezione del 21 aprile

20.1 Classi in ZFC

Esercizio 20.1. *La classe in ZFC (estensione di una formula)*

$$Sing = \{x \mid \exists y \; x = \{y\}\}$$

non è un insieme

Esercizio 20.2. *La classe in ZFC (estensione di una formula)*

$$Pair = \{x \mid \exists y, z \text{ “}x = (y, z)\text{”}\}$$

non è un insieme

Esercizio 20.3. *Per ogni a, la classe in ZFC (estensione di una formula)*

$$C_a = \{x \mid a \in x\}$$

non è un insieme

20.2 Teoria NGB

Esercizio 20.4. *In NGB, $\forall A, B$ esistono $A \cup B$, $A \cap B$ e $A \times B$*

Esercizio 20.5. *In NGB vale l'assioma del sottoinsieme*

$$\forall C \; \forall b \text{ insieme} \quad C \cap b \text{ è un insieme}$$

Esercizio 20.6. *NGB "ingloba" l'assioma di separazione, cioè dimostra la separazione ristretta ad insiemi*

Esercizio 20.7. *Dimostrare in ZF (non usando la scelta) che il lemma di Zorn implica che per ogni insieme infinito A, esiste $f : \mathbb{N} \to A$ iniettiva*

21 Lezione del 23 aprile

Esercizio 21.1. *In NGB dimostrare l'esistenza di*

$$R = \{x \text{ insieme } \mid x \notin x\}$$

$$V = \{x \text{ insieme } \}$$

$$ORD = \{\text{ordinali}\}$$

$$SING = \{ \text{ singoletti}\}$$

$$ORDER\ PAIR = \{(x, y) \mid x, y \text{ insiemi}\}$$

$$APPARTENENZA = \{(x, y) \mid x, y \text{ insiemi } \ x \in y\}$$

Dimostrare, inoltre, che le classi sopra definite non sono insiemi (classi proprie)

Esercizio 21.2. *Sia A una classe, definiamo*

$$\mathcal{P}(A) = \{x \text{ insieme } |x \subseteq A\}$$

mostrare che $\mathcal{P}(A)$ è una classe.
Inoltre vale la seguente implicazione

$$A \text{ classe propria} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{P}(A) \text{ classe propria}$$

Esercizio 21.3. *Sia F una funzione iniettiva definita su una classe propria A.*
Allora $F[A] = \{F(a) \mid a \in A\}$ è una classe propria

Esercizio 21.4. *Per ogni insieme A l'insieme $A \times \{0\}$ non contiene nessun ordinale.*

22 Lezione del 24 aprile

Esercizio 22.1. *Se α, β sono ordinale allora*

$$\alpha + \beta \cong \alpha \oplus \beta$$

Esercizio 22.2. *L'insieme dei Lesbegue-misurabile è equipotente all'insieme delle parti di $\mathbb{R}$*

23 Lezione del 28 aprile

Esercizio 23.1. *Le due formulazioni delle ricorsioni transfinite sono tra loro equivalenti*

Esercizio 23.2. *Se* $n, m < \omega$ *allora la somma ordinale* $n + m$ *coincide con la somma* $n + m$ *come numeri naturali*

Esercizio 23.3. $\alpha \cdot \beta \cong \alpha \otimes \beta$

Esercizio 23.4. *Se* $n, m < \omega$ *allora il prodotto ordinale* $n \cdot m$ *coincide con il prodotto* $n \cdot m$ *come numeri naturali*

Esercizio 23.5. $\alpha < \beta \to \gamma + \alpha < \gamma + \beta$
Mostrare se vale il viceversa

Esercizio 23.6. $\alpha < \beta \to \gamma \cdot \alpha < \gamma \cdot \beta$ *per* $\gamma \neq 0$.
Mostrare se vale il viceversa

Esercizio 23.7. $\alpha^\beta \cong Exp(\alpha, \beta)$

Esercizio 23.8. *Se* $n, m < \omega$ *allora l'esponenziale ordinale* n^m *coincide con l'esponenziale* n^m *come numeri naturali*

Esercizio 23.9. *Mostrare per ricorsione transfinita, le seguenti proprietà*

1. $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma)$
2. $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma)$
3. $\alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}$
4. $\left(\alpha^\beta\right)^\gamma = \alpha^{\beta\cdot\gamma}$

Esercizio 23.10. *"Calcolare"* $(\omega + 1)^\omega$

24 Lezione del 30 aprile

Esercizio 24.1. *Se* $\mathfrak{C}$ *è un insieme di cardinali, allora* $\bigcup \mathfrak{C} = \sup_{k \in \mathfrak{C}} k$

Esercizio 24.2. *Se* $\alpha < \beta$ *allora* $\aleph_\alpha < \aleph_\beta$

Esercizio 24.3. *Senza A.C. dimostrare che* $|\omega_1| \leq |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))|$

Esercizio 24.4. G_ω *include l'algebra generata da* G

Esercizio 24.5. *Mostrare che* $|G_{\omega_1}| = c$

25 Lezione del 5 maggio

Esercizio 25.1. *$\alpha \cdot \beta$ è successore se e solo se α e β sono successori*

Esercizio 25.2. *Supponiamo $\alpha_1 \leq \alpha_2$ e $\beta_1 \leq \beta_2$ allora*

- $\alpha_1 + \beta_1 \leq \alpha_2 + \beta_2$
- $\alpha_1 \cdot \beta_1 \leq \alpha_2 \cdot \beta_2$
- $\alpha_1^{\beta_1} \leq \alpha_2^{\beta_2}$

Esercizio 25.3. *α^β è successore se e solo se α successore e β ordinale finito*

26 Lezione del 7 maggio

Esercizio 26.1. *Dato un qualunque ordinale* β *consideriamo*

$$\begin{cases} \alpha_0 = \beta \\ \alpha_{n+1} = \omega^{\alpha_n} \end{cases}$$

allora la sequenza α_n *è crescente e* $\alpha = \bigcup \alpha_n$ *è limite*

Esercizio 26.2. $\omega^\alpha \geq \alpha$

Esercizio 26.3. *Mostrare l'unicità della forma normale di Cantor*

27 Lezione del 8 maggio

Esercizio 27.1. *Se* $\gamma > \gamma_1 > \gamma_2 > \cdots > \gamma_k$ *e* $n_i < \omega$ *allora*

$$\omega^\gamma > \omega^{\gamma_1} \cdot n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k} \cdot n_k$$

Esercizio 27.2. *Dimostrare che i seguenti fatti sono equivalenti*

(i) $\forall \beta < \alpha$ *si ha* $\beta \cdot \alpha = \alpha$

(ii) $\forall \beta, \gamma < \alpha$ *si ha* $\beta \cdot \gamma < \alpha$

(iii) $\alpha = \omega^{(\omega^\gamma)}$ *per qualche* γ

Esercizio 27.3. *Trovare caratterizzazioni delle coppie di ordinali* α, β *tali che* $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$