



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Triennale in Matematica

Proprietà spettrali per l'equazione di Korteweg - de Vries

Tesi di Laurea Triennale in Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
PIERO D'ANCONA

Candidato:
MATTEO DI NUNNO
matricola 1230164

Sessione Estiva
Anno Accademico 2011-2012
Dipartimento di Matematica 'Guido Castelnuovo'

Introduzione

La prima osservazione, apparsa in letteratura, di ciò che oggi chiamiamo solitone avvenne nel 1844, ma la natura del fenomeno non fu apprezzata e compresa appieno. Fu lo scienziato e ingegnere scozzese John Scott Russell a scoprire il fenomeno. Egli vide in un canale d'acqua il moto di un'onda di superficie dal comportamento quanto mai insolito; infatti essa possedeva un profilo ben definito e stabile e continuava il suo moto lungo il canale senza evidenti segni di variazioni di velocità o di forma. Un'altra particolarità notata da Russell fu la forte stabilità dell'onda, che dovette avanzare nel suo moto per più di due miglia prima di scomparire nel canale.

Per una iniziale conferma matematica del lavoro di Russell si dovette attendere il 1895, anno in cui Korteweg e de Vries derivarono la loro famosa equazione per la descrizione di onde monodimensionali in un canale a basso fondale.

Passano gli anni e nel 1955, a Los Alamos, Fermi, Pasta e Ulam studiarono un problema molto lontano dai solitoni e dall'equazione di KdV. I loro studi vertevano sull'analisi del comportamento di sistemi meccanici in presenza di perturbazioni di tipo non lineare. Apparentemente la KdV e questo problema sembrano del tutto indipendenti, ma la natura dei risultati dell'esperimento condotto da FPU stimolò la ricerca su questo tipo di sistemi nonlineari.

Con gli anni le conoscenze teoriche si approfondirono e vennero alla luce profondi collegamenti tra i solitoni e certe proprietà dei sistemi meccanici nei quali essi si producevano. Non solo, si scoprirono collegamenti con i più disparati campi della fisica. La teoria dei solitoni naturalmente è vastissima e molto tecnica; la seguente trattazione è volta principalmente allo studio di alcune proprietà di cui gode l'equazione di KdV proprio a causa dei solitoni stessi.

Indice

Introduzione	i
1 Definizioni e teoremi preliminari	1
2 Gli esperimenti FPU e ZK	5
2.1 L'esperimento FPU e la derivazione di Kruskal-Zabusky	5
2.2 Discussione dei risultati	10
3 Sulla propagazione di onde lineari	15
4 Spettri e costanti del moto	20
4.1 Perché i solitoni sono interessanti?	20
4.2 Coppie di Lax	22
4.3 Isospettralità e l'operatore di Schrödinger	25
Bibliografia	30

Capitolo 1

Definizioni e teoremi preliminari

Scopo del presente capitolo è richiamare alcuni concetti necessari al tipo di trattazione del problema che verrà svolta nei capitoli successivi. Gran parte delle nozioni richiamate saranno di analisi funzionale e si riveleranno preziose nella comprensione e manipolazione degli oggetti del nostro studio. Per completezza, richiamiamo rapidamente alcune definizioni.

Definizione 1.1 (Operatore chiuso). Sia un operatore lineare $\mathbf{M} : D(\mathbf{M}) \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ da un sottospazio lineare $D(\mathbf{M})$ di \mathcal{H} a valori in \mathcal{H} , dove $D(\mathbf{M})$ si chiama dominio dell'operatore. L'operatore \mathbf{M} si dice chiuso se $\forall \{x_n\} \in D(\mathbf{M})$ tale che $x_n \rightarrow x$ ed $\mathbf{M}x_n \rightarrow y$ allora, $x \in D(\mathbf{M})$ ed $\mathbf{M}x = y$.

Definizione 1.2 (Spettro e risolvente). Sia $\mathbf{M} : D(\mathbf{M}) \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ un operatore chiuso su uno spazio di Hilbert \mathcal{H} . Il *risolvente* $\rho(\mathbf{M})$ è l'insieme di quei $\lambda \in \mathbb{C}$ tali che $\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}$ è una biezione di $D(\mathbf{M})$ in \mathcal{H} con inversa limitata. Lo *spettro* $\sigma(\mathbf{M})$ è il complementare del risolvente.

Definizione 1.3 (Operatore aggiunto ed antiaggiunto). Sia \mathcal{H} uno spazio di Hilbert e sia l'operatore non limitato $\mathbf{M} : D(\mathbf{M}) \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ dove $D(\mathbf{M})$ è un sottospazio denso di \mathcal{H} . L'aggiunto di \mathbf{M} , denotato come \mathbf{M}^* è l'operatore con dominio $D(\mathbf{M}^*)$

consistente di tutti i vettori y in \mathcal{H} per i quali esiste il vettore \mathbf{M}^*y tale che

$$(\mathbf{M}x, y) = (x, \mathbf{M}^*y)$$

valga per ogni x in $D(\mathbf{M})$. Poichè $D(\mathbf{M})$ è denso, per ogni dato y esiste al più un vettore \mathbf{M}^*y con questa proprietà.

L'operatore \mathbf{M} è detto *simmetrico* se $D(\mathbf{M}) \subset D(\mathbf{M}^*)$ ed $\mathbf{M} = \mathbf{M}^*$ su $D(\mathbf{M})$.

Nel caso in cui il dominio dell'operatore e quello del suo aggiunto coincidono, se $\mathbf{M} = \mathbf{M}^*$ l'operatore è detto *autoaggiunto* mentre se $\mathbf{M} = -\mathbf{M}^*$ è detto *antiaggiunto*.

Definizione 1.4 (Operatore unitario). Sia l'operatore lineare ed isometrico $\mathbf{U} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, ossia $\|\mathbf{U}x\| = \|x\|$. Allora esso è detto unitario.

L'essere isometrico implica che $(\mathbf{U}x, \mathbf{U}y) = (x, y)$. Quindi vale anche $(x, \mathbf{U}^*\mathbf{U}y) = (x, y)$. Da qui si ha che per gli operatori unitari vale $\mathbf{U}^* = \mathbf{U}^{-1}$.

Definizione 1.5 (Equivalenza unitaria). Siano \mathbf{N} ed \mathbf{M} due operatori autoaggiunti e limitati su uno spazio di Hilbert. Essi si dicono unitariamente equivalenti se esiste un operatore unitario \mathbf{U} tale che $\mathbf{N} = \mathbf{U}\mathbf{M}\mathbf{U}^{-1}$

Proposizione 1.0.1. *Siano \mathbf{M} ed \mathbf{N} due operatori autoaggiunti in $D(\mathbf{M})$ e $D(\mathbf{N})$ rispettivamente. Sia \mathbf{U} un operatore unitario in \mathcal{H} tale che \mathbf{M} ed \mathbf{N} siano unitariamente equivalenti ed ossia $\mathbf{N}x = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{U}x$ per ogni $x \in D(\mathbf{N})$ ed $\mathbf{U}D(\mathbf{N}) = D(\mathbf{M})$. Allora $\rho(\mathbf{M}) = \rho(\mathbf{N})$.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ lo spazio degli operatori da \mathcal{H} in sè. Si ha che

$$\lambda \in \rho(\mathbf{N}) \Leftrightarrow (\mathbf{N} - \lambda\mathbf{I})^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \Leftrightarrow (\mathbf{U}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{U} - \lambda\mathbf{I})^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

Adesso osserviamo che

$$(\mathbf{U}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{U} - \lambda\mathbf{I})^{-1} = (\mathbf{U}^{-1}(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{U})^{-1} = (\mathbf{U}^{-1}(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I})^{-1}\mathbf{U})$$

Allora $(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I})^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \Leftrightarrow \lambda \in \rho(\mathbf{M})$ □

Adesso passiamo ad alcune definizioni e teoremi riguardanti i gruppi di operatori. Tali risultati ci consentiranno di definire, a breve, il concetto di derivata di un operatore rispetto ad un parametro.

Definizione 1.6 (Gruppo ad un parametro di operatori). Sia data una famiglia $\mathbf{Z}(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{L}(X)$ di operatori lineari e limitati di uno spazio di Banach X in se stesso. Tale famiglia si chiama gruppo ad un parametro se valgono le seguenti proprietà:

$$\mathbf{Z}(t+s) = \mathbf{Z}(t)\mathbf{Z}(s) \quad \forall t, s \geq 0 \quad \mathbf{Z}(0) = \mathbf{I} \quad (1.1)$$

Definizione 1.7 (Operatori unitari fortemente continui). Una famiglia $\mathbf{U}(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ di operatori unitari su uno spazio di Hilbert \mathcal{H} è detta fortemente continua in t_0 se $\forall x \in \mathcal{H}$

$$t \rightarrow t_0 \Rightarrow \mathbf{U}(t)x \rightarrow \mathbf{U}(t_0)x$$

Definizione 1.8 (Generatore infinitesimale). Sia $\mathbf{Z}(t)$ un gruppo ad un parametro fortemente continuo di operatori da uno spazio di Hilbert in se stesso. Il suo generatore infinitesimale \mathbf{G} è definito come il limite:

$$\mathbf{G}x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{Z}(h)x - x}{h} \quad (1.2)$$

se il dominio di \mathbf{G} consiste di tutti gli x per cui esiste il limite nella (1.2).

Teorema 1.0.2. *Sia $\mathbf{Z}(t)$ un gruppo ad un parametro fortemente continuo di operatori da uno spazio di Hilbert in se stesso. Sia \mathbf{G} il suo generatore infinitesimale. Allora \mathbf{G} commuta con $\mathbf{Z}(t)$ ossia se $x \in D(\mathbf{G})$ allora anche $\mathbf{Z}(t)x \in D(\mathbf{G})$ per ogni t e*

$$\mathbf{G}\mathbf{Z}(t)x = \mathbf{Z}(t)\mathbf{G}x.$$

Dimostrazione. Usando la (1.1) possiamo scrivere il seguente rapporto incrementale in due modi:

$$\frac{\mathbf{Z}(t+h) - \mathbf{Z}(t)}{h}x = \mathbf{Z}(t) \frac{\mathbf{Z}(h) - \mathbf{I}}{h}x = \frac{\mathbf{Z}(h) - \mathbf{I}}{h} \mathbf{Z}(t)x$$

Quando $x \in D(\mathbf{G})$ il termine di mezzo converge, per $h \rightarrow 0$, a $\mathbf{Z}(t)\mathbf{G}x$. Lo stesso comportamento si ha per i due termini a destra e a sinistra. Da qui possiamo dedurre che

$$\frac{d}{dt}\mathbf{Z}(t)x = \mathbf{G}\mathbf{Z}(t)x = \mathbf{Z}(t)\mathbf{G}x$$

per ogni $x \in D(\mathbf{G})$.

□

Capitolo 2

Gli esperimenti FPU e ZK

2.1 L'esperimento FPU e la derivazione di Kruskal-Zabusky

Fermi, Pasta e Ulam analizzarono il comportamento di sistemi meccanici nei quali fosse stata introdotta una perturbazione di tipo non lineare. In particolare essi erano interessati agli effetti che tale perturbazione avrebbe avuto sulla distribuzione dell'energia interna del sistema.

In assenza di perturbazioni l'energia, in ognuno dei modi normali, è costante, mentre in presenza dell'interazione nonlineare ci si aspettava un'equidistribuzione tra tutti i modi, secondo quanto previsto dalla teoria ergodica. L'esito dell'esperimento non fu quello previsto, dato che si osservava che l'energia si concentrava su un unico modo normale e che molto lentamente passava al successivo. Nostro intento ora è di descrivere l'esperimento ¹ in termini formali e di arrivare alle osservazioni ottenute da Kruskal e Zabusky nel [7].

Da un punto di vista matematico la simulazione eseguita da FPU consisteva nello studio di un sistema unidimensionale di N oscillatori con condizioni al bordo

¹Trattasi in verità di una delle prime simulazioni numeriche eseguite con l'ausilio di un calcolatore.

omogenee. Inoltre tra due oscillatori contigui doveva agire una forza di natura elastica di tipo non lineare. Più precisamente, chiamiamo l la distanza dall'origine dell' N -esimo oscillatore. La loro posizione di equilibrio si scriverà come $p_i = ih$ con $i = 0 \dots N - 1$ e con $h = \frac{l}{N-1}$ che sta ad indicare il passo tra un oscillatore e il successivo. La posizione al tempo t sarà $X_i(t) = p_i + x_i(t)$ mentre, posto δ la deviazione della distanza tra due oscillatori rispetto alla loro distanza di equilibrio h , la forza agente su di essi sarà

$$f = \kappa(\delta + \alpha\delta^2)$$

Quindi la forza agente tra l' i -esimo oscillatore e i due tra i quali esso è posto si esprimerà come

$$\begin{aligned} F_i(x) &= F_i(x)^+ + F_i(x)^- = \\ &= \{ \kappa[(x_{i+1} - x_i) + \alpha(x_{i+1} - x_i)^2] \} + \{ \kappa[(x_{i-1} - x_i) + \alpha(x_{i-1} - x_i)^2] \} = \\ &= \kappa(x_{i+1} + x_{i-1} - 2x_i) [1 + \alpha(x_{i+1} - x_{i-1})] \end{aligned}$$

Adesso supponendo che tutti gli oscillatori abbiano eguale massa m e che siano date le condizioni al bordo, e quelle iniziali, si perviene alla seguente descrizione del sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{x}_i = F_i(x) \\ x_i(0) = p_i \\ \dot{x}_i(0) = 0 \\ x_0(t) = 0 = x_{N-1}(t) \end{array} \right. \quad \forall i = 0 \dots N - 1 \quad (2.1)$$

Nostro intento, adesso, è porre le opportune modifiche atte a far sì che esso non perda senso nel momento in cui andremo a operare il passaggio al limite che ci servirà per arrivare ad una formula che descriva non una catena di oscillatori, bensì un continuo unidimensionale. Siano ora: ρ la densità di massa omogenea, κ la costante di elasticità della forza agente tra due oscillatori. Di conseguenza passiamo a definire

$$m = \rho h \quad \kappa = \frac{k}{h} \quad c = \sqrt{\frac{k}{\rho}}$$

Adesso l'equazione in (2.1) si scriverà come segue:

$$\ddot{x}_i = c^2 \left(\frac{x_{i+1} + x_{i-1} - 2x_i}{h^2} \right) [1 + \alpha(x_{i+1} - x_{i-1})] \quad (2.2)$$

Operiamo un piccolo cambio di notazione per prepararci al passaggio dal discreto al continuo; scriveremo $x_i(t) = u(x, t)$, $x_{i+1}(t) = u(x + h, t)$, $x_{i-1}(t) = u(x - h, t)$. Adesso entra in gioco il lavoro condotto da Kruskal e Zabusky: essi cercarono un limite nel continuo per l'equazione (2.2) per il quale poi studiare numericamente e descrivere le soluzioni; nel loro lavoro posero condizioni al bordo periodiche con $u(x, t) = u(x + 2, t)$ e con dato iniziale $u(x, 0) = \cos x$. È significativo osservare che il loro successo si basò sull'idea di non tralasciare nello sviluppo in serie di Taylor della (2.2) i termini fino al quarto ordine di derivazione.

Adesso poiché

$$u(x \pm h) \simeq u(x) \pm u_x(x)h + u_{xx}(x)\frac{h^2}{2} \pm u_{xxx}(x)\frac{h^3}{3!} + u_{xxxx}(x)\frac{h^4}{4!} + o(h^5)$$

si avrà

$$\begin{aligned} \frac{x_{i+1} + x_{i-1} - 2x_i}{h^2} &= \frac{u(x+h, t) + u(x-h, t) - 2u(x, t)}{h^2} \simeq \\ &\simeq \frac{2}{h^2} \left(u(x, t) + u_{xx}(x, t)\frac{h^2}{2} + u_{xxxx}(x, t)\frac{h^4}{4!} - u(x, t) \right) = \\ &= u_{xx}(x, t) + \left(\frac{h^2}{12} \right) u_{xxxx}(x, t) + o(h^4) \end{aligned}$$

Per lo stesso motivo potremo scrivere

$$\alpha(x_{i+1} - x_{i-1}) \simeq (2\alpha h)u_x(x, t) + \left(\frac{\alpha h^3}{3} \right) u_{xxx}(x, t) + o(h^5)$$

Adesso finalmente arriviamo all'equazione che derivarono Kruskal e Zabusky:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx} (1 + (2\alpha h)u_x) + \frac{h^2}{12} u_{xxxx} \implies \\ \left(\frac{1}{c^2} \right) u_{tt} - u_{xx} &= \frac{h^2}{12} u_{xxxx} + (2\alpha h)u_x u_{xx} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Adesso osserviamo che per $\alpha \ll 1$ ed $h \ll 1$ le soluzioni della (2.3) si comportano qualitativamente come quelle dell'equazione delle onde unidimensionale $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, la quale ha come soluzione generale

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$$

ossia la somma di due arbitrarie onde viaggianti a destra e a sinistra entrambe alla velocità c . Questo ragionamento ci servirà a riscrivere la (2.3) in maniera da poter effettuare il limite di scala nella maniera più efficace.

Eseguiamo il seguente cambio di coordinate

$$\begin{cases} \xi \doteq x - ct \\ \tau \doteq (\alpha h)ct \end{cases}$$

e cerchiamo quindi una soluzione del tipo onda viaggiante ossia della forma

$$u(x, t) = y(\xi, \tau) = y(x - ct, \alpha hct).$$

È ragionevole supporre che $y(\xi, \tau)$ sia regolare ed uniformemente continua in τ ossia, $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tali che $|\tau - \tau_0| < \delta \Rightarrow |y(\xi, \tau) - y(\xi, \tau_0)| < \varepsilon$ per

$$|t - t_0| < T = \frac{\delta}{\alpha h c}$$

avremo che

$$|\alpha hct - \alpha hct_0| < \delta \Rightarrow |y(x - ct, \alpha hct) - y(x - ct, \alpha hct_0)| < \varepsilon$$

Questo significa che per tempi minori di T , la funzione $u(x, t) = y(x - ct, \alpha hct)$ è uniformemente approssimata dall'onda viaggiante $u^0(x, t) = y(x - ct, \alpha hct_0)$. Adesso osserviamo che a seguito del nostro cambio di coordinate le derivate parziali in t ed in x si scriveranno come

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k} = \frac{\partial^k}{\partial \xi^k}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = -c \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \alpha h \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2\alpha h \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \tau} + (\alpha h)^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right)$$

Di conseguenza il primo termine della (2.3) si esprimerà come

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} = -2\alpha h \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \tau} + (\alpha h)^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}$$

Quindi scopriamo, in definitiva, che la (2.3) nelle nuove coordinate sarà:

$$\begin{aligned} -2\alpha h y_{\xi\tau} + (\alpha h)^2 y_{\tau\tau} &= (2\alpha h) y_{\xi} y_{\xi\xi} + \left(\frac{h^2}{12}\right) y_{\xi\xi\xi\xi} \implies \\ \implies y_{\xi\tau} - \left(\frac{\alpha h}{2}\right) y_{\tau\tau} &= -y_{\xi} y_{\xi\xi} - \left(\frac{h}{24\alpha}\right) y_{\xi\xi\xi\xi} \end{aligned}$$

Adesso siamo nelle condizioni giuste per poter eseguire l'operazione di passaggio al limite a noi necessaria; assumendo che h ed α tendano a 0 con la stessa rapidità, $\frac{h}{\alpha}$ tenderà ad una quantità finita e pertanto possiamo definire

$$\delta = \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{\frac{h}{24\alpha}}$$

Quindi facendo tendere a 0 la distanza tra un oscillatore e l'altro, lo stato del sistema è descritto dalla

$$y_{\xi\tau} + y_{\xi} y_{\xi\xi} + \delta^2 y_{\xi\xi\xi\xi} = 0$$

Ponendo $v = y_{\xi}$ si ritrova l' *Equazione di Korteweg-de Vries* ossia:

$$v_{\tau} + v v_{\xi} + \delta^2 v_{\xi\xi\xi} = 0 \tag{2.4}$$

Osservazione 2.1.1. *Occorre osservare che se si riscala le variabili indipendenti $\tau \rightarrow \beta\tau$ e $\xi \rightarrow \gamma\xi$ allora la KdV assume la forma*

$$v_{\tau} + \left(\frac{\beta}{\gamma}\right) v v_{\xi} + \left(\frac{\beta}{\gamma^3}\right) \delta^2 v_{\xi\xi\xi} = 0. \tag{2.5}$$

Allora con un'appropriata scelta di β e γ la (2.4) assumerà una forma più generale ossia

$$v_{\tau} + \lambda v v_{\xi} + \mu v_{\xi\xi\xi} = 0.$$

Concludiamo il paragrafo ricapitolando quanto visto ossia il legame tra il reticolo di FPU e l'equazione di KdV. Data una soluzione $x_i(t)$ del sistema (2.1), si è presa una funzione $u(x, t)$ tale che $u(ih, t) = x_i(t)$ con $i = 1 \dots N$. Per reticoli con passo $h \rightarrow 0$ ed in presenza del parametro di non linearità α si avranno soluzioni $u(x, t)$ approssimabili tramite onde viaggianti a destra del tipo $u(x, t) = y(x - ct, \alpha hct)$ dove $y(\xi, \tau)$ è una funzione regolare. Infine la funzione $v(\xi, \tau) = y_\xi(\xi, \tau)$ è soluzione della (2.4) dove $\delta^2 = \frac{h}{24\alpha}$.

2.2 Discussione dei risultati

L'importanza dell'esperimento numerico di cui qui discutiamo non risiede tanto nel fatto che Kruskal e Zabusky dimostrarono che, nel limite continuo, le soluzioni della (2.2) erano anche soluzioni della (2.4), ma soprattutto nell'aver effettuato poi una descrizione molto interessante del comportamento delle sue soluzioni.

Essi notarono che i risultati potevano essere descritti nei termini di tre scale temporali. In una prima fase predominano i primi due termini della (2.4) e si presenta un fenomeno detto *overtaking*, ossia l'onda diventa sempre più ripida nelle regioni in cui ha pendenza negativa. Nella seconda fase, dopo che l'onda ha raggiunto una certa ripidità, interviene il terzo termine della (2.4) nel prevenire la rottura dell'onda. Va detto che l'influenza non immediata del terzo termine è dovuta al fatto che si è supposto $\delta \ll 1$. Inoltre oscillazioni di piccola ampiezza si formano a sinistra del fronte. Queste oscillazioni crescono in ampiezza per poi acquisire carattere autonomo ed un'ampiezza costante. Ma soprattutto esse assumono il profilo di onda solitaria che adesso andiamo a definire.

Definizione 2.1. Si chiama *onda solitaria* un'onda viaggiante $u(x, t)$ dove $x, t \in \mathbb{R}$, sono rispettivamente la variabile spaziale e temporale, della forma

$$u(x, t) = s(x - ct).$$

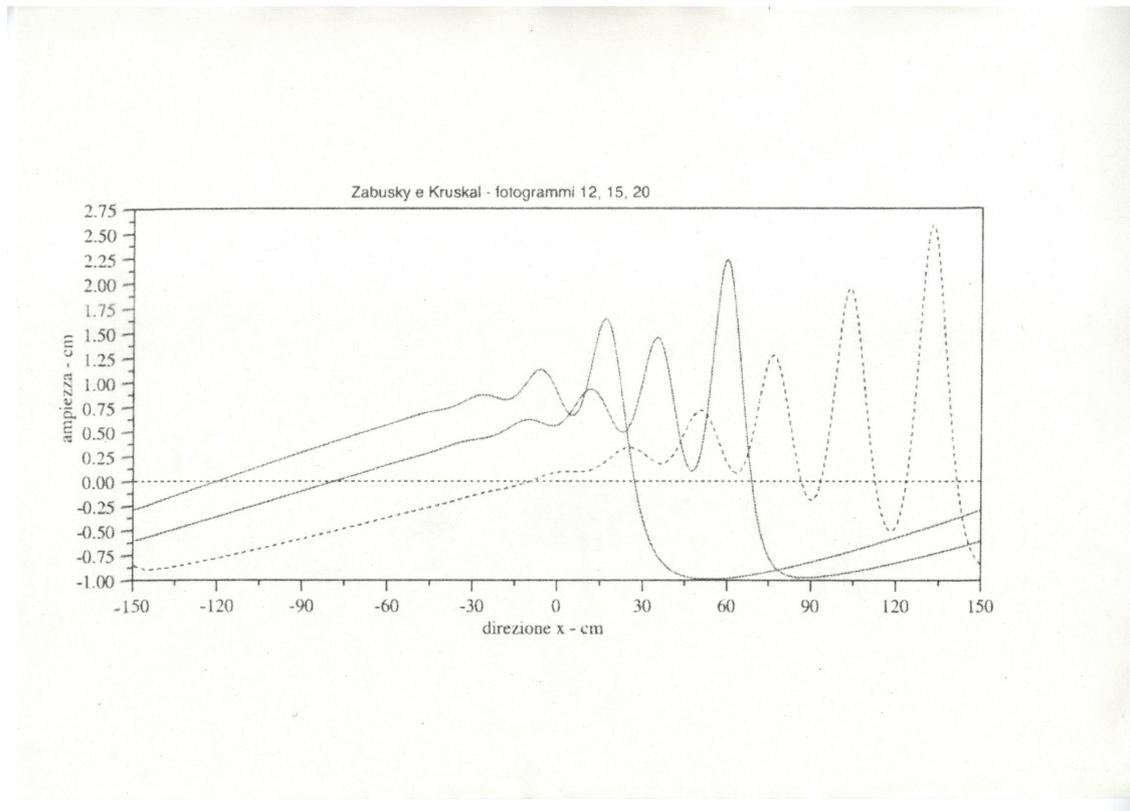


Figura 2.1: Prima fase: irripidimento del dato iniziale

Abitualmente la funzione $s(z)$ possiede limiti asintotici $\lim_{z \rightarrow \pm\infty} s(z)$ nulli (ma più in generale, tali limiti possono essere due costanti distinte).

Adesso deriveremo rapidamente l'espressione analitica di tali onde nel caso dell'equazione di KdV: andando a sostituire nella (2.4) abbiamo:

$$u_t + uu_x + \delta^2 u_{xxx} = 0$$

da cui

$$-cs' + ss' + \delta^2 s''' = 0$$

Adesso integriamo considerando le condizioni iniziali e successivamente moltiplichiamo per $2s'$ ritrovando

$$-cs + \frac{1}{2}s^2 + s'' = 0 \implies -2css' + s^2s + 2s's'' = 0$$



Figura 2.2: Seconda fase: emersione di onde solitarie

Infine integriamo di nuovo ricordando che $s' = 0$ così da pervenire alla

$$-cs^2 + \frac{1}{3}s^3 + (s')^2 = 0$$

che ha come soluzione

$$s(x) = 3c \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\sqrt{c}}{2} x \right] \quad c \geq 0 \quad (2.6)$$

Poiché, come si evince dalla (2.6), l'ampiezza di tali onde è proporzionale alla loro velocità, si assiste ad un fenomeno molto interessante: le più alte, e quindi più veloci, che si trovano sulla sinistra, raggiungono e superano le più basse e meno veloci. E qui si mostra la peculiarità di queste particolari onde solitarie. Due onde che collidono, escono dopo la collisione con un profilo d'onda immutato oltrepassandosi a vicenda; l'unica variazione risulta essere la loro fase. Questo è ciò che avviene nella terza ed

ultima fase temporale.

Poiché la collisione di due o più onde solitarie soluzione della KdV non genera la loro rottura né dispersione di quest'ultime, esse furono chiamate *Solitoni*, ad indicare il loro comportamento particellare.

In figura (2.3) mostriamo un esempio concreto di simulazione numerica, per due onde viaggianti il cui profilo tende a 0 per $x \rightarrow \pm\infty$. Vediamo come l'onda più alta si muove più velocemente, raggiunge la seconda e collide con essa. Si vede chiaramente come i due solitoni siano ben distinguibili sia prima che dopo la collisione; si osservi che il fatto che le rispettive traiettorie non coincidono, sia prima che dopo la collisione, e quindi che entrambi i solitoni hanno subito uno spostamento di fase. In figura si nota altresì che nella regione in cui avviene la collisione, il massimo è minore rispetto all'ampiezza del maggiore dei due solitoni e questo implica l'assenza di una sovrapposizione di tipo lineare in quel punto.

Il fatto che i solitoni riemergano dalla collisione esattamente con lo stesso profilo, è sorprendente dato che si potrebbe pensare che l'alta non linearità potrebbe infrangerli durante il processo di collisione.

Infine, va osservato che questa proprietà è importante perché mostra che l'energia può propagarsi in pacchetti stabili e localizzati senza subire alcun effetto di dispersione.

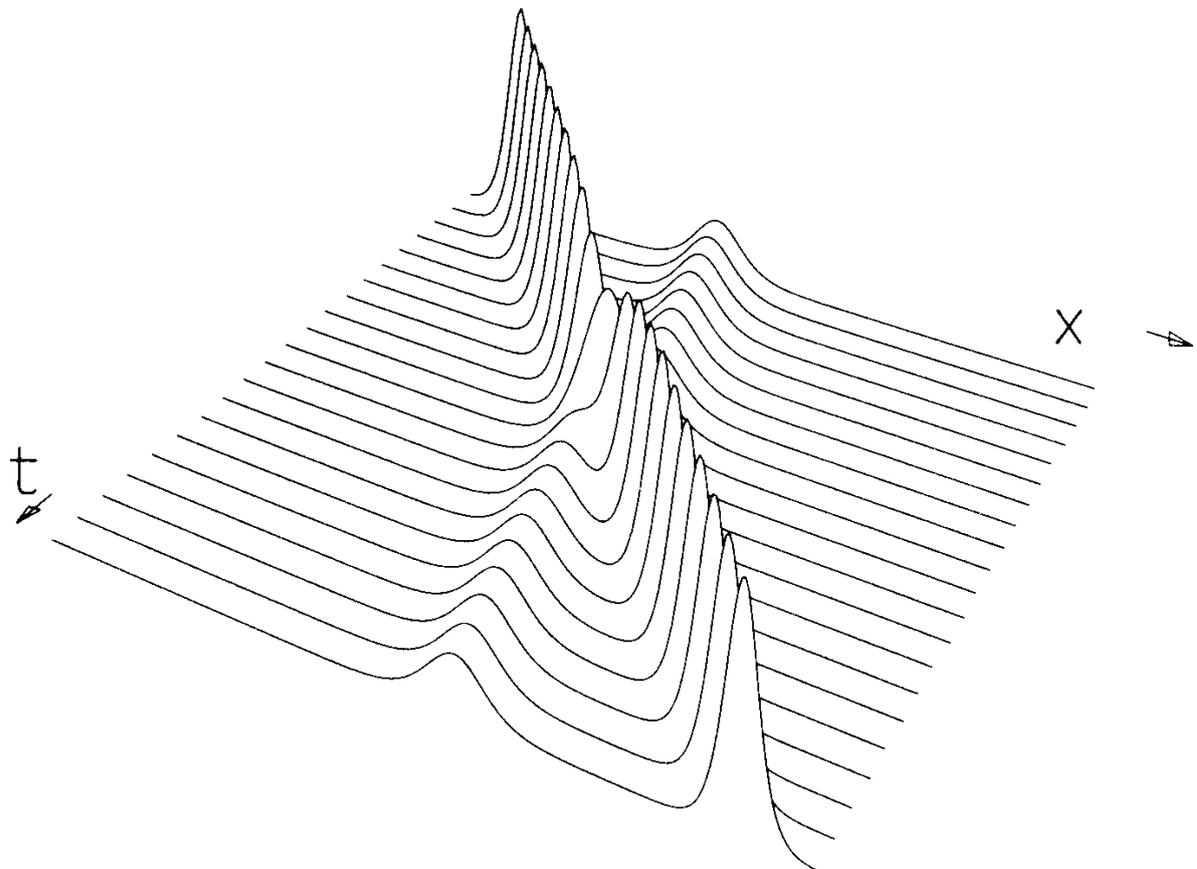


Figura 2.3: Collisione di due solitoni

Capitolo 3

Sulla propagazione di onde lineari

Per un sistema lineare che descrive una propagazione ondosa, la soluzione standard, ossia quella data dal metodo di Fourier, è un profilo d'onda somma di esponenziali oscillanti del tipo seguente:

$$\phi(x, t) = Ae^{i[kx - \omega t]} \quad (3.1)$$

dove k rappresenta il *numero d'onda* ossia il numero di oscillazioni complete nell'intervallo $[0, 2\pi]$. Quest'ultimo è messo in relazione con la lunghezza d'onda λ da $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, dove λ rappresenta la distanza tra due massimi (o due minimi). Inoltre chiamiamo ω la pulsazione dell'onda ed A è l'ampiezza dell'onda, la quale, è indipendente dalla velocità di quest'ultima.

La richiesta che $\phi(x, t)$ soddisfi un'equazione lineare è espressa da una relazione tra k e ω ossia da

$$\mathcal{L}(k, \omega) = 0 \quad (3.2)$$

che va sotto il nome di *Relazione di dispersione*. Essa è la caratteristica più importante di un sistema lineare, in quanto rispecchia la forma dell'equazione lineare di cui $\phi(x, t)$ dovrà essere soluzione.

Definizione 3.1. Dicesi velocità di fase il numero

$$c_f = \frac{\omega}{k}.$$

Essa rappresenta la velocità di propagazione dell'onda.

Dicesi velocità di gruppo

$$c_g = \frac{d\omega}{dk}$$

Essa esprime quanto velocemente si propaga un pacchetto d'onde isolato e rappresenta la velocità con cui viene trasportata l'energia da onde di lunghezza λ .

Si osservi che per un dato sistema lineare possono esservi più velocità di gruppo distinte, corrispondenti a diverse soluzioni di (3.2), e che dato un pacchetto d'onda, in genere velocità di fase e velocità di gruppo saranno diverse, il che implica che esso cambierà forma.

Con la parola dispersione si intende che, per $\omega \in \mathbb{R}$, onde con un diverso numero d'onda k avranno differenti velocità di fase e di gruppo. Inoltre le componenti di un'onda si disperderanno o diffonderanno in misura diversa durante la propagazione.

Questo implica che c_f e c_g possono dipendere da k .¹

Nel caso più generale $\omega(k)$ è un numero complesso:

$$\omega = \Re(\omega) + i\Im(\omega)$$

In tal caso la (3.1) potrà assumere due comportamenti: crescere esponenzialmente se $\Im(\omega) > 0$ oppure annullarsi molto rapidamente nel caso in cui $\Im(\omega) < 0$.

Nell'ultimo caso si dice che l'equazione è *dissipativa*; questo perchè per $t \rightarrow \infty$ si ha

$$A \simeq e^{-|\Im(\omega)|t}$$

Adesso esibiamo un esempio che mostra quanto sia profonda la differenza tra i due casi.

Esempio 3.0.1.

¹Osserviamo che tale affermazione non vale per l'equazione delle onde classica.

Prendiamo in considerazione la seguente equazione

$$u_t = \delta u_{xx} \tag{3.3}$$

Se $\delta > 0$ allora siamo dinanzi all'equazione del calore unidimensionale, la quale, è eminentemente di tipo dissipativo con $\omega = -k^2$. In questo esempio rimarremo nell'ambito di una generica $\omega = -i\delta k^2$ ossia il limite entro il quale si ha una equazione con soluzioni di tipo dissipativo. Volendo impostare il problema di Cauchy associato ad essa con

$$u(x, 0) = f(x).$$

Proviamo a calcolare esplicitamente $u(x, t)$. Il dato $u(x, 0)$ può essere rappresentato attraverso un integrale di Fourier come

$$u(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} A(k) e^{ikx} dx \quad \text{dove} \quad A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} u(x, 0) e^{-ikx} dx$$

e quindi per la soluzione abbiamo, se $t \geq 0$,

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} A(k) e^{i[kx - \omega(k)t]} dk \tag{3.4}$$

Partendo dalla (3.4) possiamo scrivere

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dk \left\{ \int_{\mathbb{R}} u(\xi, 0) e^{-ik\xi} d\xi \right\} e^{i(kx + i\delta k^2 t)}$$

Assumendo che $u(x, t)$ sia sufficientemente regolare, possiamo invertire l'ordine di integrazione ed avere

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} e^{i\{(x-\xi)k - \delta k^2 t\}} dk \right\} u(\xi, 0) d\xi$$

Ora operiamo la sostituzione $\eta = x - \xi$ e spezziamo l'integrale interno così da poterlo valutare meglio. Troviamo

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}} \cos(k\eta) e^{-\delta k^2 t} dk \quad I_2 = \int_{\mathbb{R}} \sin(k\eta) e^{-\delta k^2 t} dk$$

Adesso osserviamo che I_2 è dispari per cui, integrando su tutto \mathbb{R} troviamo $I_2 = 0$; per poter valutare I_1 , introduciamo le quantità $\lambda^2 = \delta k^2 t$ ed $a = \frac{\eta}{\sqrt{\delta t}}$. Il tutto si riscriverà come

$$I_1(a) = \frac{1}{\sqrt{\delta t}} \int_{\mathbb{R}} \cos(a\lambda) e^{-\lambda^2} d\lambda$$

Quindi derivando in a e poi integrando per parti in λ si hanno le seguenti relazioni:

$$\frac{d}{da} I_1 = -\frac{1}{2} a I_1 \quad I_1(0) = \sqrt{\frac{\pi}{\delta t}}$$

Adesso finalmente, sfruttando il fatto che

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda^2} d\lambda = \sqrt{\pi}$$

troviamo che

$$I_1 = \sqrt{\frac{\pi}{\delta t}} e^{-\frac{1}{4} a^2}$$

In conclusione

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\delta t}} \int_{\mathbb{R}} u(\xi, 0) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\delta t}} d\xi \quad (3.5)$$

Se scegliamo ad esempio come dato iniziale $u(x, 0) = Ae^{-x^2}$, ovvero una gaussiana, vediamo subito che per $t \rightarrow \infty$ $u(x, t) \rightarrow 0$. Questo comportamento è ben descritto dalla figura

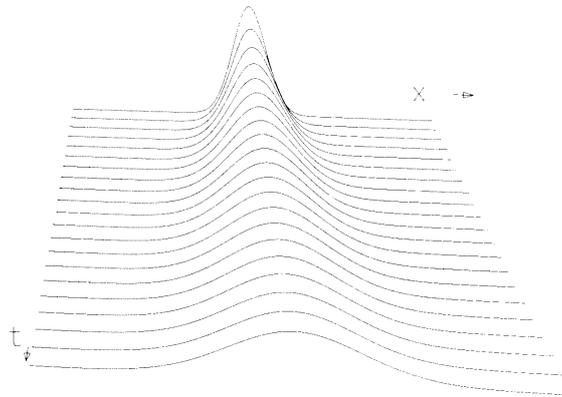


Figura 3.1: Dissipazione di un dato iniziale con profilo gaussiano ($\delta = 1$)

Tutt'altro tipo di fenomeno si ha se nella (3.3) se si pone $\delta = -i$; moltiplicando per i essa diviene

$$i u_t = u_{xx} \quad (3.6)$$

Questa è l'equazione di Schrodinger (linearizzata), la quale, è un'equazione puramente dispersiva con $\omega = -k^2$, $c_f = -k$ e $c_g = -2k$. Ponendo, anche in

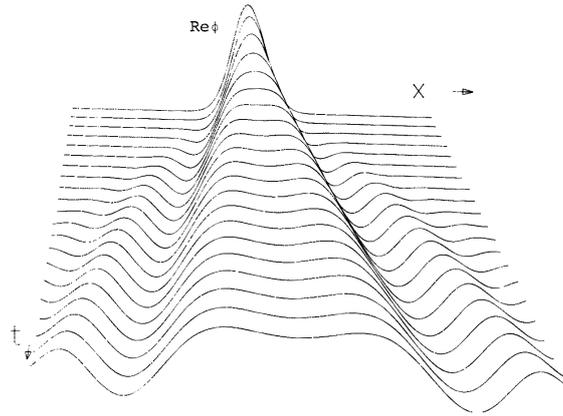


Figura 3.2: Dispersione di un dato iniziale con profilo gaussiano ($\delta = -i$)

questo caso, un dato iniziale del tipo $u(x, 0) = Ae^{-x^2}$ si ha una propagazione per $t > 0$ di tipo dispersivo, come mostrato in figura (3.2).

Abbiamo voluto brevemente descrivere alcuni comportamenti tipici di soluzioni di equazioni lineari, per enfatizzare ciò che non accade nel caso di onde di tipo solitonico. Va detto, infine, che, per loro natura, le onde solitarie sono una manifestazione sia di effetti di natura dispersiva che di effetti di natura nonlineare; infatti l'esistenza dei solitoni è propriamente dovuta al fatto che la nonlinearietà bilancia gli effetti di dispersione; infine, questo è il motivo per cui pacchetti d'onda che si propagano secondo la (2.4) risentono di perdite di energia praticamente nulle.

Capitolo 4

Spettri e costanti del moto

4.1 Perché i solitoni sono interessanti?

In questa sezione cercheremo di spiegare perché è così rilevante per noi l'esistenza di soluzioni di tipo solitonico per la KdV: verrà qui presentata un'analisi degli esperimenti numerici che ci consentirà di capire quanto sia profondo il legame tra solitoni ed altre ben più delicate proprietà di cui gode l'equazione da noi presa in considerazione.

Cominciamo ritornando alla (2.6), che esprime il profilo di un solitone per l'equazione di KdV:

$$s(x) = 3c \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\sqrt{c}}{2} x \right]$$

Osserviamo che $s(x)$ è una funzione pari e che decade esponenzialmente per $|x| \rightarrow \infty$. La teoria classica ci dice che per le equazioni lineari, in particolare per quelle a coefficienti costanti, tutte le soluzioni sono ricavabili dalla sovrapposizione di soluzioni di tipo esponenziale. Al contrario, per le equazioni nonlineari in genere non è possibile trovare nuove soluzioni sovrapponendone altre di un determinato tipo, e quindi non ci si aspettano famiglie particolari di funzioni che intervengano nella formazione di tutte le soluzioni. Ciò detto, fu molto sorprendente quel che osservarono Kruskal e Zabusky analizzando nelle loro simulazioni: tutte le soluzioni

della (2.4) si evolvono in gruppi di onde solitarie. Una precisa formulazione di questo fatto è la seguente

Osservazione 4.1.1. *Sia $u(x, t)$ una soluzione numerica dell'equazione di KdV e sia essa definita $\forall x, t \in \mathbb{R}$ e tendente a 0 per $x \rightarrow \pm\infty$.*

Allora esiste un insieme discreto di scalari positivi $\{c_1, \dots, c_N\}$, detti autovelocità di u , ed un insieme di spostamenti di fase $\{\theta_j^\pm\}$ tali che

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} u(x + ct, t) = \begin{cases} s(x - \theta_j^\pm; c) & c = c_j \\ 0 & c \neq c_j \end{cases} \quad (4.1)$$

E' il caso di fare alcune osservazioni cruciali.

Considerando una generica equazione d'evoluzione del tipo $u_t = K(u)$, nella quale non compaiono esplicitamente x e t , le sue soluzioni saranno invarianti per traslazioni in t e in x . Considerando una di queste soluzioni $u(x, t)$, avremo che, per un certo valore di c ,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x + ct, t)$$

esiste finito $\forall x$. Si tratta evidentemente di un'onda viaggiante; questo ci porta a poter identificare le autovelocità di una soluzione u come quei valori di c per i quali il limite di cui sopra esiste (e non è la funzione nulla). Si noti che se $u(x, t)$ è traslata di a in x e b in t allora, l'autovelocità rimane la stessa mentre si ha uno spostamento di fase di $a - cb$.

Adesso, poichè le soluzioni sono univocamente determinate dai dati iniziali, e dato che le autovelocità sono funzioni delle soluzioni, ne risulta che le autovelocità sono funzioni dei dati iniziali.

Da queste osservazioni, e in particolare dall'invarianza per traslazioni segue che le autovelocità sono invarianti funzionali ossia integrali primi. Quindi se abbiamo

$$u(x, t_1) = f_1 \quad u(x, t_2) = f_2$$

allora

$$c_j(f_1) = c_j(f_2).$$

Similmente anche $\theta_j^+ - \theta_j^-$ è un integrale primo. Adesso poichè il numero di queste autovelocità appare illimitato, considerate le precedenti osservazioni, siamo portati a dire che se le soluzioni della (2.4) si comportano, per t grande, secondo la (4.1.1) allora l'equazione (2.4) possiede infiniti integrali primi.

4.2 Coppie di Lax

Ci occupiamo ora di una questione molto interessante quanto delicata ossia l'esistenza per la KdV di infiniti integrali primi del moto. Per farlo sarà necessario introdurre un formalismo semplice ed efficace, che sarà il primo passo verso un risultato assai sorprendente che ci permetterà di scovare una relazione con l'*equazione di Schrodinger*.

Iniziamo definendo in maniera rigorosa alcune nozioni precedentemente menzionate, ma che nel seguito saranno oggetto di una più approfondita trattazione.

Definizione 4.1 (Leggi di conservazione). Consideriamo un'equazione d'evoluzione del tipo

$$u_t = K(u, u_x, u_{xx}, \dots)$$

Allora una legge di conservazione, per l'equazione d'evoluzione, è un'identità della forma

$$J_t + F_x = 0 \tag{4.2}$$

valida per qualunque soluzione $u(x, t)$ dell'equazione, dove $J = J(u, u_x, u_{xx}, \dots)$ e $F = F(u, u_x, u_{xx}, \dots)$ sono rispettivamente la quantità conservata ed $F = \text{div } J$ è il flusso ad essa associato.

Definizione 4.2 (Integrali primi). Supponendo che $u(x, t)$ si annulli con le sue derivate per $x \rightarrow \pm\infty$, si chiama *costante del moto* o integrale primo del moto il

numero

$$I = \int_{\mathbb{R}} J(u, u_x, u_{xx}, \dots) dx = C \quad (4.3)$$

dove J è una quantità conservata nel senso della definizione precedente.

Studiamo ora le costanti del moto per l'equazione di KdV. Per facilitarci i calcoli scegliamo opportuni coefficienti e quindi prendiamo l'equazione nella forma

$$4u_t = 6uu_x + u_{xxx}.$$

Possiamo verificare facilmente che la KdV può essere vista essa stessa come una legge di conservazione se poniamo

$$F = u_{xx} + 3u^2 \quad J = -4u.$$

Infatti si ha

$$\begin{cases} F_x = u_{xxx} + 6uu_x \\ J_t = -4u_t \end{cases}$$

e la KdV si scriverà come $-J_t = F_x$ ossia $J_t + F_x = 0$. Pertanto esiste una costante del moto della forma indicata dalla (4.3). Consideriamo adesso la quantità

$$F = 4u^3 + 2uu_{xx} - u_x^2 \quad J = -4u^2$$

. Anche in questo caso abbiamo:

$$\begin{cases} F_x = 12uu_x + 2u_x u_{xx} + 2uu_{xxx} - 2u_x u_{xx} = 12uu_x + 2uu_{xxx} \\ J_t = -8uu_t \end{cases}$$

Dividendo per $2u$ ritroviamo la KdV in forma di $F_x = -J_t$ esattamente come prima. Questo ci suggerisce che di integrali primi effettivamente ne esistono diversi e proprio nella loro ricerca entra in gioco il formalismo introdotto da Lax: il metodo delle coppie di Lax si basa sulla possibilità di scrivere un'equazione d'evoluzione, con l'utilizzo di opportuni operatori, nella seguente forma:

$$\mathbf{L}_t = [\mathbf{B}, \mathbf{L}] \quad (4.4)$$

dove $[\mathbf{B}, \mathbf{L}] \doteq \mathbf{BL} - \mathbf{LB}$ è il commutatore degli operatori \mathbf{B} ed \mathbf{L} . E' il caso di cominciare a capire di che natura e con quali criteri dovranno essere scelti gli operatori di nostro interesse affinché il metodo sia utilizzabile. Supponiamo di avere $u = u(x, t)$ in uno spazio di funzioni \mathcal{B} . Inoltre supponiamo di poter associare ad u un operatore autoaggiunto su uno spazio di Hilbert \mathbf{L} con la seguente proprietà: se u evolve nel tempo secondo un'equazione di evoluzione $u_t = K(u)$ allora la variazione nel tempo di $\mathbf{L}(t)$ dovrà avvenire come

$$\mathbf{L}(t) = \mathbf{U}(t)\mathbf{L}(0)\mathbf{U}(t)^{-1} \quad (4.5)$$

dove \mathbf{U} è una famiglia fortemente continua di operatori unitari. Si ottiene così una famiglia di operatori $\mathbf{L}(t)$ unitariamente equivalenti. Sotto queste condizioni si ha che lo spettro dell'operatore autoaggiunto non varia nel tempo e quindi costituisce un insieme di integrali primi per l'equazione presa in esame.

Il passo cruciale del metodo è l'assunzione seguente: se $\mathbf{L}(t)$ è un gruppo a un parametro che verifica la (4.5), allora, dato \mathbf{B} il generatore infinitesimale del gruppo unitario $\mathbf{U}(t)$, si ha che \mathbf{B} è antiaggiunto ed $\mathbf{L}(t)$ soddisfa la (4.4).

Dimostrazione. Si tratta di mostrare che l'equazione (4.4) fa variare $\mathbf{L}(t)$ all'interno di una classe di similarità ossia dedurre, a partire dall'assunto che al variare di t , i vari $\mathbf{L}(t)$ siano unitariamente equivalenti, che lo spettro di $\mathbf{L}(t)$ non dipenda dal tempo. Questa proprietà si esprime dicendo che l'equazione (4.4) induce una deformazione *isospettrale*.

Sappiamo che

$$\mathbf{L}(t) = \mathbf{U}(t)\mathbf{L}(0)\mathbf{U}(t)^{-1}.$$

Di conseguenza, poichè l'operatore \mathbf{U} è unitario, possiamo affermare che

$$\mathbf{L}(0) = \mathbf{U}^*(t)\mathbf{L}(t)\mathbf{U}(t).$$

Adesso, derivando rispetto al parametro temporale t si ha:

$$0 = \frac{d}{dt}\mathbf{L}(0) = \frac{d}{dt}(\mathbf{U}^*\mathbf{L}\mathbf{U}) = \mathbf{U}_t^*\mathbf{L}\mathbf{U} + \mathbf{U}^*\mathbf{L}_t\mathbf{U} + \mathbf{U}^*\mathbf{L}\mathbf{U}_t. \quad (4.6)$$

Ora grazie al teorema (1.0.2) sappiamo che la derivata di un operatore unitario rispetto ad un parametro si può scrivere come composizione dell'operatore stesso con il generatore del gruppo pertanto abbiamo $\mathbf{U}_t = \mathbf{B}\mathbf{U}$. Resta da capire come esprimere \mathbf{U}_t^* :

$$\mathbf{U}_t^* = (\mathbf{U}_t)^* = (\mathbf{B}\mathbf{U})^* = \mathbf{U}^*\mathbf{B}^*.$$

Ma abbiamo anche che

$$\begin{aligned} \mathbf{U}\mathbf{U}^* = \mathbf{I} &\implies (\mathbf{U}\mathbf{U}^*)_t = \mathbf{U}_t\mathbf{U}^* + \mathbf{U}\mathbf{U}_t^* = 0 \implies \mathbf{U}\mathbf{U}_t^* = -\mathbf{U}_t\mathbf{U}^* = -\mathbf{B}\mathbf{U}\mathbf{U}^* \implies \\ &\implies \mathbf{U}_t^* = -\mathbf{U}^*\mathbf{B}. \end{aligned}$$

Quindi troviamo che $\mathbf{B}^* = -\mathbf{B}$ ossia \mathbf{B} è antiaggiunto.

Andando a sostituire nella (4.6) troviamo che i termini della somma possono essere espressi come

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_t^*\mathbf{L}\mathbf{U} &= -\mathbf{U}^*\mathbf{B}\mathbf{L}\mathbf{U} \\ \mathbf{U}^*\mathbf{L}_t\mathbf{U} &= \mathbf{U}^*\mathbf{L}_t\mathbf{U} \\ \mathbf{U}^*\mathbf{L}\mathbf{U}_t &= \mathbf{U}^*\mathbf{L}\mathbf{B}\mathbf{U} \end{aligned}$$

e di conseguenza la (4.6) porta ad avere

$$0 = \mathbf{U}^*(-\mathbf{B}\mathbf{L} + \mathbf{L}_t + \mathbf{L}\mathbf{B})\mathbf{U} \iff \mathbf{L}_t = \mathbf{B}\mathbf{L} - \mathbf{L}\mathbf{B} = [\mathbf{B}, \mathbf{L}]$$

□

Osservazione 4.2.1. *Osserviamo, però, che il problema, sollevato dal voler utilizzare tale metodo, risiede, in genere, nella difficoltà di trovare una legge che associ correttamente e in maniera univoca una funzione u ad un data famiglia di operatori \mathbf{L} con le proprietà richieste.*

4.3 Isospettralità e l'operatore di Schrödinger

In questo paragrafo arriveremo ad enunciare, prima in senso generale e poi in maniera specifica per l'equazione di KdV, un principio che basa la sua validità

proprio sulla possibilità di poter scrivere una data equazione d'evoluzione nei termini prescritti da Lax.

Preso un arbitrario $\psi(0)$ in \mathcal{H} , poniamo

$$\psi(t) = \mathbf{U}(t) \psi(0) \tag{4.7}$$

dove $\mathbf{U}(t)$ è una famiglia fortemente continua di operatori unitari. Derivando rispetto a t la definizione di $\psi(t)$ troviamo che

$$\psi(t)_t = [\mathbf{U}(t) \psi(0)]_t = \mathbf{B}(t) \psi(t)$$

dove $\mathbf{B}(t) = \mathbf{U}_t(t) \mathbf{U}(t)^{-1}$ pertanto

$$\psi_t = \mathbf{B}(t) \psi(t) \tag{4.8}$$

e quindi possiamo considerare $\psi(t)$ come soluzione della equazione differenziale (4.8) con dato iniziale $\psi(0)$. E' facile verificare (con un calcolo identico a quello del paragrafo precedente) che gli operatori $\mathbf{B}(t)$ sono antiaggiunti. Osserviamo che è del tutto naturale, nell'ambito delle equazioni alle derivate parziali, far si che un dato iniziale assegnato, possa evolvere nel tempo grazie alla composizione con gruppi di operatori.

E' il momento di enunciare l'importante principio nel quale si esplicita l'utilità del metodo introdotto da Lax. Qui non lo dimostreremo poichè la dimostrazione risulta essere particolarmente complicata, ma lo applicheremo limitatamente al caso, di nostro interesse, dell'equazione di Korteweg - de Vries. In riferimento ad [4] enunciamo il seguente

Principio di isospettralità

Siano $\mathbf{L}(t)$ gruppo ad un parametro di operatori autoaggiunti e $\mathbf{B}(t)$ famiglia di operatori antiaggiunti rispettivamente su uno spazio di Hilbert \mathcal{H} . Supponiamo che essi soddisfino l'equazione (4.4) e che $\psi(t)$ sia soluzione della (4.8). Allora se $\psi(0)$ è l'autovettore di $\mathbf{L}(0)$ associato all'autovalore λ , ne consegue che $\psi(t)$ è l'autovettore associato ad $\mathbf{L}(t)$ con lo stesso autovalore λ , ossia lo spettro è un invariante temporale.

Ricapitoliamo cosa indica il Principio: ricordando la (4.7) e la (4.4), il Principio ci dice che se esiste una famiglia di operatori lineari $\mathbf{L}(t)$ su uno spazio di Hilbert, tali che resti soddisfatta la (4.4) allora

$$\mathbf{L}(0) \psi(0) = \lambda \psi(0) \implies \mathbf{L}(t) \psi(t) = \lambda \psi(t)$$

Adesso è il momento di applicare il Principio di isospettralità al caso specifico da noi preso in esame ossia all'equazione di Korteweg-de Vries. Prendiamo come spazio di Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$, data una soluzione $u(x, t)$ dell'equazione di KdV, definiamo gli operatori $\mathbf{L} = -\partial^2 + u$ e $\mathbf{B} = -4\partial^3 + 3(u\partial + \partial u)$. Verificheremo che essi soddisfano l'equazione di Lax e come conseguenza vale il Principio di isospettralità. Infine l'equazione di Lax diviene proprio quella di Korteweg-de Vries.

Notiamo che $\mathbf{L}(t)$ è autoaggiunto mentre $\mathbf{B}(t)$ è antiaggiunto. Questo perchè l'operatore ∂ è antiaggiunto così come le sue potenze dispari, mentre l'operatore di moltiplicazione per u è autoaggiunto, di conseguenza l'operatore $u\partial + \partial u$ ossia l'anticommutatore è anch'esso antiaggiunto.

Teorema 4.3.1. *Supponiamo che $u(x, t)$ sia una soluzione dell'equazione di KdV*

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

con dato iniziale $u(x, 0)$ nello spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ e che $\psi(x)$ sia un'autofunzione dell'equazione di Schrödinger con potenziale $u(x, 0)$ ed autovalore associato λ :

$$\mathbf{L}(0) \psi(x) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) + u(x, 0) \psi(x) = \lambda \psi(x)$$

dove $\psi(x) = \psi(x, 0)$. Sia ora $\psi(x, t)$ soluzione dell'equazione di evoluzione

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \mathbf{B}(t) \psi(x, t) = \left[-4\frac{\partial^3}{\partial x^3} + 3 \left(u(x, t) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) \right) \right] \psi(x, t).$$

Allora ne consegue che $\psi(x, t)$ è un'autofunzione per l'equazione di Schrödinger con potenziale $u(x, t)$ associata allo stesso autovalore λ :

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) + u(x, t) \psi(x, t) = \lambda \psi(x, t).$$

Dimostrazione. Dobbiamo provare fondamentalmente che dati i suddetti operatori, sussiste un'uguaglianza tra la KdV e l'equazione di Lax¹:

$$\mathbf{L}_t = (-\partial^2 + u)_t = u_t.$$

Mostriamo che $[\mathbf{B}, \mathbf{L}] = 6uu_x - u_{xxx}$. Si ha

$$\mathbf{B}\mathbf{L} = (-\partial^2 + u)[-4\partial^3 + 3(u\partial + \partial u)] = 4\partial^2\partial^3 - 3\partial^2u\partial - 3\partial^2\partial u - 4u\partial^3 + 3uu\partial + 3u\partial u$$

$$\mathbf{L}\mathbf{B} = [-4\partial^3 + 3(u\partial + \partial u)](-\partial^2 + u) = 4\partial^3\partial^2 - 3u\partial\partial^2 - 3\partial u\partial^2 - 4\partial^3u + 3u\partial u + 3\partial uu$$

Di conseguenza avremo:

$$\begin{aligned} [\mathbf{B}, \mathbf{L}] &= 4(\partial^2\partial^3 - \partial^3\partial^2) - 4(\partial^3u - u\partial^3) - 3(u\partial\partial^2 - \partial^2u\partial) + \\ &+ 3(u\partial u - uu\partial) - 3(\partial u\partial^2 - \partial^2\partial u) + 3(\partial uu - u\partial u) = \quad (4.9) \\ &= 4[\partial^3, \partial^2] - 4[\partial^3, u] - 3[u\partial, \partial^2] + 3[u\partial, u] - 3[\partial u, \partial^2] + \\ &+ 3[\partial u, u]. \end{aligned}$$

I sei commutatori ritrovati hanno il seguente significato:

$$[\partial^3, \partial^2](v) = (\partial^5 - \partial^5)(v) = 0$$

$$\begin{aligned} [\partial^3, u](v) &= (\partial^3u - u\partial^3)(v) = \partial^3(uv) - u\partial^3v = \partial(\partial(\partial(uv))) - u\partial^3v = \\ &= \partial(\partial(u_xv + u\partial v)) - u\partial^3v = \partial(u_{xx}v + u_x\partial v + u_x\partial v + u\partial^2v) - u\partial^3v = \\ &= u_{xxx}v + u_{xx}\partial v + u_{xx}\partial v + u_x\partial^2v + u_{xx}\partial v + u_x\partial^2v + u_x\partial^2v + \\ &+ u\partial^3v - u\partial^3v = (u_{xxx} + 3u_{xx}\partial + 3u_x\partial^2)(v) \end{aligned}$$

¹Utilizzeremo la notazione $\partial \doteq \frac{\partial}{\partial x}$

$$\begin{aligned}
 [u\partial, \partial^2](v) &= (u\partial^3 - \partial^2 u\partial)(v) = u\partial^3 v - \partial(u_x\partial v + u\partial^2 v) = \\
 &= u\partial^3 v - (u_{xx}\partial v + u_x\partial^2 v + u_x\partial^2 v + u\partial^3 v) = (-u_{xx}\partial - 2u_x\partial^2)(v)
 \end{aligned}$$

$$[u\partial, u](v) = (u\partial u - u^2\partial)(v) = u\partial(uv) - u^2\partial v = u(u_x v + u\partial v) - u^2\partial v = uu_x(v)$$

$$\begin{aligned}
 [\partial u, \partial^2](v) &= (\partial u\partial^2 - \partial^3 u)(v) = \partial(u\partial^2 v) - \partial^3(uv) = \\
 &= u_x\partial^2 v + u\partial^3 v - \partial^2(u_x v + u\partial v) = \\
 &= u_x\partial^2 v + u\partial^3 v - \partial(u_{xx}v + u_x\partial v + u_x\partial v + u\partial^2 v) = \\
 &= u_x\partial^2 v + u\partial^3 v - u_{xxx}v + u_{xx}\partial v + u_{xx}\partial v + u_x\partial^2 v + \\
 &+ u_{xx}\partial v + u_x\partial^2 v + u_x\partial^2 v + u\partial^3 v = \\
 &= (-u_{xxx} - 3u_{xx}\partial - 2u_x\partial^2)(v)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [\partial u, u](v) &= (\partial u^2 - u\partial u)(v) = \partial(u^2 v) - u\partial(uv) = \\
 &= 2uu_x v + u^2\partial v - u(u_x v + u\partial v) = \\
 &= 2uu_x v + u^2\partial v - uu_x v - u^2\partial v = uu_x(v)
 \end{aligned}$$

Andando a sostituire nella (4.9) si ha che:

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{B}, \mathbf{L}] &= -4(u_{xxx} + 3u_{xx}\partial + 3u_x\partial^2) - 3(-u_{xx}\partial - 2u_x\partial^2) + 2uu_x - \\
 &- 3(-u_{xxx} - 3u_{xx}\partial - 2u_x\partial^2) + 3uu_x = \\
 &= -4u_{xxx} - 12u_{xx}\partial - 12u_x\partial^2 + 3u_{xx}\partial + 6u_x\partial^2 + 6uu_x + \\
 &+ 3u_{xxx} + 9u_{xx}\partial + 6u_x\partial^2 = 6uu_x - u_{xxx}
 \end{aligned}$$

Applicando il principio di isospettralità concludiamo la dimostrazione del teorema. □

Bibliografia

- [1] M. J. Ablowitz - P.A. Clarkson, *Solitons, Nonlinear evolution equations and Inverse scattering*. Cambridge University Press (1991).
- [2] A. Newell, *Solitons in Mathematics and Physics*. Society for Industrial and applied Mathematics (1985).
- [3] Eilbeck, Gibbon, Morris, Dodd, *Solitons and Nonlinear wave equations*. Accademic Press (1984).
- [4] R. S. Palais, *The Symmetries of Solitons*. Bulletin of the American Mathematical Society (1997).
- [5] P. D. Lax, *Functional Analysis*. Wiley-Interscience Series in Pure and Applied Mathematics (2002).
- [6] P. D. Lax, *Selected Papers, Vol. I*. Springer (2005).
- [7] N. J Zabusky, M. D. Kruskal, *Interaction of Solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states*. Physical Review Letters, 15 (1965).
- [8] S. Salsa, *Equazioni a derivate parziali - Metodi, modelli e applicazioni*. Springer (2004)