SEMINARIO
ANALISI SUPERIORE
PROF. VLADIMIR GEORGIEV
UNIVERSITA' DI PISA - A.A. 2012/2013

MATTEO DI NUNNO

1. Funzione di Green per il problema di Sturm

(1) Verificare che

$$u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\mu|x-y|} \frac{f(y)}{2i\mu} dy \tag{1}$$

con $\operatorname{Im}\mu \leq 0$ é soluzione dell'equazione

$$(-\partial_x^2 - \mu^2)u = f. \tag{2}$$

L'equazione in esame é del tipo

$$\begin{cases} u''(x) + A(x)u(x) = f(x) \\ A(x) = -\mu^2 \end{cases} ;$$

Dalla teoria sappiamo che la soluzione si puó esprimere come

$$u(x) = \int_a^x v_1(y)v_2(x)f(y)\frac{dy}{W(v_1,v_2)} + \int_x^b v_2(y)v_1(x)f(y)\frac{dy}{W(v_1,v_2)}$$

dove $W(v_1,v_2) = v_1v_2' - v_2v_1'$ é il wronskiano. Inoltre essa sará combinazione lineare di

$$v_1(x) = e^{i\mu x} \qquad v_2(x) = e^{-i\mu x}.$$

Quindi

$$W(v_1,v_2) = -i\mu e^{i\mu x}e^{-i\mu x} - e^{-i\mu x}i\mu e^{i\mu x} = -2i\mu.$$

A questo punto, andando a sostituire, troviamo

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{-\infty}^x e^{i\mu y - i\mu x}\frac{f(y)}{-2i\mu}dy + \int_x^{+\infty} e^{-i\mu y + i\mu x}\frac{f(y)}{-2i\mu}dy = \\ &= -\frac{1}{2i\mu}\left[\int_{-\infty}^x e^{i\mu(y-x)}f(y)dy + \int_x^{+\infty} e^{i\mu(x-y)}f(y)dy\right] = \\ &= \frac{1}{2i\mu}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\mu|x-y|}f(y)dy. \end{aligned}$$

(2) Mostrare che $u(x)$ soddisfa

$$\|u(x)\|_{L^\infty} \lesssim \frac{C}{|\mu|}\|f\|_{L^1}. \tag{3}$$

Si ha

$$\|u\|_{L^\infty} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\mu|x-y|}\frac{f(y)}{2i\mu}dy \lesssim \frac{C}{|\mu|}\sup_{x\in\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\mu|x-y|}f(y)dy =$$
$$= \frac{C}{|\mu|}\|e^{-i\mu x} * f\|_{L^\infty} \lesssim \frac{C}{|\mu|}\int_{\mathbb{R}}|f(y)|dy = \frac{C}{|\mu|}\|f\|_{L^1}.$$

(3) Sia $n = 3$ e sia, con $\operatorname{Im}\mu < 0$,

$$u(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\mu|r-s|}\frac{f(s)}{2ir\mu}sds$$

soluzione di

$$(-\Delta - \mu^2)u = f \qquad f(x) = f(|x|).$$

Dimostrare che per $a > 1/2$ si ha

$$\|\langle x\rangle^{-a}u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \lesssim \frac{C}{|\mu|}\|\langle x\rangle^{a}f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}. \tag{4}$$

La stima da dimostrare é del tutto equivalente a

$$\|\langle x\rangle^{-a}(-\Delta-\mu^2)^{-1}\langle x\rangle^{-a}f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \lesssim \frac{C}{|\mu|}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Consideriamo l'operatore $T = \langle x\rangle^{-a}(-\Delta-\mu^2)^{-1}\langle x\rangle^{-a}$ ed esprimiamo la sua immagine in forma integrale ossia

$$Tf = \int_{\mathbb{R}} K(x,y)f(y)dy \qquad K(x,y) = \frac{C}{\mu}e^{-i\mu|x-y|}\langle x\rangle^{-a}\langle y\rangle^{-a}.$$

A questo punto

$$\|Tf\|_{L^2_x} \lesssim \int_{\mathbb{R}}\|K(x,y)f(y)\|_{L^2_x}dy \lesssim \int_{\mathbb{R}}\|K\|_{L^2_x}|f(y)|dy \lesssim \text{(Cauchy)} \lesssim$$
$$\lesssim \|K\|_{L^2_xL^2_y}\|f\|_{L^2}.$$

Ora osserviamo che

$$\|K(x,y)\|_{L^2_xL^2_y} \lesssim \frac{C}{|\mu|}\|\langle x\rangle^{-a}\|_{L^2}\|\langle y\rangle^{-a}\|_{L^2}$$

e quindi otteniamo che per $a > 1/2$ si ha $\langle\cdot\rangle^{-a} \in L^2$.

2. Stime del risolvente per $n = 1$

(1) Dimostrare che esiste una costante $C > 0$ tale che

$$\|(z^2+\Delta)^{-1}f\|_{L^\infty} \lesssim \frac{C}{|\lambda|}\|f\|_{L^1} \qquad z = \lambda + i\varepsilon \tag{5}$$

per ogni $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.

Si ha

$$\|(z^2+\Delta)^{-1}f\|_{L^\infty} = \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda|x-y|}\frac{f(y)}{2i\lambda}dy\right| \lesssim \frac{C}{|\lambda|}\int_{\mathbb{R}}\left|e^{-i\lambda|x-y|}f(y)|dy\right| \lesssim$$
$$\lesssim \frac{C}{|\lambda|}\int_{\mathbb{R}}|f(y)|dy = \frac{C}{|\lambda|}\|f\|_{L^1}.$$

3. Approcci alternativi per le stime del risolvente per $n=1$

(1) Sappiamo che

$$|u'(r)|^2+\lambda^2|u(r)|^2 \le C(\lambda|\langle f,u\rangle_{L^2}|+|\langle f,u'\rangle_{L^2}|). \tag{6}$$

Dimostrare che la (6) implica

$$|u'(r)|+|\lambda||u(r)| \le C\|f\|_{L^1}. \tag{7}$$

Si ha

$$|u'(r)|^2+\lambda^2|u(r)|^2 \le (6) \le C\Big[\lambda|\langle f,u\rangle_{L^2}|+|\langle f,u'\rangle_{L^2}|\Big] \le$$
$$\le C\Big[|\langle f,u'+\lambda u\rangle_{L^2}|\Big] = C\left|\int_{\mathbb{R}} f(u'+\lambda u)dx\right| \le$$
$$\le C\|u+\lambda u\|_{L^\infty}\|f\|_{L^1} \le \tilde{C}\|f\|_{L^1}.$$

4. Operatori simmetrici e operatori autoaggiunti

Riportiamo qui una parte dei contenuti visti a lezione.

Definizione 4.1 (**Estensione di un operatore).** *Sia A operatore densamente definito con dominio $D(A)$ contenuto in H spazio di Hilbert e B con dominio $D(B)\subset H$. Si dice che B estende A (formalmente $A\subset B$) se*

(1) *$D(A)\subset D(B)$;*
(2) *$Af = Bf \quad \forall f\in D(A)$.*

Osservazione 4.2. *Notiamo che*

$$\begin{cases} D(A)=H \\ A \text{ chiuso} \end{cases} \Longrightarrow A \text{ limitato}.$$

Ricordiamo che un operatore $A: D(A)\subset H$ si dice simmetriche se

$$(Af,g) = (f,Ag) \qquad \forall\, f,g\in D(A).$$

Lemma 4.3. *Sia $\overline{D(A)} = H$ ed A simmetrico. Allora esiste un operatore B tale che*

$$\overline{\Gamma(A)} = \Gamma(B).$$

Definizione 4.4 (**Aggiunto).** *Sia $A: D(A)\subset H$. L'aggiunto di A é l'operatore A^* che ha come dominio*

$$D(A^*) := \left\{f : D(A)\ni g \xmapsto{\Phi} \langle Ag,f\rangle\right\} = \left\{f : \exists\, C>0 : |\langle Ag,f\rangle| \le C\|g\|\ \forall\, g\in D(A)\right\}$$

La seconda forma con cui viene descritto il dominio di A^* ci permette, per Hahn-Banach, di estendere l'operatore a tutto H e grazie al teorema di Riesz sappiamo esistere un $h = A^* f$ tale che

$$\langle Ag, f\rangle = \langle g, h\rangle.$$

Inoltre h é unico per via della densitá.
Vediamo alcune proprietá e legami tra un operatore e il suo aggiunto:

(1) A simmetrico con dominio denso in $H \Longrightarrow A \subset A^*$;
(2) si ha
$$\Gamma(A^*) = \big[\vee\, \Gamma(A)\big]^{\perp}$$
dove $\vee(a, v) = (-b, a)$;
(3) A simmetrico densamente definito $\Longrightarrow A \subset A^{**} \subset A^*$;
(4) A simmetrico, chiuso, densamente definito $\Longrightarrow A = A^{**} \subset A^*$;
(5) A é detto autoaggiunto se $A = A^{**} = A^*$ ossia quando $\Gamma(A) = \Gamma(A^*)$.

Lemma 4.5 (**Criterio di autoaggiunzione**). *Sia A simmetrico e $\overline{D(A)} = H$. Allora sono equivalenti:*

(1) $A = A^*$;
(2) *A é chiuso e* $\ker(A^* \pm iI) = \{\varnothing\}$;
(3) $\mathrm{Im}(A \pm iI) = H$.

Lemma 4.6. *Sia A con dominio densamente definito. Allora sono equivalenti:*

(1) *$D(A^*)$ é denso in H;*
(2) *A é chiudibile.*

Poiché $A = A^* \Longrightarrow \sigma(A) \subset \mathbb{R}$ possiamo porre il criterio di autoaggiunzione nei seguenti termini:

$$\begin{gathered} A = A^* \\ \Updownarrow \\ \Gamma(A) = \overline{\Gamma(A)} \\ \Updownarrow \\ H = \mathrm{Im}[A \pm (\mu + i)I] \qquad \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{gathered}$$

Passiamo ora agli esercizi svolti.

(1) Siano
$$\Omega = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n;\ x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1},\ x_n > 0\}$$
$$\partial\Omega = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n;\ x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1},\ x_n = 0\}$$
e sia A_0 l'operatore simmetrico definito come segue:
$$D(A_0) = \mathscr{C}_0^\infty(\Omega) \qquad A_0 u = \Delta u.$$
Dare una descrizione completa dei seguenti insiemi:
- tutte le estensioni chiuse di A_0;
- tutte le estensioni autoaggiunte di A_0.

Per quanto riguarda il primo punto vogliamo sfruttare il fatto che si ha un operatore simmetrico A tale che $\overline{D(A)} = H$ allora esiste un operatore B tale che $\overline{\Gamma(A)} = \Gamma(B)$.
Nel nostro caso si ha

$$\overline{\Gamma(A_0)} = \left\{(f,g) : \; f_k \xrightarrow{L^2} f \text{ ed } -\xi^2 g_k \xrightarrow{L^2} g \text{ con } g_k, f_k \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega)\right\} = \Gamma(B)$$

e inoltre

$$D(B) = \widehat{L_2^2}(\Omega) = H^2(\Omega)$$

ch é la piú grande estensione chiusa del laplaciano.
Per rispondere alla seconda domanda, osserviamo che

$$\overline{\mathscr{C}_0^\infty} = L^2 \supset H^2.$$

Per mostrare l'autoaggiunzione dell'operatore vogliamo mostrare che

$$\mathrm{Im}[\Delta + (\mu + i)I] = H^2$$

Siano $f, g \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$; si ha

$$(A^* f, g) = f, g) \Longrightarrow (f, \Delta g) = i(f,g)$$

nel senso delle distribuzioni;

$$(\Delta f - i f, g) = 0$$

ma possiamo supporre $f \in \mathscr{S}'$ e applicare la trasformata di Fourier cosí da ottenere

$$-\hat{f}(\xi)(i + \xi^2) = 0.$$

Ma $i + \xi^2 \neq 0 \; \forall \; \xi \in \mathbb{R}$ e quindi $\hat{f} \equiv 0$. Questo significa che

$$\ker[\Delta - (\mu + i)I] = \{\varnothing\}.$$

(2) Sia A operatore autoaggiunto su uno spazio di Hilbert H con dominio denso $D(A)$ e sia V un operatore simmetrico e limitato. Dimostrare che l'operatore $A + V$ é autoaggiunto.

Per dimostrare che l'operatore é autoaggiunto dobbiamo mostrare due cose:
- $(A + V)^* = A + V$;
- $\overline{D(A + V)} = H$.

Si ha

$$\langle (A+V)f, g\rangle = \langle f, A^* g\rangle + \langle f, V^* g\rangle = \langle f, Ag\rangle + \langle f, Vg\rangle = \langle f, (A+V)g\rangle;$$

infine, per ipotesi, abbiamo $D(A)$ denso in H e data la limitatezza dell'operatore V, per Hahn-Banach possiamo estendere $D(V)$ a tutto H. Di conseguenza $\overline{D(A + V)} = H$.

(3) Sia l'operatore di Laplace Δ con $D(\Delta) = H^2(\mathbb{R}^n)$ e sia $V(x)$ una funzione limitata a valori in $\mathbb{R}$. Dimostrare che l'operatore $\Delta + V$ é autoaggiunto.

Sappiamo giá che il laplaciano é autoaggiunto e vogliamo mostrare l'operatore $V(x)$, inteso nel senso di operatore di moltiplicazione, é simmetrico. Grazie all'esercizio precedente si avrá l'autoaggiunzione dell'operatore $\Delta + V$. Si ha

$$\langle Vf, g\rangle_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^n} V(x)f(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)V(x)g(x)dx = \langle f, Vg\rangle_{L^2}.$$

e quindi troviamo che l'operatore di moltiplicazione é simmetrico; allora per l'esercizio precedente possiamo affermare che l'-operatore $\Delta + V$ é autoaggiunto.

(4) Sia l'operatore Δ con dominio $H^2(\mathbb{R}^3) \subset L^2(\mathbb{R}^3)$ e sia $V(x)$ una funzione a valori reali tale che

$$|V(x)| \leq \frac{C}{|x|}.$$

Mostrare che
- V é un operatore simmetrico con dominio denso $D(V) \supseteq H^2(\mathbb{R}^3)$;
- l'operatore $\Delta + V$ é autoaggiunto con dominio $H^2(\mathbb{R}^3)$.

Grazie all'esecizio precedente sappiamo che l'operatore di moltiplicazione per $V(x)$ é autoaggiunto in $H^2(\mathbb{R}^3)$; il suo dominio sará del tipo

$$D(V) = \left\{g \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3) : g = x^2 f \quad f, g \in L^2(\mathbb{R}^3)\right\}$$

inoltre si ha

$$\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3) \subset D(V) \subset D(\Delta) = H^2(\mathbb{R}^3).$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} |\langle Vf, g\rangle|^2 &\lesssim \|Vf\|_{L^2}\|g\|_{L^2} \lesssim \left\|\frac{1}{|x|}f\right\|_{L^2}\|g\|_{L^2} \lesssim (\text{ Hardy }) \lesssim \\ &\lesssim \|\nabla f\|_{L^2}\|g\|_{L^2} \end{aligned}$$

e che

$$\begin{aligned} |\langle(\Delta + V)f, g\rangle|^2 = |\langle\Delta f, g\rangle + \langle Vf, g\rangle|^2 \lesssim |\langle\Delta f, g\rangle|^2 + |\langle Vf, g\rangle|^2 \lesssim \\ \lesssim \left(\|\Delta f\|_{L^2} + \|\nabla f\|_{L^2}\right)\|g\|_{L^2} \lesssim \|f\|_{H^2}\|g\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Adesso é necessario introdurre un teorema ed una definizione che ci permetteranno di rispondere alle domande.

Definizione 4.7. *Siano A e B operatori su uno spazio di Hilbert H. Si dice che B é A-limitato se*
- $D(A) \subseteq D(B)$;

- *$\exists\, a, b \in \mathbb{R}$ tali che $\|Bx\| \le a\|Ax\| + b\|x\|$ $\forall\, x \in D(A)$.*

Teorema 4.8 (**Kato-Rellich**)**.** *Sia A un operatore autoaggiunto su H spazio di Hilbert e sia B un operatore A-limitato, simmetrico su H con A-limite $l_A(B) < 1$. Allora*

(a) *l'operatore $A+B$ con dominio $D(A+B) = D(A)$ é autoaggiunto;*
(b) *se A é essenzialmente autoaggiunto su $D \subseteq D(A)$ allora lo é anche $A+B$.*

Definizione 4.9 (**Potenziali di Kato-Rellich**)**.** *Sia una funzione boreliana $V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$; V é un potenziale di Kato-Rellich se*

$$\begin{array}{lll} V \in L^2(\mathbb{R}^d) + L^\infty(\mathbb{R}^d) & & d < 4 \\ V \in L^p(\mathbb{R}^d) + L^\infty(\mathbb{R}^d) & p > d/2 & d \ge 4 \end{array} \tag{8}$$

Esempio 4.10. *Sia $\alpha \in [0, +\infty)$ con la condizione che $\alpha < d/2$ se $d \le 3$ ed $\alpha < 2$ se $d \ge 4$. Allora per ogni $C \in \mathbb{R}$ la funzione*

$$V(x) = \frac{C}{\|x\|^\alpha}$$

é un potenziale di Kato-Rellich; inoltre $-\Delta + V$ é autoaggiunto su $D(-\Delta)$.
Osserviamo che, presa χ_n la funzione caratteristica dell'aperto

$$\{x : \|x\| < n\} \qquad con\ n \in \mathbb{N},$$

si puó considerare $V_{1,n} = V\chi_n$. Si ha ora

$$V_{1,n} \in L^2(\mathbb{R}^d) \qquad d \le 3$$

$$V_{1,n} \in L^p(\mathbb{R}^d) \qquad d > 4 \quad d/2 < p < d/\alpha.$$

Infine $V_{2,n} = V - V_{1,n} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Torniamo ora al nostro esercizio: la funzione $V(x)$ é limitata come operatore ed in particolare é Δ-limitato con Δ-limite 0; sappiamo anche che é simmetrico e quindi vale il teorema di Kato-Rellich.
Nel nostro caso $|V| \le C|x|^{-1}$ e quindi $d = 3$ e $\alpha = 1 < 3/2$ quindi V é un potenziale di Kato-Rellich.

(5) Sia l'operatore Δ con dominio $H^2(\mathbb{R}^3) \subset L^2(\mathbb{R}^3)$ e sia $V(x)$ una funzione a valori reali tale che

$$|V(x)| \le \frac{C}{|x|^2}.$$

Mostrare che

- V é un operatore simmetrico con dominio denso $D(V) \supseteq H^2(\mathbb{R}^3)$;
- l'operatore $\Delta + V$ é autoaggiunto con dominio $H^2(\mathbb{R}^3)$.

Valgono gli stessi ragionamenti fatti per l'esercizio precedente tranne per il fatto che, in questo caso, V non é un potenziale di Kato-Rellich dato che $\alpha = 2 > 3/2$.

(6) Esibiamo ora un teorema interessante. Prima di farlo servirá una definizione.

Definizione 4.11 (Operatore essenzialmente autoaggiunto)**.** *Un operatore simmetrico A é essenzialmente autoaggiunto se la sua chiusura $\overline{A}$ é autoaggiunta.*[1]

L'obiettivo é affermare, sotto determinate ipotesi, che l'operatore $-\partial_x^2 + V(x)$ con dominio $\mathscr{C}_0^\infty(0,+\infty)$ é essenzialmente autoaggiunto.

Definizione 4.12 (Sottospazi di deficienza)**.** *Sia A un operatore simmetrico su H spazio di Hilbert. Sono definiti i seguenti sottospazi di deficienza*

(9)
$$\begin{aligned} \mathscr{K}_+ &= \ker(i - A^*) = \operatorname{Im}(i + A)^\perp \\ \mathscr{K}_- &= \ker(i + A^*) = \operatorname{Im}(-i + A)^\perp : \end{aligned}$$

inoltre

$$n_+(A) = \dim \mathscr{K}_+ \qquad n_-(A) = \dim \mathscr{K}_-$$

sono detti indici di deficienza.

Definizione 4.13. *Si dice che il potenziale $V(x)$ é nel* **caso limite circolare** *in 0 (rispettivamente in $+\infty$) se per qualche autovalore λ, le soluzioni $u(x)$ del problema di Sturm-Liouville*

$$-u''(x) + V(x)u(x) = \lambda u(x)$$

sono quadrato-integrabili in 0 (rispettivamente in $+\infty$).
In caso contrario si dice che $V(x)$ é nel **caso limite puntuale**.

Teorema 4.14 (**Criterio del limite puntuale-limite circolare di Weyl**)**.** *Sia $V(x)$ una funzione continua a valori reali. Allora l'operatore*

$$H = -\partial_x^2 + V(x)$$

é essenzialmente autoaggiunto su $\mathscr{C}_0^\infty(0,+\infty)$ se e solo se $V(x)$ é nel caso limite puntuale sia in 0 che in $+\infty$.

Dimostrazione. L'idea é che se $V(x)$ é nel caso limite circolare sia in 0 che in $+\infty$ allora gli indici di deficienza saranno $(2,2)$ mentre se questo accadesse in uno solo dei due punti, avremmo indici uguali a $(1,1)$. Dobbiamo dimostare che se il caso limite non si ha

[1] Questa proprietá ci da in automatico l'unicitá dell'estensione autoaggiunta.

in entrambi, H non puó essere essenzialmente autoaggiunto.
Supponiamo che $V(x)$ sia nel limite puntuale in 0 e in $+\infty$ e poniamo per $f,g \in D(H^*)$

$$W_x(f,g) = \bar{f}g' - \bar{f}'g.$$

W_x é continua ed integrando per parti si ottiene

$$W_b(f,g) - W_a(f,g) = \int_a^b \left[\overline{H^* f}g - \overline{f}H^* g\right](x)dx;$$

la funzione integranda é in $L^1(0,+\infty)$ e quindi esistono i seguenti limiti

$$W_\infty(f,g) = \lim_{b\to+\infty} W_b(f,g) \qquad W_0(f,g) = \lim_{a\to 0} W_a(f,g).$$

A questo punto possiamo riscrivere

$$W_\infty(f,g) - W_0(f,g) = (H^* f,g) - (f,H^* g)$$

e dimostrare che l'ultima quantitá scritta é nulla equivale a dimostrare che H^* é simmetrico e quindi che H é essenzialmente autoaggiunto.
Prendiamo $C \in (0,+\infty)$ e consideriamo B come restrizione di H a $\mathscr{C}_0^\infty(0,C) \subset L^2(0,C)$. Sia $A = H$ con

$$D(A) = \left\{\phi \in \mathscr{C}_0^\infty(0,C), \phi(0+\varepsilon) = 0 = \phi(C)\right\}.$$

Poiché $B \subset A$ allora $\overline{B} \subset \overline{A}$; ma esistono funzioni ϕ in $D(\overline{A})$ tali che $\phi'(C) \neq 0$ e che non si trovano in $D(\overline{B})$: questo significa che $\overline{A}$ é un'estensione simmetrica chiusa ed in particolare un'estensione propria di $\overline{B}$.
Ora le soluzioni di

$$-\phi'' + V\phi = \pm i\phi$$

sono entrambe quadrato-integrabili vicino C mentre solo una di esse lo é vicino 0 e quindi gli indici di deficienza di B sono $(1,1)$. Di conseguenza quelli di $\overline{A}$ sono $(0,0)$ e quindi $\overline{A}$ é autoaggiunto. Siano ora $f,g \in D(H^*)$ ed $f_1,g_1 \in \mathscr{C}_0^\infty(0,+\infty)$ tali che $f(C) + f_1(C) = 0 = g(C) + g_1(C)$; poniamo

$$f_2 = f + f_1 \qquad g_2 = g + g_1.$$

Allora

$$-W_0(f,g) = \underbrace{W_C(f_2,g_2)}_{=0} - W_0(f_2,g_2) = (\overline{A}f_2,g_2) - (f_2,\overline{A}g_2) = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow f_2,g_2 \in D(A^*) = D(\overline{A}) \Longrightarrow W_0(f,g) \equiv 0.$$

Calcoli analoghi valcono per $W_\infty(f,g)$. □

5. Applicazioni del teorema spettrale

(1) Sia l'equazione delle onde omogenea

$$(\partial_t^2 - \Delta)u(t,x) = 0 \qquad x \in \mathbb{R}^3$$

con dati iniziali $u(0) = 0$ e $\partial_t u(0) = f$. Dimostrare che per $f \in H^2(\mathbb{R}^3)$ l'equazione ammette soluzione $u(t,x) = \mathscr{U}_0(t)f$ dove

$$\mathscr{U}_0(t)f := \int_0^\infty \sin\lambda t\big[R_0(\lambda^2 + i0) - R_0(\lambda^2 - i0)\big] f\,d\lambda \tag{10}$$

ed

$$R_0(\lambda^2 \pm i0)f(x) = \lim_{\varepsilon\, to 0} R_0(\lambda^2 \pm i\,\varepsilon)f(x) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{\pm i\lambda|x-y|}\frac{f(y)}{|x-y|}dy. \tag{11}$$

Siamo di fronte ad un'equazione del tipo

$$\frac{d^2}{dt^2}u + Au = 0$$

dove A é un operatore autoaggiunto positivo. Dalla teoria per le equazioni differenziali ordinarie sappiamo che la soluzione si esprimerá come combinazione di

$$e^{i\sqrt{A}t} = \cos(\sqrt{A}t) \qquad e^{-i\sqrt{A}t} = \sin(\sqrt{A}t)$$

e considerando che devono essere soddisfatti i dati iniziali $u(0) = g$ e $u'(0) = f$. Da qui si ha

$$u(t) = \cos(\sqrt{A}t)g + \frac{\sin(\sqrt{A}t)}{\sqrt{A}}f$$

e nel nostro caso $g \equiv 0$.
Per il teorema spettrale la funzione tale che

$$\mathbb{R}^+ \ni A \longmapsto \frac{\sin(\sqrt{A}t)}{\sqrt{A}}$$

é in $L^\infty_\mu(\mathbb{R})$ per ogni t fissato e questo ci consentirá di trovare un'estensione analitica attorno allo spettro; invece per t che varia abbiamo che

$$\frac{\sin(\sqrt{A}t)}{\sqrt{A}} \in \mathscr{C}\big([-T,T],H\big) \cap \mathscr{C}^1\big([-T,T],H\big).$$

Dalla teoria sappiamo che il calcolo funzionale é estendibile anche alle funzioni continue e sempre grazie al teorema spettrale possiamo affermare che le potenze frazionarie (con $\vartheta \in (0,1)$) di un operatore autoaggiunto sono esprimibili come

$$A^{-\vartheta} = \int_0^{+\infty} x^{-\vartheta}\,d\mu \tag{12}$$

dove

(13) $$d\mu := d\mu_{f,g}(\lambda) = \lim_{\varepsilon\to 0} \langle [\lambda(1+\varepsilon)I - u]^{-1} f, g\rangle - \langle [\lambda(1-\varepsilon)I - u]^{-1} f, g\rangle$$

é la misura spettrale. Usando tutto questo nel nostro caso, arriviamo a scrivere

$$\frac{\sin(\sqrt{-\Delta}\,t)}{\sqrt{-\Delta}} f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\sqrt{\lambda}\,t)}{\sqrt{\lambda}} \left[(\lambda + i0 - \Delta)^{-1} - (\lambda - i0 - \Delta)^{-1}\right] f\, d\lambda.$$

Poniamo

$$R_0(\lambda \pm i0) := (\lambda \pm i0 - \Delta)^{-1} \qquad A = B^2 \qquad \lambda \to \lambda^2$$

cosí da arrivare a

$$\frac{\sin(Bt)}{B} f = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\lambda t)}{\lambda} \left[R_0(\lambda^2 + i0) - R_0(\lambda^2 - i0)\right] f \lambda\, d\lambda$$

dove R_0 é il risolvente in forma integrale in dimensione 3.

(2) Sia ϕ una funzione a supporto compatto; dimostrare che

$$\left\|\phi(-\Delta)\mathscr{U}_0(t) f\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \lesssim \frac{C}{t} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}.$$

Scriviamo esplicitamente la quantitá che dobbiamo stimare:

$$\phi(-\Delta)\mathscr{U}_0(t) f = \int_0^{+\infty} \phi(\lambda^2) \sin \lambda r \left[R_0(\lambda^2 + i0) - R_0(\lambda^2 - i0)\right] f\, d\lambda;$$

Adesso si ha

$$\left\|\phi(-\Delta)\mathscr{U}_0(t) f\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \lesssim \left\| \int_0^{+\infty} -\phi(\lambda^2) \frac{(\cos \lambda t)'}{t} \left[R_0(\lambda^2 + i0) - R_0(\lambda^2 - i0)\right] f\, d\lambda \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \lesssim$$
$$\lesssim \frac{C}{t} \|\mathscr{U}_0(t) f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \lesssim \frac{C_\lambda}{t} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}$$

dove abbiamo prima integrato per parti e poi usato il fatto che

$$\|\phi(f)\|_{L^p} \lesssim C_{p,q} \|f\|_{L^q} \qquad 1 \le q \le p \le +\infty.$$

(3) Provare a derivare la seguente stima:

$$\|\mathscr{U}_0(t) f\|_{L^4(\mathbb{R}^3)} \lesssim \frac{C(f)}{\sqrt{t}}.$$

Partiamo da due stime estreme di cui siamo giá a conoscenza:

$$\|\mathscr{U}_0(t) f\|_{L^\infty} \lesssim \frac{C}{t} \|f\|_{L^1} \qquad \|\mathscr{U}_0(t) f\|_{L^2} \lesssim C \|f\|_{L^2};$$

vogliamo utilizzare il teorema di Riesz-Thorin il quale ci dice che

$$\begin{cases} \|Tf\|_{L^{p_1}} \lesssim C_1 \|f\|_{L^{q_1}} \\ \|Tf\|_{L^{p_0}} \lesssim C_0 \|f\|_{L^{q_0}} \end{cases} \Longrightarrow \|Tf\|_{L^{p_\vartheta}} \lesssim C_\vartheta \|f\|_{L^{q_\vartheta}}$$

con

$$C_\vartheta = C_0^\vartheta C_1^{1-\vartheta} \qquad 1/p_\vartheta = \vartheta/p_0 + (1-\vartheta)/p_1 \qquad 1/q_\vartheta = \vartheta/q_0 + (1-\vartheta)/q_1.$$

Nel nostro caso, formalmente abbiamo

$$\begin{cases} 1/4 = \vartheta/\infty + (1-\vartheta)/2 \\ 1/q_\vartheta = \vartheta/1 + (1-\vartheta)/2 \end{cases} \Longrightarrow \vartheta = 1/2 = 1-\vartheta$$

$$1/q_\vartheta = \vartheta + (1-\vartheta)/2 = 1/2 + 1/4 = 3/4$$

e per quanto riguarda la costante si ha

$$C_\vartheta = \frac{C_0^\vartheta C_1^{1-\vartheta}}{\sqrt{t}}.$$

In definitiva la stima é

$$\|\mathscr{U}_0(t)f\|_{L^4} \lesssim \frac{C(f)}{\sqrt{t}}\|f\|_{L^{4/3}}.$$

(4) Consideriamo l'equazione delle onde con potenziale

$$(\partial_t^2 - \Delta)u(t,x) + V(x)u(t,x) = 0 \qquad x \in \mathbb{R}^3$$

e dati iniziali $u(0,x) = 0$ ed $\partial_t u(0,x) = f$. Si assuma che $V(x)$ sia una funzione misurabile tale che

$$\begin{cases} |V(x)| \le C & 0 < |x| \le 1 \\ |V(x)| \le \frac{C}{|x|^{2+\varepsilon}} & |x| > 1 \end{cases}$$

Esprimere la soluzione, se possibile, come nel caso non perturbato.

Partiamo dall'osservare che grazie al teorema di Kato-Rellich, dato un potenziale non negativo e limitato $V(x)$, é sempre possibile definire l'operatore autoaggiunto $-\Delta + V$. Dalla teoria delle EDO ci aspettiamo che la soluzione si scriva in termini di

$$e^{\pm i\sqrt{-\Delta+V}t};$$

in generale se $u(0) = g$ e $u'(0) = f$ si ha

$$u(t) = \cos(\sqrt{-\Delta+V}t)g + \frac{\sin(\sqrt{-\Delta+V}t)}{\sqrt{-\Delta+V}}f$$

e possiamo porre la soluzione come

$$u(t) = \mathscr{U}_V(t)f = \frac{\sin(\sqrt{-\Delta+V}t)}{\sqrt{-\Delta+V}}f = \int_0^{+\infty} \sin\lambda t\big[R_V(\lambda^2+i0) - R_V(\lambda^2-i0)\big]f\,d\lambda$$

dove

$$R_V(\lambda^2 + \pm i0) = \lim_{\varepsilon\to 0} R_V(\lambda^2 \pm i\varepsilon) := (\lambda^2 \pm i\varepsilon - \Delta + V)^{-1}.$$

Osserviamo come la condizione di limitatezza che é stata data sul potenziale $V(x)$ assicura che l'operatore $-\Delta+V$ é autoaggiunto su $L^2(\mathbb{R}^3)$ e che sia ben definito l'operatore risolvente R_V su $L^2(\mathbb{R}^3)$ per $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$.

(5) Dimostrare che l'operatore $R_0(\lambda^2\pm i0)V$ non ha come punto fisso $f\in L^2_{3/2-\delta}\setminus\{0\}$ per $\delta>0$ piccolo e mostrare che questo implica la validitá della seguente stima:

$$\|\langle x\rangle^{-a}R_V(\lambda^2\pm i0)f\|_{L^2}\lesssim\frac{C}{\lambda}\|\langle x\rangle^{a}f\|_{L^2}$$

con $a>1/2$.

Abbiamo

$$R_0(\lambda^2\pm i0)Vf=\int_0^{+\infty}\frac{e^{\pm i\lambda|x-y|}}{|x-y|}V(y)f(y)dy$$

e ricordiamo che $\|f\|_{L^2_\sigma}=\|\langle x\rangle^{\sigma}f\|_{L^2}$. Adesso

$$\|\langle x\rangle^{-3/2-\delta}R_0(\lambda^2\pm i0)Vf\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\lesssim C\|\langle x\rangle^{-3/2-\delta}\|_{L^m(\mathbb{R}^3)}\|R_0(\lambda^2\pm i0)Vf\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}$$

dove affinché il termine in L^m sia finito dovremo imporre

$$(3/2+\delta)m>3\iff 3/2m>3\iff m>2$$

e per far si che valga Hölder la condizione sugli indici é

$$1/m+1/p=1/2.$$

Adesso

$$\|R_0(\lambda^2\pm i0)Vf\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\simeq\left\|\frac{1}{|x|}*Vf\right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}\lesssim\left\|\frac{1}{|x|}\right\|_{L^{3,\infty}(\mathbb{R}^3)}\|Vf\|_{L^q(\mathbb{R}^3)}$$

con

$$1+1/p=1/3+1/q\iff 2/3+1/p=1/q.$$

Grazie all'ipotesi fatta sulla limitatezza dell'operatore V possiamo scrivere

$$\|Vf\|_{L^q(\mathbb{R}^3)}\simeq\|\langle x\rangle^{-2-\delta}f\|_{L^q(\mathbb{R}^3)}=\|\langle x\rangle^{-2-\delta}\langle x\rangle^{-3/2-\delta}\langle x\rangle^{3/2+\delta}f\|_{L^q(\mathbb{R}^3)}$$
$$\lesssim C\|\langle x\rangle^{-1/2}\|_{L^r(\mathbb{R}^3)}\|\langle x\rangle^{-3/2-\delta}f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

ed ora le condizioni da porre sono

$$1/q=1/2+1/r\qquad r/2>3;$$

poniamo $r^*:=r=6$ e sostituendo troviamo

$$1/q=1/2+1/6=2/3$$

Andando a ritroso sulle condizioni da far valere troviamo

$$2/3+1/p=2/3\iff 1/p=0\iff p=+\infty$$

cosí da arrivare ad $m^* := m = 2$. In definitiva per $\delta > 0$ si ha

$$\|R_0(\lambda^2 \pm i0)Vf\|_{L^2_{-3/2-\delta}(\mathbb{R}^3)} \lesssim C\|f\|_{L^2_{-3/2-\delta}(\mathbb{R}^3)}.$$

Adesso passiamo alla stima che vogliamo dimostrare essere vera. Essa é equivalente a

$$\|\langle x\rangle^{-a}R_0(\lambda^2 \pm i0)\langle x\rangle^{-a}Vf\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \lesssim \frac{C}{\lambda}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Ora consideriamo il nucleo integrale

$$K(x,y) = \frac{C}{\lambda}e^{\pm i\lambda|x-y|}\langle x\rangle^{-a}\langle y\rangle^{-a}$$

e posto $T := \langle x\rangle^{-a}R_0(\lambda^2 \pm i0)\langle x\rangle^{-a}$ si ha

$$T(Vf)[x] = \int_{\mathbb{R}} K(x,y)V(y)f(y)dy$$

e quindi

$$\|T(Vf)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \lesssim \int_{\mathbb{R}} \|K(x,y)V(y)f(y)\|_{L^2_y(\mathbb{R}^3)}dy \lesssim \Big(V(x) \simeq O(|x|^{-2-\varepsilon})\Big) \lesssim$$

$$\lesssim \int_{\mathbb{R}} \|K(x,y)\|_{L^2_x(\mathbb{R}^3)}|V(y)f(y)|dy \lesssim \|K\|_{L^2_x L^2_y}\|Vf\|_{L^1_y}.$$

Adesso $\|K\|_{L^2} \le C/\lambda$ per $a > 1/2$.