SEMINARIO
TEORIA DEI SEMIGRUPPI
PROF. CARLO LUIGI BERSELLI
UNIVERSITA' DI PISA - A.A. 2012/2013

MATTEO DI NUNNO

1. Il teorema principale

Il teorema da noi preso in esame é il seguente.

Teorema 1.1. *Sia Ω un aperto limitato di classe $\mathscr{C}^r$ dove*

$$r = \max\{m+2, 2\} \qquad m \in \mathbb{N}_0$$

e siano $u \in W^{2,\alpha}(\Omega)$ e $p \in W^{1,\alpha}(\Omega)$, con $\alpha \in (1, +\infty)$, soluzioni del problema di Stokes generalizzato

st_gen (1)
$$\begin{cases} -\nu\,\Delta u + \nabla p = f & \Omega \\ \nabla \cdot u = g & \Omega \\ u = \phi & \partial\Omega \end{cases} .$$

Se

$$\begin{cases} f \in W^{m,\alpha}(\Omega) \\ g \in W^{m+1,\alpha}(\Omega) \\ \phi \in W^{m+2-1/\alpha,\alpha}(\partial\Omega) \end{cases} \implies \begin{cases} u \in W^{m+2,\alpha}(\Omega) \\ p \in W_{\#}^{m+1,\alpha}(\Omega) \end{cases}$$

ed esiste una costante $C_0 = C_0(\alpha, \nu, m, \Omega)$ tale che

dis_reg (2)
$$\|u\|_{W^{m+2,\alpha}(\Omega)} + \|p\|_{W_{\#}^{m+1,\alpha}(\Omega)} \leq C_0 K$$

dove

$$K = \left\{ \|f\|_{W^{m,\alpha}(\Omega)} + \|g\|_{W^{m+1,\alpha}(\Omega)} + \|\phi\|_{W^{m+2-1/\alpha,\alpha}(\partial\Omega)} + d_\alpha \|u\|_{L^\alpha(\Omega)} \right\}$$

e

$$\begin{cases} d_\alpha = 0 & \alpha \geq 2 \\ d_\alpha = 1 & 1 < \alpha < 2 \end{cases} .$$

Osservazione 1.2. *Osserviamo che p viene intesa in $W_{\#}^{m+1,\alpha}$ perché la pressione é definita a meno di una costante.*

La dimostrazione di questo teorema si basa su un lavoro di Agmon, Douglis e Nirenberg del 1964, in esso vengono date delle condizioni di tipo algebrico che devono essere soddisfatte dagli operatori differenziali e dalle condizioni al bordo affinché il sistema (che deve essere ellittico) sia coercivo.
L'obiettivo del lavoro era lo studio di stime riguardanti il problema di

Dirichlet associato a equazioni lineari ellittiche. Vediamo cosa fu sviluppato.

2. Il lavoro di Agmon, Douglis, Nirenberg

Sia un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ con $n \geq 1$. Un suo punto sará denotato con $P = (x_1, \dots, x_{n+1})$. Il sistema di PDE é espresso come

sis_pde
$$\sum_{j=1}^{N} \ell_{ij}(P, \partial), u_j(P) = F_i(P) \tag{3}$$

dove gli $\ell_{ij}(P, \partial)$ sono operatori differenziali lineari ossia polinomi in ∂ a coefficienti dipendenti dal punto P. L'ordine di questi operatori deve dipendere da due insiemi di indici interi secondo

$$\deg \ell_{ij}(P, \xi) \leq s_i + t_j \qquad s_i \leq 0 \qquad i, j = 1, \dots, N \tag{4}$$

dove s_i é associato all'i-esima equazione e t_j alla j-esima variabile.

Definizione 2.1. Condizione di ellitticitá *Si deve avere*

$$L(P, \xi) = \det \ell'_{ij}(P, \xi) \neq 0 \qquad \mathbb{R} \ni \xi \neq 0$$

dove ℓ'_{ij} é composto dai termini ℓ_{ij} di ordine esattamente $s_i + t_j$.

Dobbiamo imporre un'altra *condizione supplementare su L*: sia $L(P, \xi)$ polinomio di grado $2m$ rispetto a ξ. Allora per ogni coppia di vettori (ξ, ξ') reali e linearmente indipendenti, il polinomio $L(P, \xi + \tau\xi')$ nella variabile τ ha esattamente m radici con parte immaginaria positiva.

Osservazione 2.2. *Questa condizione in genere é usata per i punti $P \in \partial\Omega$ con ξ vettore tangente il bordo in P e ξ' vettore normale.*

Definizione 2.3 (**Condizione di uniforme ellitticitá**). *Il polinomio $L(P, \xi)$ deve essere tale che esista una costante $A > 0$ tale che*

$$A^{-1}|\xi|^{2m} \leq |L(P, \xi)| \leq A|\xi|^{2m} \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^{n+1},\ \forall P \in \overline{\Omega}.$$

Per quanto riguarda le condizioni al bordo, esse vengono espresse come

$$\sum_{j=1}^{n} B_{hj}(P, \partial) u_j(P) = \phi_h(P) \qquad h = 1, \dots, m \tag{5}$$

ossia vengono date nei termini di polinomi in ξ a coefficienti complessi dipendenti dal punto P.
Anche in questo caso l'ordine degli operatori é legato a due sistemi di interi tramite

$$\deg B_{hj}(P, \xi) \leq r_h + t_j \tag{6}$$

dove t_j é associato alla j-esima variabile e r_h all'h-esima condizione al bordo.

Consideriamo ora la normale n $\forall\ P \in \partial\Omega$ e siano $\xi \neq 0$ reali. Per $k = 1,\dots,m$ siano $\tau_k^+(P,\xi)$ le m radici[1] dell'equazione caratteristica

$$L(P,\xi+\tau n) = 0$$

nella variabile τ. Quindi definiamo

$$M^+(P,\xi,\tau) = \prod_{h=1}^{m}\left[\tau - \tau_h^+(P,\xi)\right]. \tag{7}$$

Ora abbiamo tutto per formulare il seguente criterio.

Proposizione 2.4 (Criterio di coercivitá)**.** *Affinché il problema al bordo per la* sis_pde *(3) conservi la coercivitá é necessario che le seguenti condizioni algebriche siano soddisfatte.*
$\forall\ P \in \partial\Omega$, $\forall\ \xi$ reali, non nulli e tangenti al punto P cosideriamo la matrice M^+ e la matrice

$$\sum_{j=1}^{N} B'_{hj}(P,\xi+\tau n)L^{jk}(P,\xi+\tau n)$$

dove la matrice L^{jk} é l'aggiunta di ℓ'_{ij}.
Le righe di quest'ultima matrice devono essere linearmente indipendenti modulo M^+ ossia

cond_alg
$$\sum_{h=1}^{m} C_h \sum_{j=1}^{N} B'_{hj}L^{jk} \equiv 0(M^+) \tag{8}$$

sole se le costanti $C_h = 0$ $\forall\ h$.

Ricordiamo alcune notazioni: gli spazi di Sobolev sono dotati della norma

$$\|f\|_{W^{j,p}} := \left(\sum_{i\leq j}\int_{\Omega}|\partial^i f|^p dx\right)^{1/p}$$

e possono essere definiti come

$$W^{j,p} = \overline{\mathscr{C}^{\infty}}^{\|\cdot\|_{W^{j,p}}};$$

inoltre ricordiamo che gli spazi $W^{j-1/p,p}$ sono gli spazi delle ϕ che sono traccia di funzioni $v \in W^{j,p}$.
Detto questo, diamo ora un teorema che ci sará utile.

Teorema 2.5. *Sia $l_1 = \max\{0, r_k+1\}$ ed $l \geq l_1$. Se $\|u_j\|_{W^{l_1+t_j,p}} < +\infty$ per $j = 1,\dots,N$ allora esiste una costante $K > 0$ tale che*

th_stim
$$\|u_j\|_{W^{l+t_j,p}} \leq K\left[\sum_i \|F_i\|_{W^{l-s_i,p}} + \sum_h \|\phi_h\|_{W^{l-r_h-1/p,p}} + \sum_j \|u_j\|_{L^p}\right]. \tag{9}$$

Adesso finalmente possiamo dimostrare il teorema di regolaritá per l'equazione di Stokes generalizzata.

[1] Con parte immaginaria strettamente positiva.

3. Dimostrazione del teorema principale

Dobbiamo metterci nelle condizioni per poter utilizzare il lavoro di Agmon, Douglis, Nirenberg: poniamo

$$u_{n+1} = \frac{1}{\nu}p \qquad u = (u_1, \dots, u_{n+1}) \qquad f = (f_1/\nu, \dots, f_n/\nu, g).$$

Adesso le nostre equazioni diventano

$$\sum_{j=1}^{n+1} \ell_{ij}(\partial) u_j = f_i \qquad 1 \le i \le n+1$$

dove

$$\ell_{ij}(\xi) = |\xi|^2 \delta_{ij} \qquad \ell_{n+1,j}(\xi) = -\ell_{j,n+1} = \xi_j \qquad \ell_{n+1,n+1} = 0$$

e la matrice associata al nostro operatore sará di dimensione $n+1 \times n+1$ e del tipo

$$\begin{pmatrix} |\xi|^2 & 0 & 0 & \dots & \xi_1 \\ 0 & |\xi|^2 & \dots & 0 & \xi_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & |\xi|^2 & \xi_n \\ -\xi_1 & -\xi_2 & -\xi_3 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

In effetti ritroviamo la nostra equazione dato che si ha

$$\begin{gathered} |\xi|^2 u_1 + \xi_1 u_{n+1} = f_1/\nu \Longrightarrow \nu|\xi|^2 u_1 + \xi_1 p = f_1 \\ |\xi|^2 u_2 + \xi_1 u_{n+1} = f_2/\nu \Longrightarrow \nu|\xi|^2 u_2 + \xi_2 p = f_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ |\xi|^2 u_n + \xi_1 u_{n+1} = f_n/\nu \Longrightarrow \nu|\xi|^2 u_n + \xi_n p = f_n \\ -\xi_1 u_1 - \xi_2 u_2 - \dots - \xi_n u_n = f_{n+1} = g \end{gathered} .$$

Siano ora

$$\begin{cases} s_i = 0 \\ t_i = 2 \end{cases} \quad \text{con } 1 \le i \le n \qquad s_{n+1} = -1,\ t_{n+1} = 1$$

e con questi indici si ha $\deg \ell_{ij}(\xi) \le s_i + t_j$ ed $\ell'_{ij} = \ell_{ij}$.
Si ha

$$\begin{gathered} L((\xi) = \det \ell'_{ij}(\xi) = |\xi|^{2n} \Longrightarrow \\ \Longrightarrow L(\xi) \neq 0 \quad \text{con} \quad \xi \neq 0 \end{gathered}$$

e questo assicura l'ellitticitá del sistema. Abbiamo anche uniforme ellitticitá:

$$A^{-1}|\xi|^{2n} \le |L(\xi)| \le A|\xi|^{2n}$$

e la costante é proprio $A = 1$ dato che $L(\xi) = |\xi|^{2n}$. Per la condizione supplementare su L, sappiamo che certamernte l'equazione $L(\xi + \tau\xi') = 0$ nell'indeterminata τ possiede esattamente n radici con parte immaginaria strettamente positiva. Vediamo quali sono prendendo l'equazione

$$|\xi + \tau\xi'|^2 = 0 \iff |\xi'|^2\tau^2 + 2|\xi \cdot \xi'|\tau + |\xi|^2 = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \tau_{1,2} = \frac{-2|\xi\cdot\xi'| \pm \sqrt{4|\xi\cdot\xi'|^2 - 4|\xi'|^2|\xi|^2}}{2|\xi'|^2} = -\frac{|\xi\cdot\xi'|}{|\xi'|^2} \mp \frac{i\sqrt{|\xi'|^2|\xi|^2 - |\xi\cdot\xi'|^2}}{|\xi'|^2}.$$

Per quanto riguarda le condizioni al bordo, poniamo

$$B_{hj} = \delta_{hj} \qquad 1 \le h \le n,\, 1 \le j \le n+1$$

e scegliendo $r_h = -2$ per $1 \le h \le n$ riusciamo ad avere

$$\deg B_{hj} \le r_h + t_j \qquad B'_{hj} = B_{hj}.$$

Se chiamiamo le n radici $\tau^+(\xi,\xi')$ si ha

$$M^+(\xi) = \prod_{h=1}^{n} (\tau - \tau_h^+(\xi)) = (\tau - \tau^+)^n$$

mentre la matrice con elementi

$$\sum_{j=1}^{n} B'_{hj}(\xi + \tau\xi')L^{jk}(\xi + \tau\xi') = \begin{cases} \ell_{hk}(\xi + \tau\xi') & 1 \le k, h \le n \\ -\ell_{h,n+1}(\xi + \tau\xi') & 1 \le h \le n \end{cases}$$

ossia una matrice del tipo

$$\begin{pmatrix} |\xi + \tau\xi'|^2 & 0 & 0 & \dots & \xi_1 + \tau\xi'_1 \\ 0 & |\xi + \tau\xi'|^2 & 0 & \dots & \xi_2 + \tau\xi'_2 \\ 0 & 0 & |\xi + \tau\xi'|^2 & \dots & \xi_3 + \tau\xi'_3 \\ \vdots & \ddots & \dots & \dots & \xi_n + \tau\xi'_n \end{pmatrix}$$

e quindi la seguente combinazione lineare

$$\sum_{h=1}^{n} C_h \sum_{j=1}^{n} B'_{hj} L^{jk} = \left\{ C_1(\xi + \tau\xi')^2, \dots, C_n(\xi + \tau\xi')^2, \sum_{i=1}^{n} C_i(\xi_i + \tau\xi'_i) \right\}$$

é nulla modulo M^+ solo se

$$C_1 = \dots = C_n = 0$$

quindi vale la (8) ed il criterio di coercivitá é soddisfatto.
Adesso possiamo applicare teorema (2.5) al sistema di equazioni da noi considerato. I nostri indici sono:

$$\begin{cases} s_i = 0,\ t_i = 2 & 1 \le i \le n \\ s_{n+1} = -1,\ t_{n+1} = 1 & \\ r_h = -2 & 1 \le h \le n \end{cases}$$

e abbiamo

$$\|u_j\|_{W^{l_1+t_j,p}} = \|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} + \|\frac{1}{\nu}p\|_{W^{1,p}(\Omega)} < +\infty$$

e questo rientra nelle ipotesi per cui esiste una costante C_0 tale che

$$\|u\|_{W^{m+2,\alpha}(\Omega)} + \|p\|_{W^{m+1,\alpha}(\Omega)} \le C_0 \Big\{ \|f\|_{W^{m,\alpha}(\Omega)} + \|\phi\|_{W^{m+2-1/\alpha,\alpha}(\partial\Omega)} +$$
$$+ \|g\|_{W^{m+1,\alpha}(\Omega)} + d_\alpha \|u\|_{L^\alpha} \Big\}.$$

Infine osserviamo che se $\alpha \ge 2$ allora possiamo porre $d_\alpha = 0$ dato che in questo caso si ha l'unicitá e il termine $\|u\|_{L^\alpha}$ puó essere rimosso.