

PROGRAMME

- 1) « ANALYSE ZÉRO » ET CALCUL DES LIMITES  
     ↳ Rappels du lycée
- 2) ÉTUDE DE FONCTIONS
- 3) CALCUL INTÉGRAL
- 4) QUELQUES NOTIONS DE TOPOLOGIE DE LA DROITE RÉELLE

RÉFÉRENCES : Poly du cours (disponible sur E-CAMUS)

INTRODUCTION INFORMELLE

Note : Cette introduction n'est pas au programme du cours.

- NOMBRES NATURELS, ENTIERS, RATIONNELS, ALGÈBRIQUES... ET RÉELS

On considère l'ensemble des NOMBRES NATURELS

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

(ou  $\mathbb{N}$ )

On écrit «  $0 \in \mathbb{N}$  » pour indiquer que 0 **APPARTIENT** à l'ensemble  $\mathbb{N}$ .

Sur  $\mathbb{N}$  on a deux opérations : la <sup>(+)</sup>SOMME et la <sup>(.)</sup>PRODUIT.

↓  
élément neutre 0

↓  
élément neutre 1

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad m + 0 = 0 + m = m, \quad m \cdot 1 = 1 \cdot m = m$$

« **POUR TOUT** nombre naturel  $m$  »

En outre, sur  $\mathbb{N}$  on a un ORDRE :  $0 < 1 < 2 < 3 < \dots$

Cependant,  $\mathbb{N}$  ne contient pas tous les opposés  $-1, -2, -3, \dots$

On étend  $\mathbb{N}$  à l'ensemble des NOMBRES ENTIERS (RELATIFS)

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

On écrit  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$  pour indiquer que  $\mathbb{N}$  EST CONTENU dans  $\mathbb{Z}$   
(ou également que  $\mathbb{N}$  EST un SOUS-ENSEMBLE de  $\mathbb{Z}$ )

Dans  $\mathbb{Z}$  on a tous les opposés (les « symétriques » par rapport à la SOMME),

$$m + (-m) = 0$$

mais on n'a pas les INVERSES (les « symétriques » par rapport au PRODUIT)

$$m \cdot ? = 1$$

On étend  $\mathbb{Z}$  à l'ensemble des NOMBRES RATIONNELS :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} \mid n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0 \right\}$$

$\mathbb{Q}$  contient tout OPPOSÉ ( $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow -x \in \mathbb{Q}$ )

Tout INVERSE SAUF ZÉRO ( $x \in \mathbb{Q}, x \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{x} \in \mathbb{Q}$ )

Rappel Pour tout nombre  $x$ , on a  $x \cdot 0 = 0$ , donc il n'y a pas de  $x$  t.q.  $x \cdot 0 = 1$

$$x \cdot 0 = x \cdot (0+0) = x \cdot 0 + x \cdot 0 \Rightarrow x \cdot 0 = 0$$

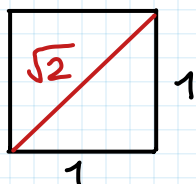
(c'est-à-dire, zéro n'a pas de symétrique par rapport au produit)

Donc...

**S'IL VOUS PLÂIT !!!**

Des expressions comme «  $\frac{1}{0}$  », «  $\frac{0}{0}$  » N'ONT AUCUN SENS !

En outre, il y a d'autres nombres qui ne sont pas rationnels :



$$\sqrt{2} = 1,4142 \dots$$



Mesure du rayon: 1

Mesure de la circonférence:  $2\pi$

$$\pi = 3,1415 \dots$$

Le NOMBRE D'EULER / NÉPER

$$e = \ll \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \gg$$

$$= 2,7182 \dots$$

$\sqrt{2}$ ,  $\pi$ ,  $e$  sont nombres **RÉELS** qui ne sont pas rationnels :

on écrit «  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$  » [Histoire : Légende de Hyppase de Métaponte]

### Démonstration du fait que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Supposons **PAR L'ABSURDE** que  $\sqrt{2}$  soit un nombre rationnel. On peut donc écrire

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \quad \text{avec } m, n \in \mathbb{Z} \text{ PREMIERS ENTRE EUX (c'est-à-dire, la fraction ne peut plus être simplifiée)} \\ (m, n \neq 0)$$

En particulier,  $m$  et  $n$  ne peuvent pas être tous les deux pairs.

$$m = \sqrt{2} \cdot n \Rightarrow m^2 = 2 \cdot n^2 \Rightarrow m^2 \text{ PAIR} \Rightarrow m \text{ PAIR} \Rightarrow m = 2 \cdot k \quad k \in \mathbb{Z}$$

Alors  $2 \cdot n^2 = m^2 = (2k)^2 = 4 \cdot k^2$  le carré d'un nombre impair est impair

En simplifiant:  $n^2 = 2k^2$

Donc  $n^2$  est PAIR, donc  $n$  est PAIR, ce qui contredit l'hypothèse que  $m$  et  $n$  sont premiers entre eux.

Faits connus:  $\pi \notin \mathbb{Q}$  (Lambert, 1761)

$e \notin \mathbb{Q}$  (Euler, 1737)

Nombres comme  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt[3]{2}$ ,  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  sont IRRATIONNELS mais, quand-même, ils sont liés aux nombres rationnels via des opérations algébriques :

$(\sqrt{2})^2 = 2 \in \mathbb{Q}$  ~~~~~  $\sqrt{2}$  satisfait l'équation polynomiale  $x^2 - 2 = 0$

$(\sqrt[3]{2})^3 = 2 \in \mathbb{Q}$  ~~~~~  $\sqrt[3]{2}$  satisfait l'équation polynomiale  $x^3 - 2 = 0$

$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 \in \mathbb{Q}$  ~~~~~  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  satisfait l'équation polynomiale  $x^2 - x - 1 = 0$

Def. Un nombre réel est dit **ALGÈBRE** s'il est solution d'une équation polynomiale à coefficients entiers. Sinon, il est dit **TRANSCENDANT**.

Faits connus:  $\pi$  est transcendant (Lindemann, 1882) **DIFFICILE!**

$e$  est transcendant (Hermite, 1873)

La « plupart » des nombres réels n'est pas algébrique : d'où ils proviennent ?

Réponse : LIMITES DES SUITES des nombres rationnels.

Def. Soit  $E$  un ensemble. Une SUITE d'éléments de  $E$  est une fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & E \\ n & \longmapsto & u_n \end{array}, \text{ notée aussi } (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

Exemples  $E = \mathbb{Q}$ ,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$   $u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, \dots$

$$u_n = n \quad 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

$$u_n = n^2 \quad 0, 1, 4, 9, 16, 25, \dots$$

$$u_n = \frac{1}{n+1} \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$$

$$u_n = 2^n \quad 1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots$$

$$(\text{Pour } n \geq 1) \quad u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad 2, \frac{9}{4}, \left(\frac{4}{3}\right)^3, \left(\frac{5}{4}\right)^4, \left(\frac{6}{5}\right)^5 = 2,48832, \dots$$

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_n = \sum_{k=0}^n 2^k = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n$

$$u_0 = 2^0 = 1$$

$$u_1 = 2^0 + 2^1 = 1 + 2 = 3$$

$$u_2 = 2^0 + 2^1 + 2^2 = 1 + 2 + 4 = 7$$

$$u_3 = 15, \quad u_4 = 31, \dots$$

Notation  $\sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + \dots + a_n$

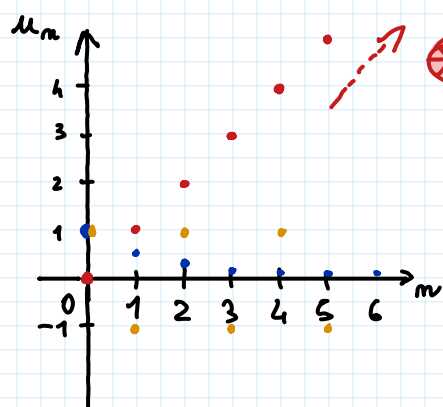
- $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}$

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad u_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}, \quad u_3 = \frac{15}{8}, \dots$$

- $u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

$$u_0 = 1, \quad u_1 = -\frac{1}{2}, \quad u_2 = \frac{1}{4}, \quad u_3 = -\frac{1}{8}, \quad u_4 = \frac{1}{16}, \dots$$

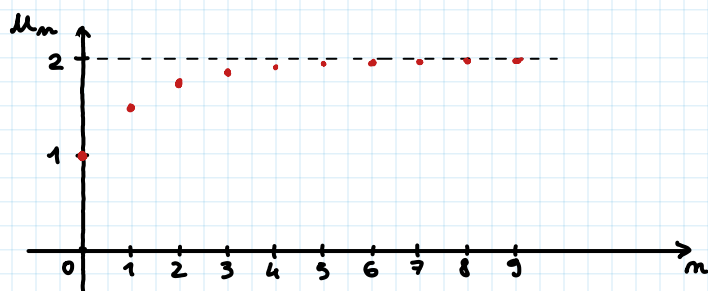
On peut tracer un graphique d'une suite de nombres :



•  $u_n = n$

•  $u_n = \frac{1}{n+1}$

•  $u_n = (-1)^n$



$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

On dit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$  : Qu'est-ce que ça veut dire ?

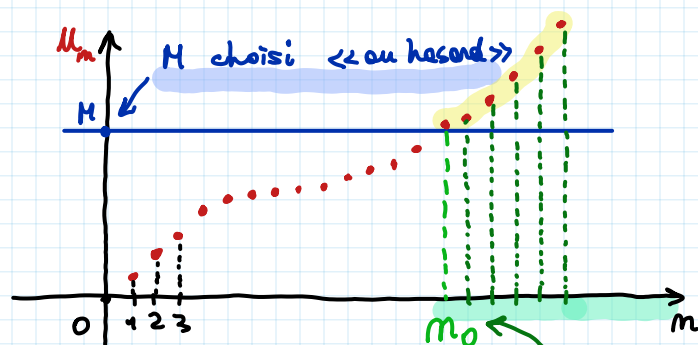
En général,  $\ll \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \gg$  signifie :

« Quel que soit le nombre, même très grand, que l'on choisisse, à partir d'un certain rang, la suite le dépasse et ne redescend plus en dessous. »

[RAPPEL : PAS AU PROGRAMME]

Traduction en langage mathématique :

$$\forall M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n > n_0, u_n > M$$



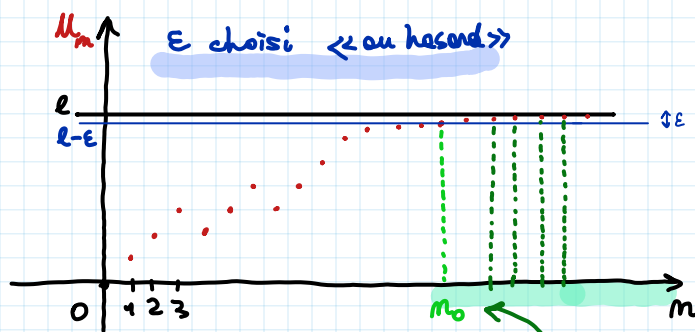
A PARTIR DE  $n_0$ , LA SUITE  $u_n$  DÉPASSE  $M$  DÉFINITIVEMENT

De même,  $\ll \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \gg$  signifie :  $\epsilon \in \mathbb{R}$

« Quel que soit le nombre, même très petit, que l'on choisisse, à partir d'un certain rang, la suite est à une distance de  $l$  inférieure à ce nombre »

Traduction en langage mathématique :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n > n_0, |u_n - l| < \epsilon$$



Exemple  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$  [ $l = 0$ ]

Quel que soit le nombre, même très petit, que l'on choisisse  $\epsilon = 10^{-100}$   
à partir d'un certain rang  $n_0 = 10^{100}$

la suite est à une distance de 0 inférieure à  $\epsilon$  Si  $n > n_0 = 10^{100}$ ,  
alors  $\frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} = 10^{-100} = \epsilon$

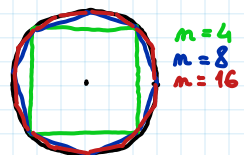
Une manière de décrire l'ensemble  $\mathbb{R}$  des nombres réels est d'étendre  $\mathbb{Q}$  « en rajoutant » toutes limites des suites convergentes.  
(Nous en donnons une description plus précise plus loin...)

Ex.  $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

$\pi = 4 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 4 \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$  (Leibniz)

Ou :

PÉRIMÈTRE DU  
POLYÈDRE INSCRIT  
À  $n$  CÔTÉS,  
POUR  $n \rightarrow +\infty$



Def. Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ .

$u_n = a \cdot n + b$  est dit SUITE ARITHMÉTIQUE de raison  $a > 0$  ;

$u_n = a^n$  est dit SUITE GÉOMÉTRIQUE de raison  $a > 1$ .

Exemple (Somme des Termes d'une suite géométrique)

Soit  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq 0$  et  $x \neq 1$

$$u_n = \sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^n.$$

$$\begin{aligned} \text{On a } (x-1)u_n &= (x-1)(x^0 + x^1 + \dots + x^n) \\ &= \cancel{x^{n+1}} - \cancel{x^n} + \cancel{x^n} - \cancel{x^{n-1}} + \dots + \cancel{x^2} - \cancel{x} + \cancel{x} - 1 \\ &= x^{n+1} - 1. \end{aligned}$$

On a donc :

$$u_n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \quad (\text{Formule explicite})$$

Exemple Pour  $x=2$ , on a  $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1.$

Pour  $x = \frac{1}{2}$ , on a  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{(\frac{1}{2})^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 2 - \frac{1}{2^n}.$

Rmq.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0.$

La somme infinie (série)  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \dots$

A UN SENS (c'est la limite de la suite  $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$ ), et comme

$\frac{1}{2^n} \rightarrow 0$ , on a  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots = 2.$

Note: ceci est INFORMAL ! Pour le justifier proprement il faudrait utiliser le fait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2 - \frac{1}{2^n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 2$ .

## Faits connus (Partie II)

### • La SÉRIE HARMONIQUE:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots = +\infty$$

On dit qu'elle DIVERGE à  $+\infty$ . Formellement :

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = +\infty \quad [\text{Nous allons le voir plus avant}]$$

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{6^4} + \dots = \frac{\pi^4}{90}$$

• Si  $m \geq 2$  est PAIR, en général on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^m} = 1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{5^m} + \frac{1}{6^m} + \dots = (\text{nombre rationnel}) \cdot \pi^m$$

• Si  $m \geq 3$  est IMPAIR, on ne sait pas dire beaucoup sur la nature de

$$1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{5^m} + \frac{1}{6^m} + \dots$$

Cette suite converge bien vers un nombre réel, mais, en général, on ne sait pas si ce nombre est TRANSCENDANT, ni s'il est RATIONNEL.

Pour l'instant, pour  $m=3$ , on sait :

NUMÉRIQUES  
TRANSCENDANTS

Théorème (Apéry, 1978, Université de Coen)

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \dots \notin \mathbb{Q}$$

Mais on ne sait pas encore s'il est transcendant...

Les nombres  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^m}$  pour  $m \geq 2$  sont les valeurs aux entiers de la

FONCTION ZÊTA DE RIEMANN :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots$$

définie (sur les réels) pour  $s > 1$ .

→ Normalement,  $\zeta(s)$  est définie « avec les nombres complexes »

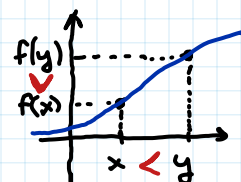
$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(3) \notin \mathbb{Q}$$

↑ constante de Apéry

La fonction zêta de Riemann est au cœur de l'un des plus importants PROBLÈMES OUVERTS des Mathématiques, l'HYPOTHÈSE DE RIEMANN, et elle est profondément liée à l'étude de la DISTRIBUTION DES NOMBRES PREMIERS (ici on est dans le domaine de la Théorie ANALYTIQUE des Nombres).

FIN DE L'INTRODUCTION / « VULGARISATION »

$E \subseteq D_f$  sous-ensemble (avec au moins deux éléments)



-