

Exercices sur le calcul de limites

Analyse 1 – L1 Math (Groupe 4)

24 septembre 2026

Exercice 1 (mixte). Calculer les limites suivantes, où $a \in \mathbb{R}$ est un paramètre (et n désigne un nombre naturel).

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x} - 1)(x^5 + 1)}{x^3(x^3 - 1)} ;$
2. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2} ;$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x^2 + 1}} ;$
4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^3 + x^2 + 1}{x\sqrt{x^2 + 1} + x - 3} ;$
5. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{4^n + 5^n} ;$
6. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2^n - (-1)^n} .$

Exercice 2 (Exo. 14 du fichier long). Soit $a \in \mathbb{R}_+$ et soit $(u_n)_n$ la suite définie par : $u_0 = a$ et $u_{n+1} = \frac{2}{4 + u_n}$ pour tout $n \geq 0$.

1. Montrer que la suite est bien définie et vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$.
2. Résoudre l'équation $x = \frac{2}{4 + x}$. Montrer qu'il n'y a qu'une seule solution positive, qu'on notera α . Est $\alpha = \sqrt{6} - 2$.
3. Prouver qu'on a : $\forall n, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{8}|u_n - \alpha|$. On utilisera la définition de α dans la question précédente.
4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{8^n}|a - \alpha|$.
5. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} (2 + u_n) = \sqrt{6}$. Pouvez-vous donner un nombre rationnel qui approche $\sqrt{6}$ à 10^{-2} près ? Cela donne-t-il les deux premiers chiffres après la virgule de $\sqrt{6}$?

Exercice 3 (Exo. 9 de la partie finale du fichier long). On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_1 = 2$ et $u_{n+1} = 2\sqrt{u_1 + u_2 + \dots + u_n + n + 1}$ pour tout $n \geq 1$. Calculer la limite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n}$.

Exercice 4 (Exo. 12 de la partie finale du fichier long). On rappelle que pour $a \geq 0$, $\sqrt[n]{a} = x$ désigne l'unique réel positif tel que $x^n = a$. On pose, pour tout $n \geq 1$, $u_n = \sqrt[n]{n}$. Montrer que :

$$\forall n \geq 2, \quad 1 \leq u_n \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$$

En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.