TD L1 BST (GROUPE 5) - 13/10/2025

Informations : Tous les fichiers peuvent être trouvés à l'adresse

https://poisson.phc.dm.unipi.it/~dinunzio/Teaching

Pour toute question : antonio.dinunzio@unicaen.fr

Dans les exercices suivants (13 à 20), étudier une fonction f consiste à

a) Déterminer le domaine de définition (si ce n'est pas précisé) ; Ce sera toujours le cas !

b) Calculer $f'(x)$;

c) Déterminer le signe de $f'(x)$;

d) Calculer les limites de f aux bornes du domaine de définition ;

e) Donner le tableau de variations de f ;

f) Déssiner le graphe de la fonction.

Exercice 13. On pose pour $x \geq 0$, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$. Etudier f.

Solution

a) ✓

b)
$$f'(x) = (x^3)' - (6x^2)' + (9x)' - (1)'$$
$$= 3x^2 - 6(x^2)' + 9(x)' - 0$$
$$= 3x^2 - 6 \cdot 2x + 9$$
$$= 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3)$$

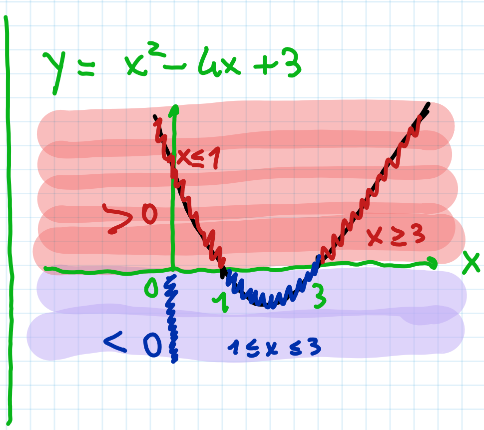
c)
$$f'(x) \geq 0 \iff 3(x^2 - 4x + 3) \geq 0$$
$$\iff x^2 - 4x + 3 \geq 0$$

$$\Delta = (4)^2 - 4 \cdot 3 = 16 - 12 = 4 > 0$$

Les racines de $x^2 - 4x + 3$ sont

$$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} 6/2 = 3 \\ 2/2 = 1 \end{cases}$$

Donc $x^2 - 4x + 3 \geq 0 \iff x \leq 1 \vee x \geq 3$

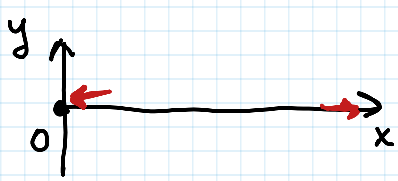


Donc $f'(x) \geq 0 \iff x \leq 1 \vee x \geq 3$

$f'(x) < 0 \iff 1 < x < 3$

d) Notre domaine de définition est "$x \geq 0$"

$[0, +\infty[$



borne $\quad 0 \quad +\infty$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (\underbrace{x^3}_{0} - \underbrace{6x^2}_{0} + \underbrace{9x}_{0} \underbrace{-1}_{-1}) = -1$$

- $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$
- $\lim_{x\to 0} f(x)$ "=" $f(0)$

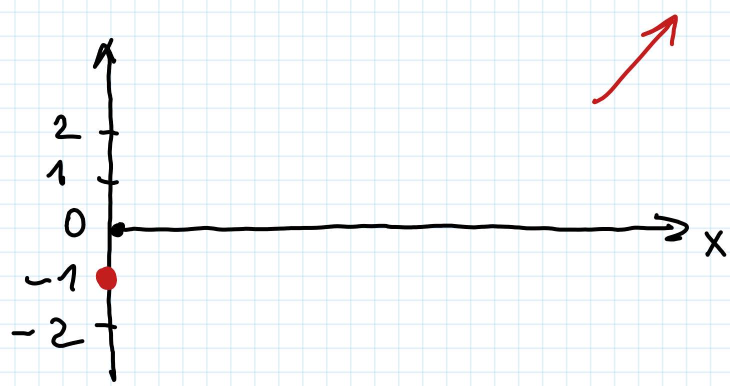
$$\lim_{x\to 0}(x^3 - 6x^2 + 9x - 1) = \lim_{x\to 0} x^3 + \lim_{x\to 0}(-6x^2) + \lim_{x\to 0}(9x) + \lim_{x\to 0}(-1)$$

$$= \underbrace{0^3}_{0} + \underbrace{(-6\cdot 0^2)}_{0} + \underbrace{(9\cdot 0)}_{0} - 1 = -1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(x^3 - 6x^2 + 9x - 1\right)$$

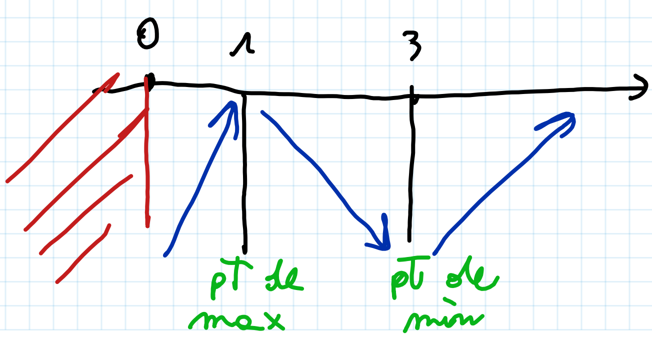
Règle : $\lim_{x\to\pm\infty} (\text{polynôme}) = \lim_{x\to\pm\infty} (\text{Term de degré max})$

$$\lim_{x\to+\infty} (x^3) = +\infty$$

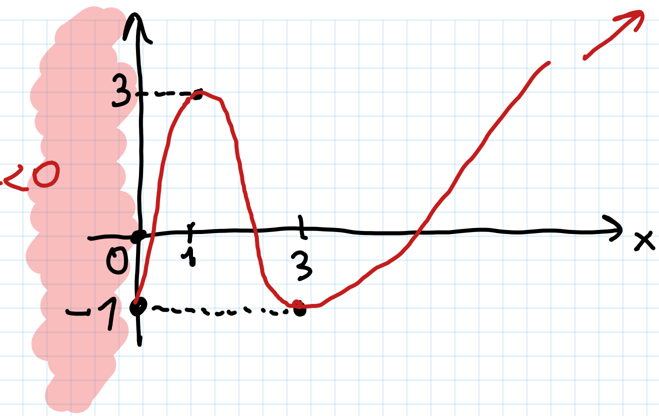


e) $f'(x) \geq 0 \iff x \leq 1 \lor x \geq 3$

$f'(x) < 0 \iff 1 < x < 3$



f)



g) Donner l'équation (et dessiner) la tangente au point d'abscisse $x = 1$.

$$f(1) = \left(x^3 - 6x^2 + 9x - 1\right)\Big|_{x=1} = 1^3 - 6\cdot 1^2 + 9\cdot 1 - 1 = 3$$

rempl. $x = 1$ dans l'expression de f.

$$f(3) = 3^3 - 6\cdot 3^2 + 9\cdot 3 - 1 = \cancel{27} - 2\cdot\cancel{27} + \cancel{27} - 1 = -1$$

Formule : droit tangent à f en $x = x_0$

$$y = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$$

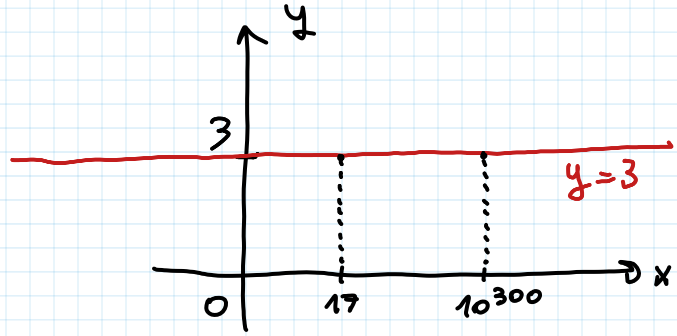
Donc en $x = 1$ on a

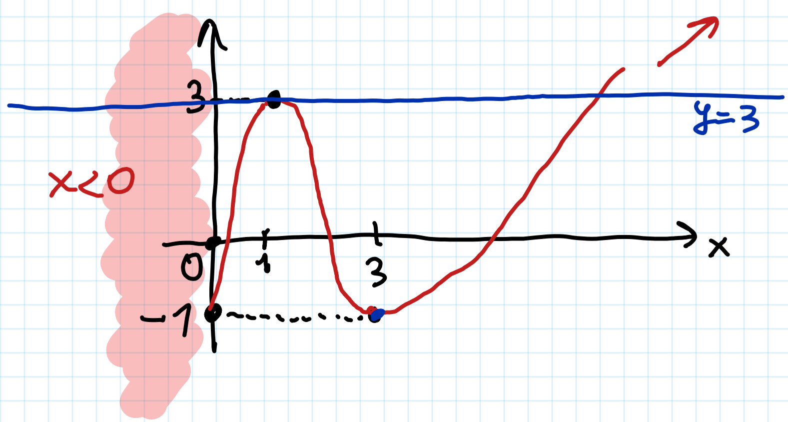
$$y = f'(1)\cdot(x - 1) + f(1)$$

$f(1) = 3$ (déjà vu)

$f'(1) = 0$ (déjà vu)

la droit tangent en $x = 1$ est $y = 3$





Exo. Étudier la fonction $f(x) = x + \ln(x) - \frac{1}{x}$ pour $x > 0$.

Solution

a) √ $x > 0$ (déjà précisé)

b) Rappel : $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{(x)'}{x^2} = -\frac{1}{x^2} \qquad \left(\frac{1}{u(x)}\right)' = -\frac{u'(x)}{u^2(x)}$$

$u(x) = x$

$$f'(x) = (x)' + (\ln(x))' - \left(\frac{1}{x}\right)'$$

$$= 1 + \frac{1}{x} - \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

c) $$f'(x) = \frac{1}{1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2+x+1}{x^2}$$

$$1 = \frac{1}{1} = \frac{x^2}{x^2}$$

$\frac{3}{3} = 1 \qquad \frac{5}{5} = 1 \qquad \frac{a}{a} = 1$ (pour $a \neq 0$)

$$\frac{1}{x} = \frac{x \cdot 1}{x \cdot x} = \frac{x}{x^2}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 3 - 1 \cdot 2}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}$$

$$f'(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2} \geq 0$$

Puisque $x>0$, on a $x^2+x+1>0$ et $x^2>0$

et donc $\frac{x^2+x+1}{x^2} > 0$ (pour tout $x>0$)

$1\cdot x^2+x+1>0$?

$\Delta = 1^2 - 4\cdot1\cdot1 = 1-4 = -3 < 0$

$\Rightarrow$ x^2+x+1 est toujours positif

PAS f' !

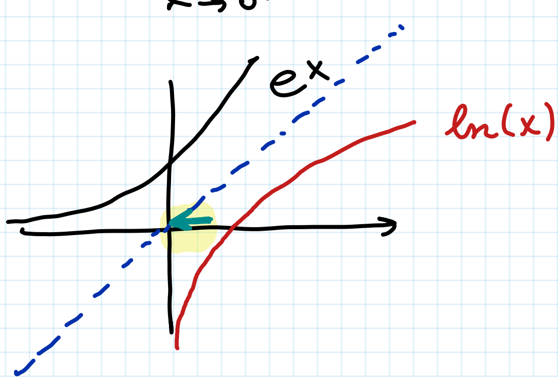
d) Limites de f aux bornes du domaine.

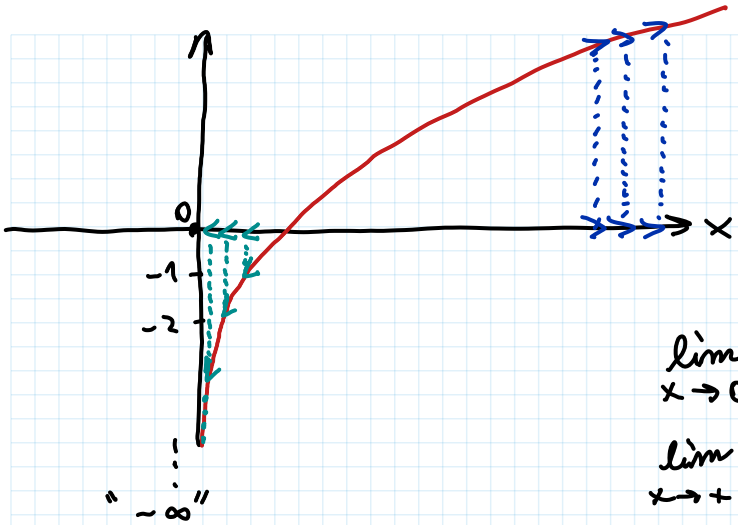
Domain : " $x>0$ " $]0,+\infty[$

" 0^+ " " $+\infty$ "

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\left(x+\ln(x)-\frac{1}{x}\right)$$

Rappel :

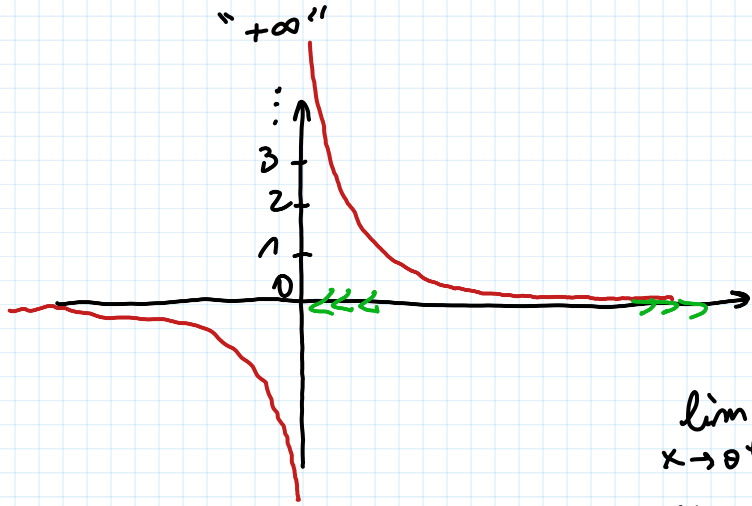




$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$$

$\frac{1}{x}$



$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Rappel : en général x^{α} pour $x > 0$

$\rightsquigarrow$

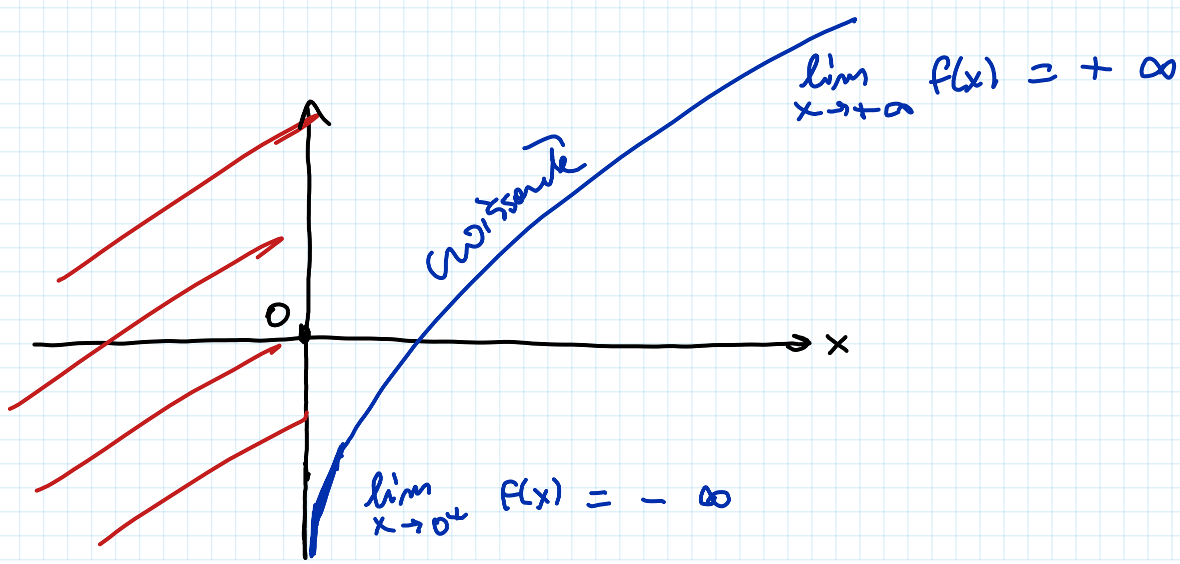
$$\lim_{x\to 0^+}\left(x+\ln(x)-\frac{1}{x}\right)=\underbrace{\lim_{x\to 0^+}(x)}_{\substack{0\\(x=0)}}+\underbrace{\lim_{x\to 0^+}\ln(x)}_{\substack{(-\infty)\\(\text{graph})}}-\underbrace{\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)}_{(+\infty)}$$

$$=0-\infty-\infty=-\infty.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\underset{\substack{\downarrow\\+\infty}}{x}+\underset{\substack{\downarrow\\+\infty}}{\ln(x)}-\underset{\substack{\downarrow\\0}}{\frac{1}{x}}\right)=+\infty$$

e) $\forall x>0:\quad f'(x)>0$

f)



EXTRA : Quelques solutions

Exercice 16. On pose pour $x > 0$: $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$. Étudier f. Donner l'équation de la tangente en $x = 1$ et en $x = 2$.

Solution.

- Étude de f

a) Domaine : $x > 0$

b) $$f'(x) = (x)' + \left(\frac{4}{x^2}\right)' = (x)' + 4\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right)'$$

$$= 1 + 4\cdot\left(-\frac{2}{x^3}\right)$$

Rappel: $\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$

$$= 1 - 4\cdot\frac{2}{x^3}$$

$$= 1 - \frac{8}{x^3}$$

$$= \frac{x^3}{x^3} - \frac{8}{x^3} = \frac{x^3 - 8}{x^3}$$

c) $$f'(x) \geq 0 \iff \frac{x^3 - 8}{\underbrace{x^3}_{>0}} \geq 0$$ pour tout $x > 0$

Étude du signe : $x^3 - 8 \geq 0 \iff x \geq \sqrt[3]{8} = 2$

Donc $f'(x) \geq 0 \iff x \geq 2$

$f'(x) < 0 \iff \underbrace{0 <}_{\text{notre condition sur le domaine}} x < 2$

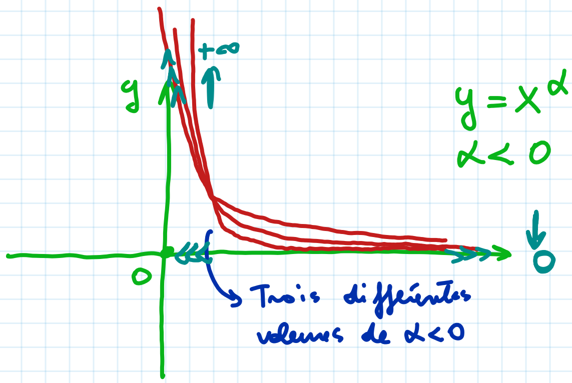
En particulier, $f'(x) = 0 \iff x = 2$.

On note que $f(2) = 2 + \frac{4}{2^2} = 2 + \frac{4}{4} = 2 + 1 = 3$.

d) Le bornes du domaine sont 0 et $+\infty$

$]0, +\infty[$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(x + \frac{4}{x^2} \right) = \underbrace{\lim_{x \to 0^+} (x)}_{=0} + 4 \underbrace{\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x^2} \right)}_{=+\infty} = +\infty$$



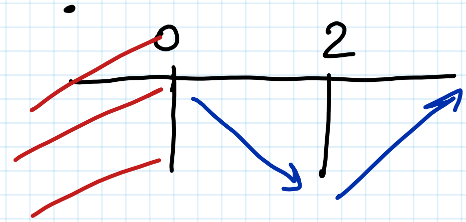
Voir le graphe de x^α pour $\alpha < 0$ (dans ce cas, $\alpha = -2$)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x + \frac{4}{x^2} \right) = \overbrace{\lim_{x \to +\infty} (x)}^{=+\infty} + 4 \cdot \overbrace{\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x^2} \right)}^{=0} = +\infty$$

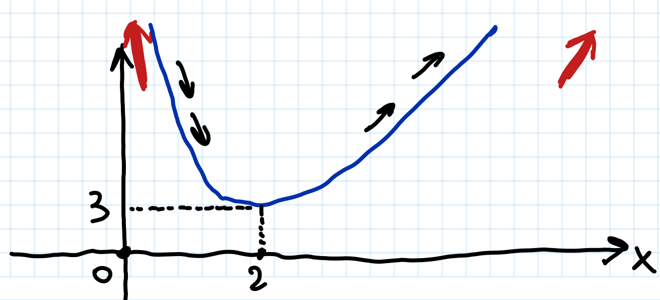
e) Tableau des variations de f :

$f'(x) \geq 0 \iff x \geq 2$

$f'(x) < 0 \iff x < 2$ (et $x > 0$ domaine)



f)



Droit Tangente en $x=1$ et $x=2$:

$x=1$) Formule $\leadsto$ $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$$f(1) = 1 + \frac{4}{1^2} = 5$$

$$f'(1) = 1 - \frac{8}{1^3} = 1 - 8 = -7$$

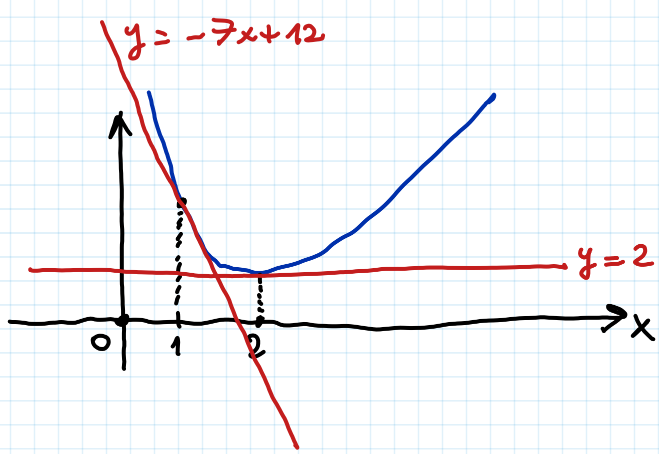
$\leadsto$ $y = -7(x-1) + 5 = -7x + 12$

$x=2$) Formule $\leadsto$ $y = f'(2)(x-2) + f(2)$

$$f(2) = 2 + \frac{4}{2^2} = 2 + \frac{4}{4} = 2 + 1 = 3$$

$f'(2) = 0$ (déjà vu)

$\leadsto$ $y = 0 \cdot (x-2) + 3 = 3$



Déssine pas necessaire !

Exercice 19. On pose pour $x > 0$: $f(x) = \frac{(x-3)^2}{4} + \ln(x)$, où ln est la fonction logarithme en base e. Étudier la fonction f.

Sol.

a) ok : $x > 0$

b) $$f'(x) = \left(\frac{(x-3)^2}{4}\right)' + \underbrace{(\ln(x))'}_{1/x}$$

$$= \frac{1}{4}\underbrace{\left((x-3)^2\right)'} + \frac{1}{x}$$

Deux manières

à la main

$$(x-3)^2 = x^2 - 2\cdot 3 \cdot x + 3^2$$
$$= x^2 - 6x + 9$$

$$\left((x-3)^2\right)' = (x^2 - 6x + 9)'$$
$$= 2x - 6$$

composition

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))\, g'(x)$$

$$g(x) = x - 3, \quad g'(x) = 1$$
$$f(x) = x^2, \quad f'(x) = 2x$$

$$f(g(x)) = (x-3)^2$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$
$$= 2 \cdot g(x) \cdot g'(x)$$
$$= 2(x-3) \cdot 1$$
$$= 2x - 6$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{4}(2x-6) + \frac{1}{x} = \frac{x-3}{2} + \frac{1}{x}$$

c) $$f'(x) = \frac{x-3}{2} + \frac{1}{x} = \frac{x-3}{2}\cdot\frac{x}{x} + \frac{1}{x}\cdot\frac{2}{2}$$

$$= \frac{(x-3)x}{2x} + \frac{2}{2x}$$

$$= \frac{(x-3)x+2}{2x}$$

$$= \frac{x^2-3x+2}{2x}$$

$$f'(x) \geq 0 \iff \frac{x^2-3x+2}{\underbrace{2x}_{\text{déjà } >0 \text{ parce que on a supposé } x>0}} \geq 0$$

$$\iff \underset{(x>0)}{x^2-3x+2 \geq 0}$$

Racines $x=1$ et $x=2$ $(\Delta = 1)$

$$\iff \begin{cases} x \leq 1 \ \vee \ x \geq 2 \\ x > 0 \quad (\text{domaine}) \end{cases}$$

En particulier $f'(x) = 0 \iff x = 1 \ \vee \ x = 2$

d) Encore une fois : $x \to 0^+$ et $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \underbrace{\lim_{x\to 0^+} \frac{(x-3)^2}{4}}_{\text{Pour "}x=0\text{" je trouve : } \frac{(-3)^2}{4} = \frac{9}{4} \text{ ok!}} + \underbrace{\lim_{x\to 0^+} \ln(x)}_{-\infty \text{ déjà vu}}$$

$$= \frac{9}{4} - \infty = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \underbrace{\lim_{x\to +\infty} \frac{(x-3)^2}{4}}_{=+\infty} + \underbrace{\lim_{x\to +\infty} \ln(x)}_{=+\infty \text{ déjà vu}} = +\infty$$

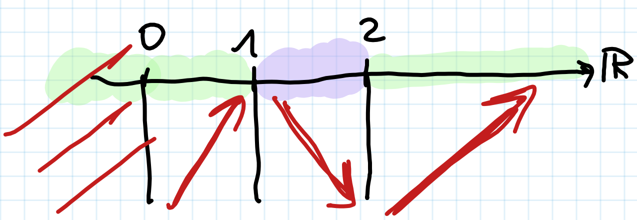
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-6x+9}{4} = \frac{1}{4} \lim_{x\to +\infty} (x^2-6x+9)$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{x\to +\infty} (x^2) = +\infty$$

e) $f'(x) \geq 0 \iff x \leq 1 \vee x \geq 2$

$(\text{et } x > 0)$

$f'(x) < 0 \iff 1 < x < 2$



On note que $f(1) = \frac{(1-3)^2}{4} + \underbrace{\ln(1)}_{=0} = \frac{(-2)^2}{4} + 0 = \frac{4}{4} = 1$

rappel !

$f(2) = \frac{(2-3)^2}{4} + \ln(2) = \frac{(-1)^2}{4} + \ln(2)$

$= \frac{1}{4} + \ln(2) > 0$

f)