TD L1 BST (GROUPE 6) - 13/10/2025

Informations : Tous les fichiers peuvent être trouvés à l'addresse

https://poisson.phc.dm.unipi.it/~dinunzio/Teaching

Pour toute question : antonio.dinunzio@unicaen.fr

Dans les exercices suivants (13 à 20), étudier une fonction f consiste à

a) Déterminer le domaine de définition (si ce n'est pas précisé) ; Ce sera toujours le cas !

b) Calculer $f'(x)$;

c) Déterminer le signe de $f'(x)$;

d) Calculer les limites de f aux bornes du domaine de définition ;

e) Donner le tableau de variations de f ;

f) Déssiner le graphe de la fonction.

Exo. Pour $x \geq 0$, étudier $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 15$.

Sol.

a) ok!

b)
$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x^3)' + (-9x^2)' + (12x)' + (15)' \\ &= 2(x^3)' - 9(x^2)' + 12(x)' + 0 \\ &= 2 \cdot 3x^2 - 9 \cdot 2x + 12 \\ &= 6x^2 - 18x + 12 \end{aligned}$$

c) $f'(x) \geq 0 \iff 6x^2 - 18x + 12 \geq 0$

$$\iff 6(x^2-3x+2)\geq 0$$

$$\iff x^2-3x+2\geq 0$$

$$\Delta = 3^2-4\cdot 2 = 9-8 = 1$$

La racines de x^2-3x+2 sont $\dfrac{3\pm\sqrt{\Delta}}{2} = \dfrac{3\pm 1}{2}$ $\nearrow 2$ $\searrow 1$

Regle : ax^2+bx+c avec $a>0$

on pose $\Delta = b^2-4\cdot a\cdot c$

On a : deux racines distinguées si $\Delta>0$

une racine si $\Delta=0$

pas de racines si $\Delta<0$

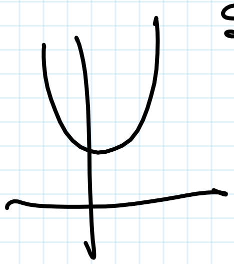
Après, on a :

si $\Delta\geq 0$, les racines sont $\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ / x_1, x_2

$x_1<x_2$

Dans ce cas, on a $ax^2+bx+c\geq 0$

si et seulem. si $x\leq x_1 \vee x\geq x_2$



Si $\Delta<0$, alors $ax^2+bx+c>0$

pour tout $x\in\mathbb{R}$

Par la règle, on a $x^2 - 3x + 2 \geq 0$

$$\Updownarrow$$

$$x \leq 1 \quad \vee \quad x \geq 2$$

Donc $f'(x) \geq 0 \iff x \leq 1 \vee x \geq 2$

(et $x \geq 0$)

→ domaine de déf

$f'(x) < 0 \iff 1 < x < 2$

d) Domaine : "$x \geq 0$" $[0, +\infty[$

0 $+\infty$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(2x^3 - 9x^2 + 12x + 15\right)$$

On peut remplacer x par 0
("Polynômes sont continues")

$$= 2 \cdot 0^3 - 9 \cdot 0^2 + 12 \cdot 0 + 15 = 15$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (\underbrace{2x^3} - 9x^2 + 12x + 15)$$

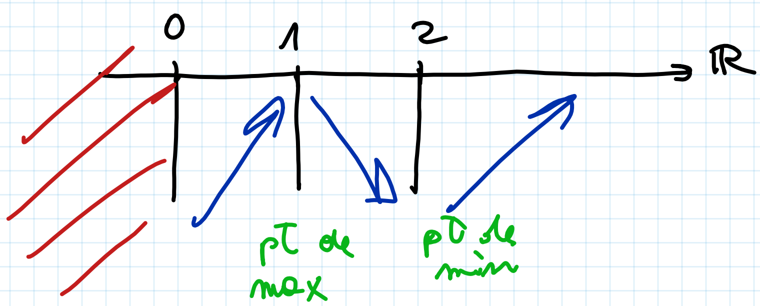
Regle $\quad \lim\limits_{x \to \pm\infty} (\text{polynôme}) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (\text{Terme de degré maximale})$

$$\lim_{x \to +\infty} (2x^3 - 9x^2 + 12x + 15) = \lim_{x \to +\infty} (2x^3) = +\infty$$

e) Tableau de variation de f

$$f'(x) \geq 0 \iff x \leq 1 \ \vee \ x \geq 2$$

(avec $x > 0$)



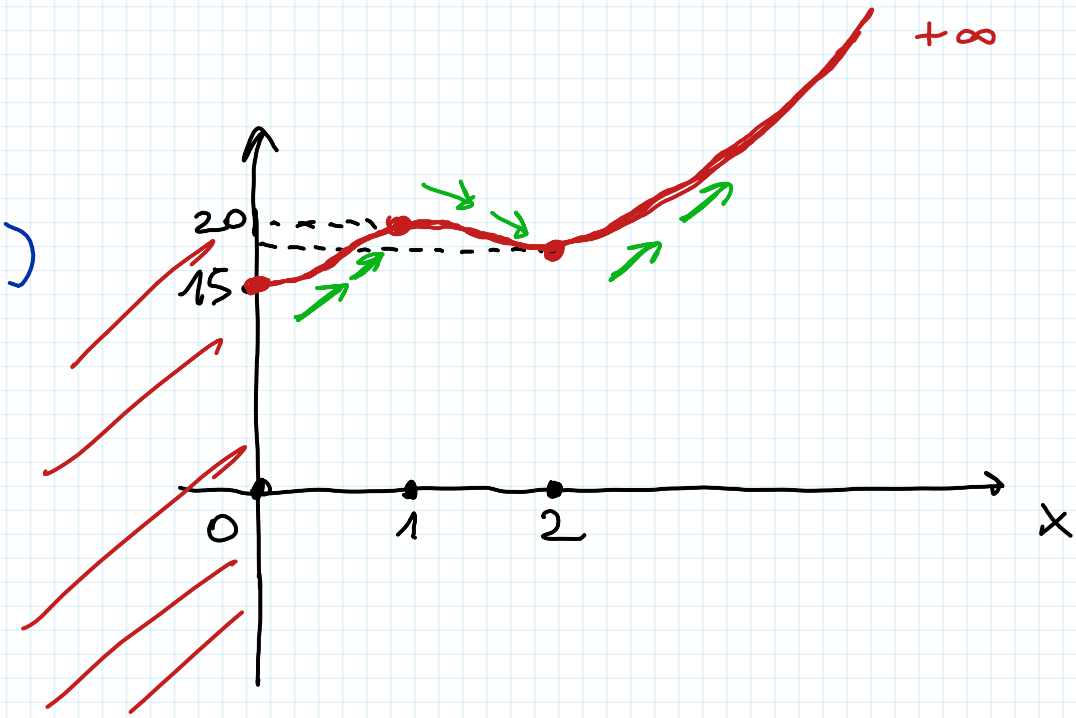
Rappel : f est croissante pour le valeurs de x t.q. $f'(x) \geq 0$

On note que $f(1) = 2 \cdot 1^3 - 9 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 + 15$

$= 2 - 9 + 12 + 15 = 20$

$$f(2) = 2\cdot 2^3 - 9\cdot 2^2 + 12\cdot 2 + 15$$
$$= 19$$

f)



Exe. Étudier, pour $x>0$, la fonction

$$f(x) = -x - \ln(x) + \frac{1}{x}$$

Solution.

a) ✓

b) $f'(x) = -1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$

$$1 + \frac{4}{3} = \frac{3}{3} + \frac{4}{3}$$
$$= \frac{3+4}{3} = \frac{7}{3}$$

$$-1 = -\frac{x^2}{x^2} \quad , \quad -\frac{1}{x} = -\frac{x}{x^2}$$

$$f'(x) = -\frac{x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{-x^2 - x - 1}{x^2}$$

$$= -\frac{x^2+x+1}{x^2}$$

c) Signe de la dérivée : $x > 0$

$x^2 > 0$

Donc $f'(x) \geq 0 \iff -\frac{x^2+x+1}{x^2} \geq 0$

$\iff -(x^2+x+1) \geq 0$

$x^2 > 0$ toujours

- Avec Δ : on trouve que pour x^2+x+1,

on a $\Delta = 1^2 - 4 = -3 < 0$

On a vu que alors $x^2+x+1 > 0$ pour tout x

et donc $-(x^2+x+1) < 0$ pour tout x

et donc $f'(x) = -\dfrac{x^2+x+1}{x^2} < 0$

pour tout $x > 0$

domaine

d) Domaine : $]0, +\infty[$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(-x - \ln(x) + \frac{1}{x}\right)$$

$$= \underbrace{-\lim_{x\to 0^+}(x)}_{\text{"}x=0\text{"}} - \underbrace{\lim_{x\to 0^+}\ln(x)}_{\text{Vous savez que } = -\infty} + \underbrace{\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}}_{\text{Vous savez que } = +\infty}$$

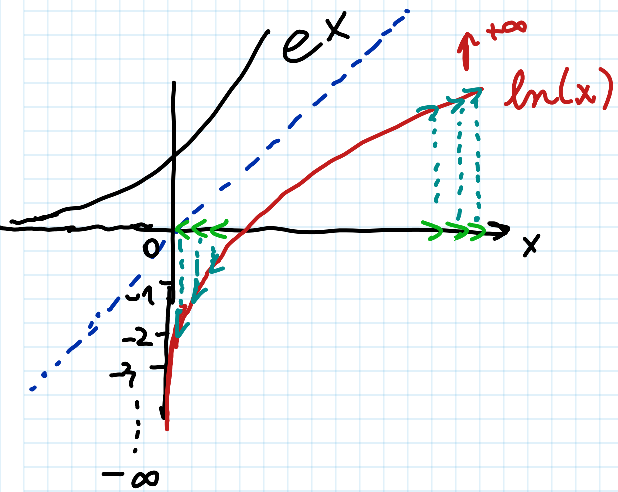
$\to 0$

$$= -0 - (-\infty) + \infty$$

$$= 0 + \infty + \infty = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(-x - \ln(x) + \frac{1}{x}\right)$$

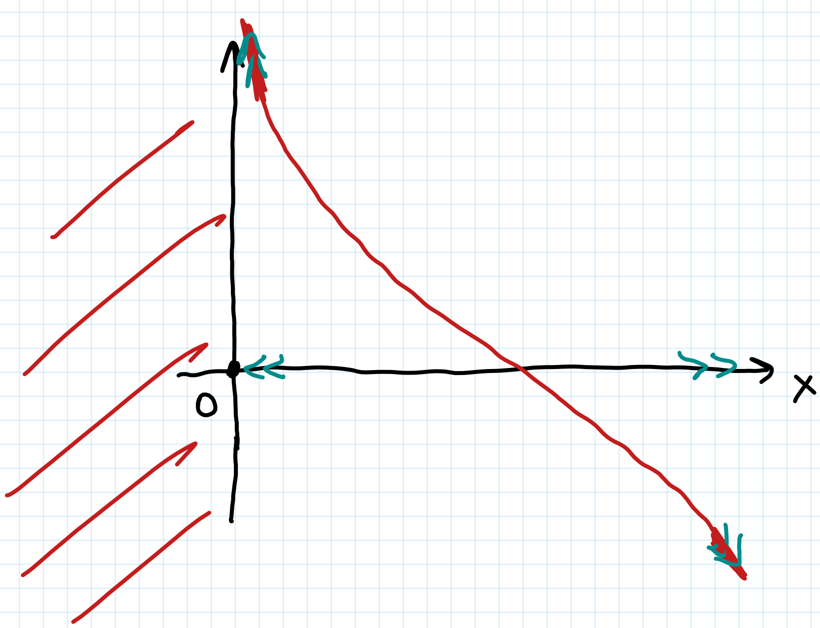
$$= -\underbrace{\lim_{x\to+\infty}(x)}_{+\infty} - \underbrace{\lim_{x\to+\infty}\ln(x)}_{+\infty} + \underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}_{=0}$$



$$= -\infty - \infty + 0 = -\infty$$

e) $f'(x) < 0$ pour tout $x > 0$

f)



Exo. Étudier les fonctions $f(x) = e^x \cdot x^2$

$$g(x) = e^{-x} \cdot (x^2 + 1)$$

pour $x \geq -5$.

Sol.

$$f'(x) = (e^x)' \, x^2 + e^x \, (x^2)'$$

$$= e^x \, x^2 + e^x \, (2x)$$

$$= e^x \left(x^2 + 2x \right)$$

Signe de f' : $\underbrace{e^x}_{\text{toujours } > 0} (x^2 + 2x) \geq 0 \iff x^2 + 2x \geq 0$

Comme déjà vu : $x^2 + 2x$

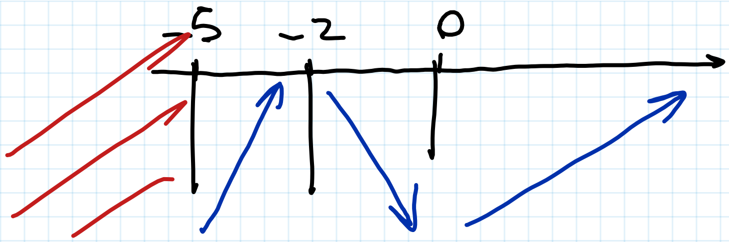
(racines sont 0 et -2)

$x^2 + 2x \geq 0 \iff x \leq -2 \lor x \geq 0$

		-2		0	
x^2+2x	$+$	|	$-$	|	$+$

Donc $f'(x) \geq 0 \iff x \leq -2 \lor x \geq 0$

(avec $x \geq -5$)



Limites : le domaine est $[-5, +\infty[$

En -5 on a

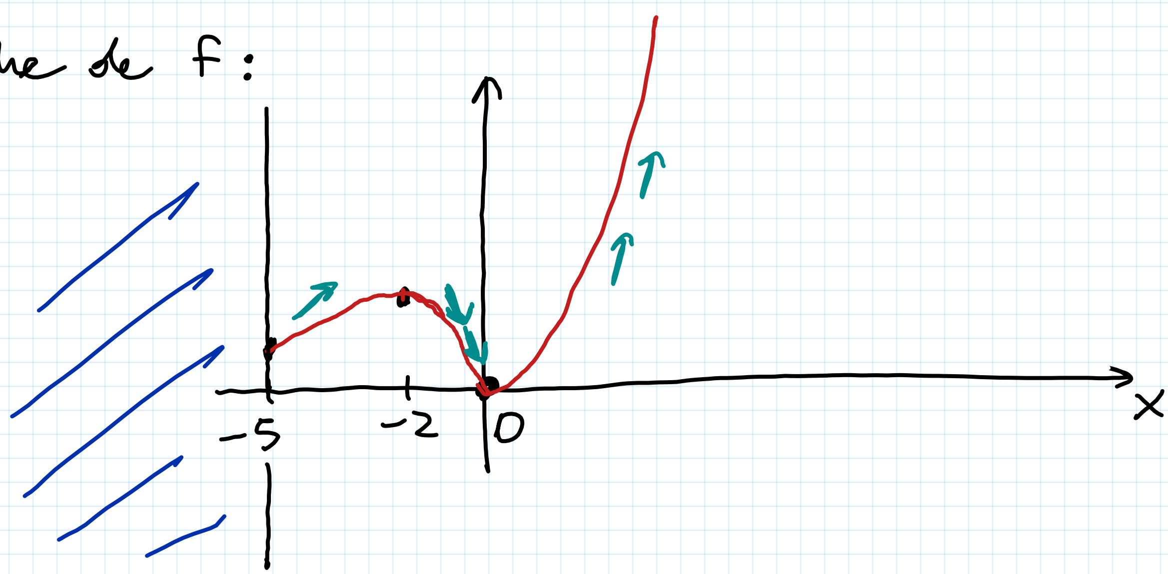
$$\lim_{x\to -5} e^x x^2 = e^{-5}(-5)^2 = 25e^{-5} = \frac{25}{e^5}$$

$x \xrightarrow{\text{remplacer}} -5$

En $+\infty$ on a

$$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{e^x}_{\to+\infty} \underbrace{x^2}_{\to+\infty} = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$$

Graphe de f :



$f(0) = 0$

$f(-2) = 4e^{-2} > 0$