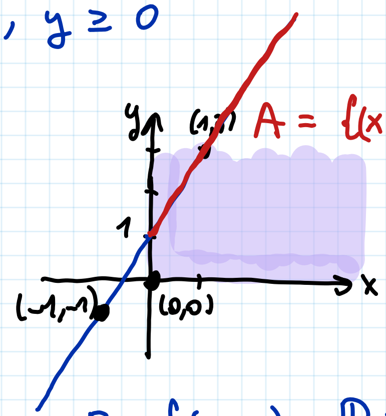
TD L1 AES (GROUPE 3) - 14/10/2025 (Après-midi)

3. On considère l'ensemble $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid y = 2x + 1\}$.

   (a) Parmi les couples suivants, le(s)quel(s) appartien(nen)t à A ? $(0,0)$, $(0,1)$, $(-1,-1)$, $(7,3)$, $(3,7)$.

   (b) Dans le plan (x, y) tracez la fonction $y = f(x) = 2x + 1$, puis identifiez où se trouve l'ensemble A sur le graphique.

$$A = \{ \underbrace{(x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+}_{\substack{x \in \mathbb{R},\ x \geq 0 \\ y \in \mathbb{R},\ y \geq 0}} \mid y = 2x+1 \}$$



$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \mid y = 2x+1\}$

$B = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 2x+1\}$

$(0,0) \notin A$ parce que $y = 2x + 1$ mais $0 \neq 2 \cdot 0 + 1$

$(0,1) \in A$ " " " " $1 = 2 \cdot 0 + 1$

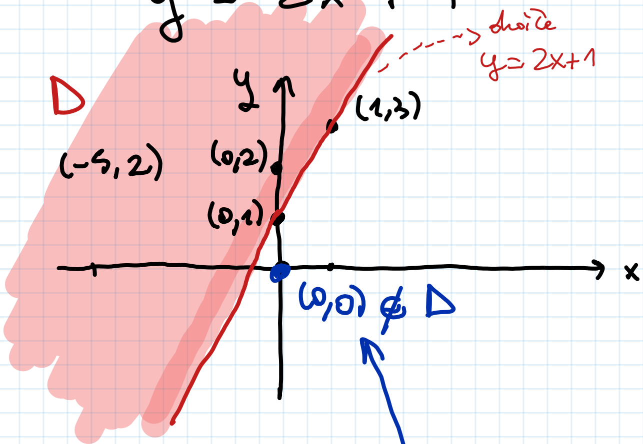
$(-1,-1) \notin A$ " " $-1 < 0$

$(3,7) \in A$ " " $7 = 2 \cdot 3 + 1$

$(7,3) \notin A$ " " $3 \neq 2 \cdot 7 + 1 = 15$

Inégalités linéaire sur le plan (x, y).

$$y = 2x + 1$$



$$D = \{(x,y) \in \underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}^{\mathbb{R}^2} \mid y \geq 2x+1\}$$

$$y \geq 2x+1$$

mais la droite $y = 2x+1$ doit être contenue dans D

$(0,0) \notin D$ parce que $y \geq 2x+1$ mais $0 < 2\cdot 0 + 1 = 1$

$(0,2) \in D$ parce que $2 \geq 2\cdot 0 + 1 = 1$

$(-5,2) \in D$ parce que $2 \geq 2\cdot(-5)+1 = -10 + 1 = -9$

4. On considère l'ensemble $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid \frac{1}{2}x < y\}$.

(a) Donnez 2 couples (x, y) qui appartiennent à A et 2 couples qui n'appartiennent pas à A.

(b) Dans le plan (x, y) tracez la fonction $y = f(x) = \frac{1}{2}x$, puis identifiez où se trouve l'ensemble A sur le graphique.

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \mid \tfrac{1}{2}x < y\}$$

$(0,1) \in A$ parce que $\frac{1}{2}\cdot 0 = 0 < 1$

$(2,1) \notin A$ parce que $\frac{1}{2}\cdot 2 = 1 = 1$ $\cancel{<}$

$(2,6) \in A$ " " " $\frac{1}{2}\cdot 2 = 1 < 6$

$(0,0) \notin A$ " " " $\frac{1}{2}\cdot 0 = 0 = 0$ $\cancel{<}$

$(-1,3) \notin A$ " " " $-1 < 0$ (même si $\frac{1}{2}(-1) < 3$)

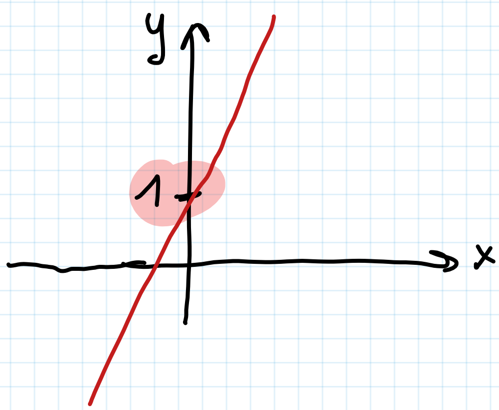
$-1 \notin \mathbb{R}_+$

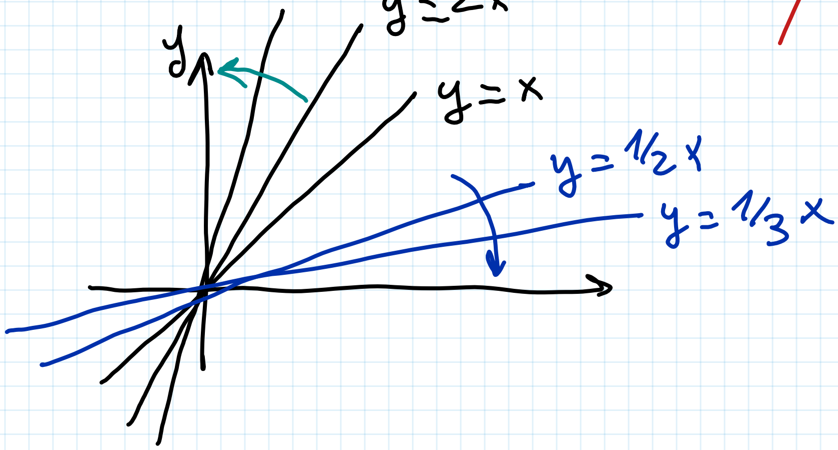
(b) Graphe de $y = \frac{1}{2}x$

Rappel. Si on a une équation de la forme

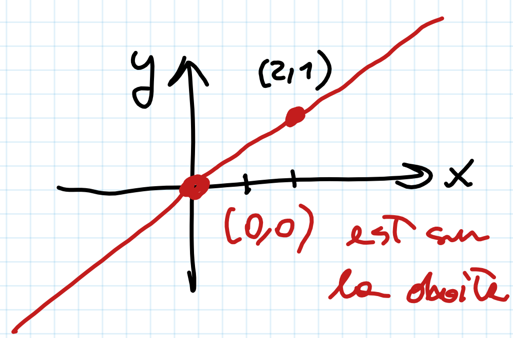
$$y = \underbrace{mx}_{\text{indique l'inclinaison de la droite}} + \underbrace{q}_{\text{nous dis où la droite rencontre l'axe } y}$$

Ex. $y = 2x + 1$



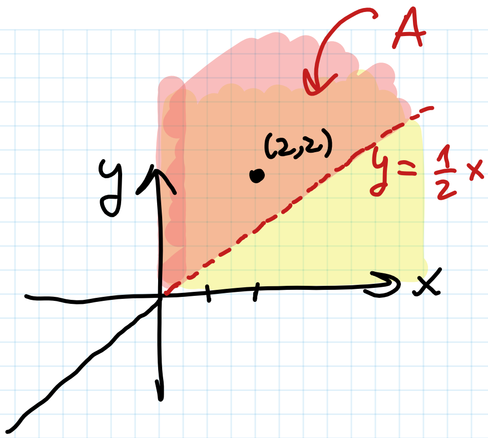


Graphe de $y = \frac{1}{2}x$ mais $q = 0$



$x = 2$ mais $y = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$

On trouve que $(2, 1)$ est sur la droite



$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2_+ \mid \frac{1}{2}x < y \}$

Les points de la droite $y = \frac{1}{2}x$ n'app. pas à A parce que on a $\frac{1}{2}x \neq y$

Point Test $(2,2) \overset{?}{\in} A$ oui! $\frac{1}{2} \cdot 2 = 1 < 2$.

Donc A est donné par la partie SUPERIEURE à la droite MAIS DANS LE CADRE $x \geq 0$, $y \geq 0$

Ensuite, la droite n'appart. pas à l'ensemble A parce que $\frac{1}{2}x = y$ et non $\frac{1}{2}x < y$

5 Applications - Théories du consommateur et du producteur

5.1 L'ensemble de production (extrait du rattrapage du CC 2024-2025)

Soit une entreprise qui produit un bien à partir de deux facteurs de production, le facteur X et le facteur Y. On s'intéresse au coût total associé à l'utilisation de ces facteurs de production. On note x la quantité de facteur X utilisée et y la quantité de facteur Y utilisée.

Le coût unitaire du facteur X est $p_X = 12$ euros et celui du facteur Y est $p_Y = 3$ euros.

On s'intéresse à l'ensemble $C_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 20 - 4x\}$

$P_X = 12$ euros est la quantité associée à $x = 1$

$P_Y = 3$ euros " " " " " $y = 1$

1. Après avoir rappelé la formule du coût total de production en fonction de x et de y, montrez que toutes les combinaisons de facteurs (x, y) qui génèrent un coût total égal à 60 appartiennent à l'ensemble C_0.

Ex. Production de $x = 3$ unités Je paye $12 \cdot 3$ euros

$y = 2$ unités " " $3 \cdot 2$ euros

Coût total de prod. : $12 \cdot 3 + 3 \cdot 2$

Donc en général on a

$12x + 3y$

On est intéressé aux couples (x, y) t.q. $12x + 3y = 60$

$C_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 20 - 4x\}$

On va vérifier que si $(x, y) \in C_0$, alors

$$12x + 3y = 60$$

$$12x + 3\underbrace{y}_{y = 20 - 4x} = 12x + 3(20 - 4x) = 12x + 60 - 3 \cdot 4x$$

$$= 12x + 60 - 12x = 60$$

Ou :

$$\frac{12x + 3y}{3} = \frac{60}{3}$$

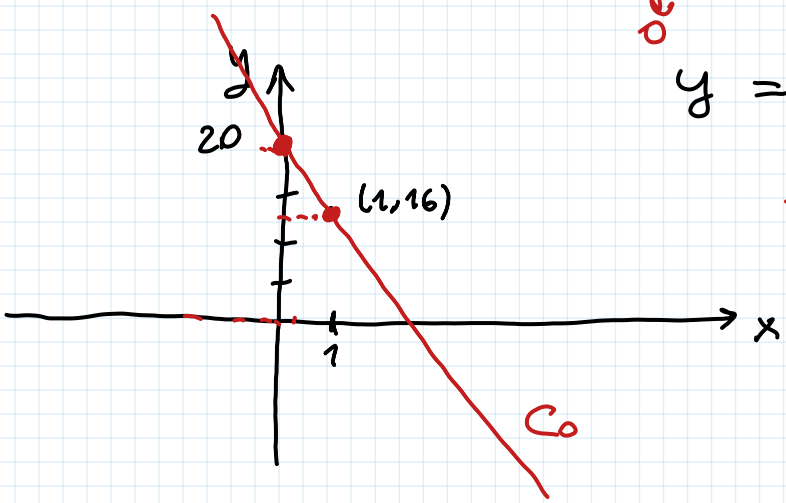
$$\frac{12x}{3} + \frac{3y}{3} = \frac{60}{3} = 20$$

$$4x + y = 20 \implies y = 20 - 4x$$

2. Tracez l'ensemble C_0 dans le plan (x, y). Est-ce que C_0 est une droite ou une surface ?

$$C_0 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underset{\downarrow \, 0}{y} = 20 - 4x \}$$

$$y = \underbrace{m}_{= -4} x + \underbrace{q}_{= 20}$$



Au hasard : $x = 1 \implies y = 20 - 4 \cdot 1 = 16$

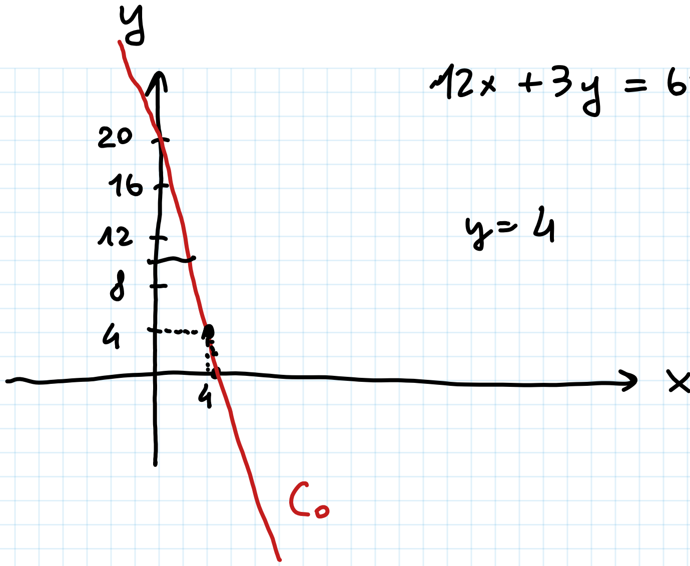
3. Supposons que l'on contraigne l'entreprise à utiliser au plus 2 unités de facteur X. On note C_1 l'ensemble des paniers de C_0 qui respectent cette contrainte.

(a) Notez, à l'aide de la notation des ensembles, l'expression de l'ensemble C_1.

$x \leq 2$

$$C_1 = \{ (x,y) \in C_0 \mid x \leq 2 \}$$

$$= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{x \leq 2}_{\text{cond. } C_1} \text{ et } \underbrace{y = 20 - 4x}_{C_0} \}$$



$12x + 3y = 60$

$y = 4$

(b) A quoi correspond concrètement l'ensemble C_1 ?

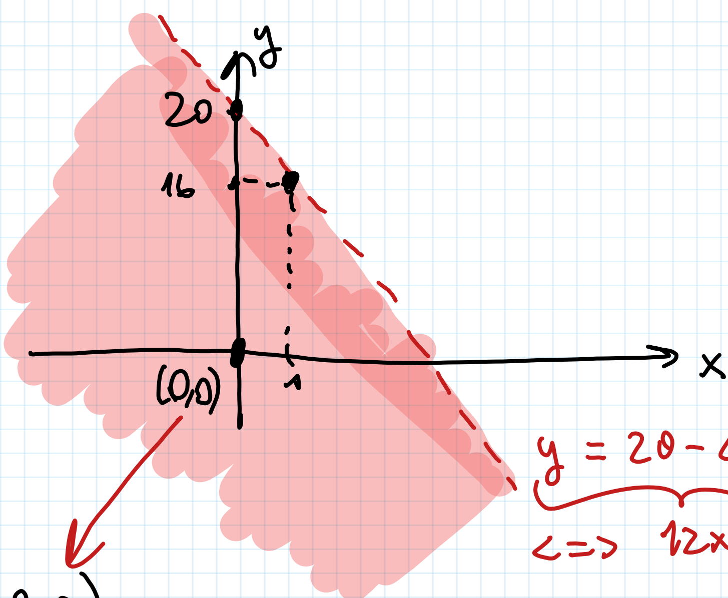
4. Représentez sur le graphique l'ensemble des combinaisons de facteurs qui génèrent une dépense inférieure à 60.

$$12x + 3y = 60$$

$$\Downarrow$$

$$12x + 3y < 60$$

Représentation sur le plan (x, y)



$\underbrace{y = 20 - 4x}$

$\Leftrightarrow 12x + 3y = 60$

Point test $(0, 0)$

$12 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0 < 60$ ✓