TD L1 BST (GROUPE 3) - 17/10/2025

Informations : Tous les fichiers peuvent être trouvés à l'adresse

https://poisson.phc.dm.unipi.it/~dinunzio/Teaching

Pour toute question : antonio.dinunzio@unicaen.fr

PRIMITIVES ET INTÉGRALES

1) Introduction (informelle) / Rappels

$f(x)$ fonction dérivable $\xrightarrow{\text{dérivation}}$ $f'(x)$

procédure algorithmique

calcul des primitives (intégration)

pas vraiment algorithmique

MAIS ALGORITHMIQUE POUR NOUS !!

Ex. $f(x) = x^n$, $n \geq 1$ $\leadsto$ $f'(x) = n\,x^{n-1}$

$$\begin{tikzcd} x^n \arrow[d, squiggly, "\text{dérivation}"'] \\ n\,x^{n-1} \end{tikzcd} \qquad x^{n-1}$$

$$\begin{tikzcd} \frac{1}{n+1}\,x^{n+1} \\ x^n \arrow[u, squiggly, "\text{primitive}"'] \end{tikzcd}$$

car $\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)' = \frac{n+1}{n+1}x^n = x^n$

Définition Une PRIMITIVE de une fonction f est une fonction F tel que

$$F'(x) = f(x)$$

On note

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

On note que

$$(x^n)' = n\,x^{n-1}$$

$$(x^n + 1)' = n\,x^{n-1}$$

$$(x^n - 7)' = n\,x^{n-1}$$

En général, on a une infinité de primitives, car si

F est une primitive de f, alors $F + c$ l'est également :

$c \in \mathbb{R}$ constante

$$\left(F(x) + c\right)' = \left(F(x)\right)' = f(x).$$

Normalement, le symbole $\int f(x)\,dx$ dénote la FAMILLE des primitives

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1} + C$$

MAIS POUR NOUS IL SERA TOUJOURS

$$C = 0$$

C'est-à-dire : $\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

Ex. $f(x) = x^3$

$F(x) = \dfrac{x^4}{4}$ mais aussi $F(x) = \dfrac{x^4}{4} + 2$

est une primitive de f

mais Pour NOUS $\displaystyle\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4}$

Ex. Puisque

$$\left(\frac{x^4}{4} + 2x\right)' \xrightarrow{\text{dérivation } « f' »} = \frac{4x^3}{4} + 2 = x^3 + 2$$

intégration « $\int f\,dx$ »

on a $$\int (x^3+2)\,dx = \frac{x^4}{4} + 2x .$$

En effet, puisque

$$(f+g)' = f' + g'$$
$$(\alpha f)' = \alpha \cdot f' \qquad \alpha \in \mathbb{R} \text{ constante}$$

on trouve:
$$\int (f+g)\,dx = \int f\,dx + \int g\,dx$$
$$\int (\alpha \cdot f)\,dx = \alpha \int f\,dx$$

!

Ex. $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

$$\int f(x)\,dx = \int x^3\,dx + 2\int x^2\,dx + 2\int x\,dx + \int 1 \cdot dx$$

$$= \frac{1}{4}x^4 + 2 \cdot \frac{1}{3}x^3 + 2 \cdot \frac{1}{2}x^2 + x$$

Définie sur	Fonction f	$F(x) = \int f(x)\,dx$
$\mathbb{R}^*$ ou $\mathbb{R}^*_+$	$x^\alpha \quad (\alpha < 0\, \alpha \neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \cancel{C}$
$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^+$	$x^\alpha \quad (\alpha > 0)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \cancel{C}$
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\text{Arctan}(x) + \cancel{C}$
$\mathbb{R} \setminus \{-1,+1\}$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2}\ln\left(\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert\right) + \cancel{C}$
$\mathbb{R}^*_- \cup \mathbb{R}^*_+$	$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert) + \cancel{C}$
$\mathbb{R}$	$a^x (a > 0)$	$\dfrac{a^x}{\ln(a)} + \cancel{C}$
$\mathbb{R}$	e^x	$e^x + \cancel{C}$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

$\boxed{\alpha \neq -1}$

$\alpha > 0$
$\alpha < 0$
$\alpha = 0$

Définie sur	Fonction f	$F(x) = \int f(x)\,dx$
$\mathbb{R}$	$\sin(\omega x + \alpha) \quad \omega \neq 0$	$-\frac{1}{\omega}\cos(\omega x + \alpha) + C$
$\mathbb{R}$	$\cos(\omega x + \alpha) \quad \omega \neq 0$	$\frac{1}{\omega}\sin(\omega x + \alpha) + C$
$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$	$\frac{1}{(\cos(x))^2} = 1 + (\tan(x))^2$	$\tan(x) + C$
$\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$	$\dfrac{1}{(\sin(x))^2} = 1 + (\cotan(x))^2$	$-\dfrac{1}{\tan(x)} + C$
$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$	$\tan x$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert) + C$
$]-1,+1[$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\text{Arcsin}(x) + C$

La prochaine fois (peut-être ...)

Ex.

- $$\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x}$$

- $$\int x^{1/2}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{x^{3/2}}{3/2} = \frac{\sqrt{x^3}}{3/2} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$$

$\sqrt{x} = x^{1/2}$

$1/\sqrt{x} = (x^{1/2})^{-1} = x^{-\frac{1}{2}}$

$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt{x^3} = (\sqrt{x})^3 = x^{\frac{3}{2}}$

- $$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{x^{1/2}}{1/2} = 2\sqrt{x}$$

- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \int \frac{1}{x^{2/3}}\,dx = \int x^{-2/3}\,dx$

$$= \frac{x^{-2/3+1}}{-2/3+1} = \frac{x^{1/3}}{1/3}$$

$$= 3 \cdot \sqrt[3]{x}$$

Rappel : $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$

$$\sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{1/n} = a^{\frac{m}{n}}$$

La formule $\displaystyle\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$

est vrai pour $\alpha \neq -1$

Qu'est-ce que $\displaystyle\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx$?

- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) \qquad (x \neq 0)$

[Vous avez vu que $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$]

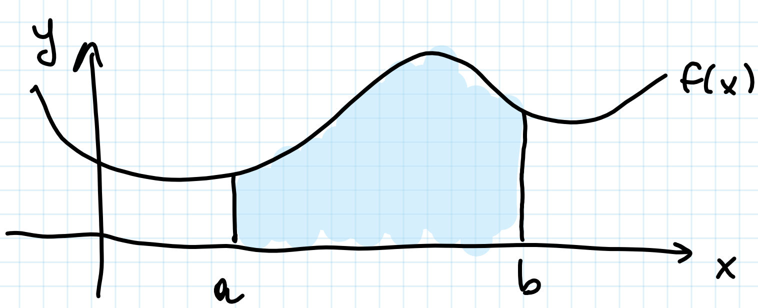
$$\ln|x| = \begin{cases} \ln(x) & \text{pour } x>0 \\ \ln(-x) & \text{pour } x<0 \end{cases} \xrightarrow{f'} \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{pour } x>0 \\ \frac{1}{x}, & \text{pour } x<0 \end{cases} = \frac{1}{x}$$

$$(\ln(\underbrace{-x}_{u(x)}))' = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$$

- $(e^x)' = e^x$

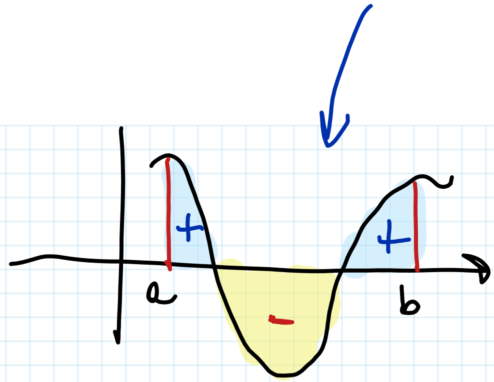
$$\Rightarrow \int e^x \, dx = e^x .$$

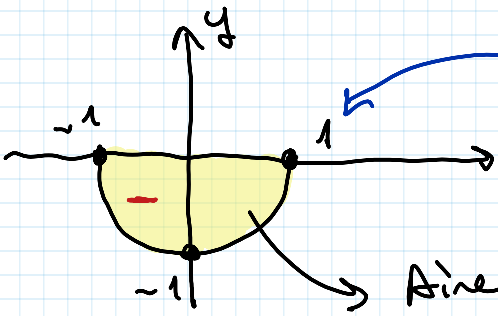
2) Intégration (lien entre primitives et « aires »)



On indique $\int_a^b f(x)\,dx$ l'AIRE (ALGÉBRIQUE) en blue

avec le signe





$r=1$

Aire $\frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi$

Aire algébrique $= -\frac{1}{2}\pi$

(negative)

Théorème (Fondamental du calcul intégral)

Hyp. f continue sur $[a,b]$ $\longleftarrow$ Pour nous ce sera toujours le cas

Si $F(x) = \int f(x)\,dx$, alors

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

Aire ↑ (algébrique) Primitives ↑

Notation compacte : $\left[F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a)$

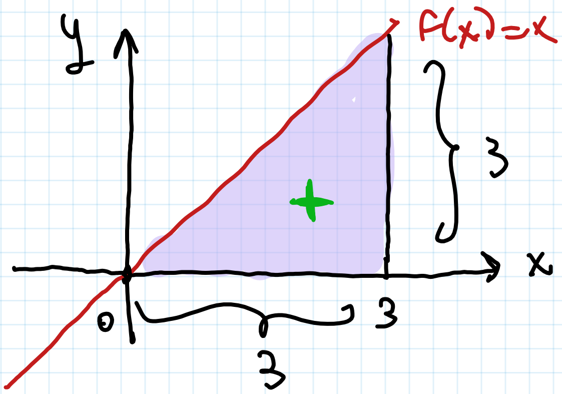
Ex. $\displaystyle\int_0^3 x\,dx = \left[F(x)\right]_0^3$ où $F(x) = \int x\,dx$

$= \frac{1}{2}x^2$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^3$$

$$= \frac{1}{2}(3)^2 - \frac{1}{2}\cdot 0^2 = \frac{9}{2}$$

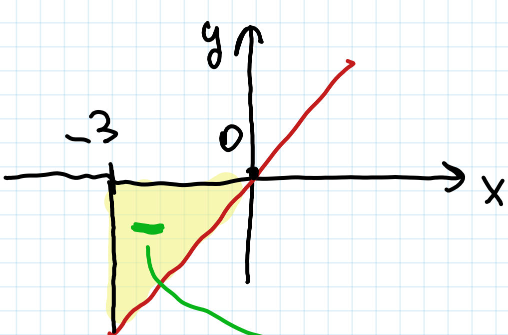
En effet, on sait déjà calculer l'aire du triangle ...



Aire $= \dfrac{3\cdot 3}{2} = \dfrac{9}{2}$.

- $\displaystyle\int_{-3}^{0} x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-3}^{0} = \frac{1}{2}\cdot 0^2 - \frac{1}{2}(-3)^2$

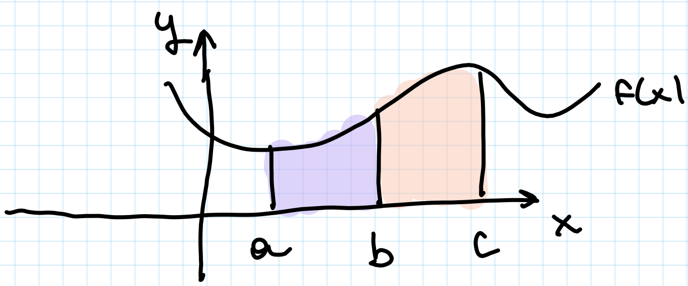
$$= -\frac{1}{2}\cdot 9 = \underbrace{-}\frac{9}{2}$$



(Aire algébrique)

• Propriétés de l'intégral définie

[Sous hyp que sont toujours vrais pour nous]



$(\forall a,b,c \in \mathbb{R})$

• $$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

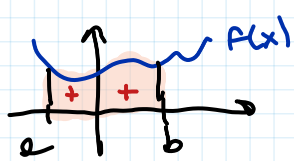
• $$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \qquad (\forall a \in \mathbb{R})$$

• $$\int_a^b \alpha \cdot f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx \quad , \alpha \in \mathbb{R} \text{ const.}$$

• $$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

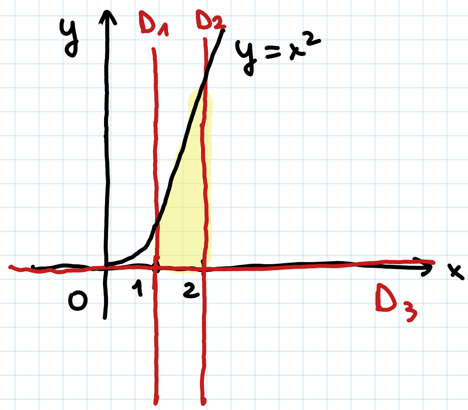
Dans le cas

• $\boxed{\begin{array}{l} a < b \\ f(x) \geq 0 \end{array}}$



$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

Exercice 29. Calculer l'aire de la portion bornée du plan située entre les droites d'équations : $(D_1)\ \ x = 1$, $(D_2)\ \ x = 2$, $(D_3)\ \ y = 0$, et la courbe $y = x^2$.



Note : Vous ne devez pas (savoir) faire le déssigne.

Sol. On a vu que l'aire demandée est donnée par

$$\int_1^2 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 = \frac{1}{3}\cdot 2^3 - \frac{1}{3}\cdot 1^3$$

$$= \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

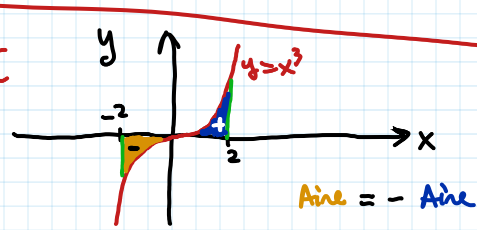
Exercice 30. Calculer l'aire de la portion bornée du plan située entre les droites d'équations : $(D_1)\ \ x = -2$, $(D_2)\ \ x = 2$, $(D_3)\ \ y = 0$, et la courbe $y = x^3$.

Quelle ambiguité cela soulève-t-il ?

Sol.

$$\int_{-2}^2 x^3\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-2}^2 = \frac{1}{4}(2^4) - \frac{1}{4}\underbrace{(-2)^4}_{=2^4} = 0$$

En effet



Exercice 31. Calculer les intégrales :

$$I=\int_1^2 \frac{dx}{x},\quad J=\int_1^2\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}x\right)dx,\quad K=\int_1^2\left(\frac{1}{2}x\right)dx,\quad L=\int_1^2(x^2-2x+2)dx,\quad M=\int_1^2 1dx.$$

Auriez-vous pu classer ces nombres du plus petit au plus grand sans calculer les intégrales ?

Sol.

$$I=\int_1^2 \frac{dx}{x}=\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx=\left[\ln(x)\right]_1^2=\ln(2)-\cancel{\ln(1)}^{=0}$$
$$=\ln(2)$$

$$J=\int_1^2\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}x\right)dx=\frac{1}{2}\int_1^2(3-x)\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\left[3x-\frac{1}{2}x^2\right]_1^2$$
$$=\frac{1}{2}\left[\underbrace{\left(6-\frac{1}{2}\cdot 4\right)}_{x=2}-\underbrace{\left(3-\frac{1}{2}\cdot 1\right)}_{x=1}\right]=\ldots=\frac{3}{4}$$

$$L=\int_1^2(x^2-2x+2)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-2\cdot\frac{x^2}{2}+2\cdot x\right]_1^2$$
$$=\frac{2^3}{3}-2^2+2\cdot 2-\left(\frac{1}{3}-1+2\right)$$
$$=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}-1=\frac{7}{3}-1=\frac{4}{3}$$

$$M=\int_1^2 1\,dx=\left[x\right]_1^2=2-1=1.$$

Rappel : si $c \in \mathbb{R}$ est constante, alors

$$\boxed{\int c \, dx = c\,x}$$

Ex. $\int 3 \, dx = 3x$