TD L1 BST (GROUPE 5) - 20/10/2025

• PRIMITIVES ET INTÉGRALES

Introduction (informelle) et rappels

$$\begin{tikzcd} f(x) \text{ fonction dérivable} \arrow[r, "\text{dérivation}"] & f'(x) \arrow[l, bend left, "\text{"intégration"}"] \end{tikzcd}$$

Ex. $f(x) = x^2 \xrightarrow{\text{dér}} f'(x) = 2x$

Donc, si on part de $g(x) = 2x$, on trouve que

$$G(x) = x^2$$

est une fonction t q $G'(x) = 2x$.

Une telle G est dit une PRIMITIVE de g

Déf. Si $f(x)$ est une fonction (continue ...), on appelle PRIMITIVE de f une fonction F telle que

$$F'(x) = f(x).$$

Ex. $f(x) = x^n$, $n \geq 1$

On sait que $f'(x) = n\, x^{n-1}$

$$x^{n} \xrightarrow{\text{dérivation}} n\, x^{n-1}$$

$$x^{n-1}$$

$$z(x) = x^{n+1} \qquad z'(x) = (n+1)\,x^n \neq x^n$$

il manque quelque chose

$$F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}:$$ Maintenant on a

$$F'(x) = \frac{n+1}{n+1} x^n = x^n$$

Rmq $$F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + 19$$

$$F'(x) = x^n$$

Donc $$\frac{1}{n+1} x^{n+1}, \quad \frac{1}{n+1} x^{n+1} + 19, \ldots$$

et en général $\frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$, avec $c \in \mathbb{R}$ constante

sont toutes primitives de $f(x) = x^n$.

En effet, on peut montrer que si F_1, F_2 sont deux primitives de la même fonction f, alors

$$F_1 = F_2 + c$$

pour une certaine constante $c \in \mathbb{R}$.

Notation. On dénote $\int f(x)\,dx$ une primitive de $f(x)$ [AVEC $c=0$], c'est-à-dire

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \underbrace{\qquad}_{\text{“} + 0 \text{”}}$$

On appelle INTÉGRAL INDÉFINI de f "la primitive"

$$\int f(x)\, dx .$$

Ex.

$$\int \left(\underbrace{x^2}_{\frac{x^3}{3}} + \underbrace{2\overbrace{x}^{x^2/2}}_{x^2} \right) dx = \frac{x^3}{3} + x^2$$

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + x^2$$

$$F'(x) = \frac{3}{3} x^2 + 2x = x^2 + 2x \quad \checkmark$$

Rmq. On a

- $\displaystyle\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$
- $\displaystyle\int \alpha \cdot f(x)\, dx = \alpha \cdot \int f(x)\, dx$

$\alpha \in \mathbb{R}$ constante

Ex. Primitive de $f(x) = 1$

$$\int 1 \cdot dx = x$$

$f(x) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ constante

$$\int \alpha \cdot dx = \alpha \cdot x$$

Ex. Calculer $\int (x^3 + 4x^4 - 2)\, dx$

→ On a $\int (x^3 + 4x^4 - 2)\, dx = \int x^3\, dx + 4\int x^4\, dx - 2\int 1 \cdot dx$

$$= \frac{x^4}{4} + \frac{4}{5} x^5 - 2x$$

$f(x) = x^\alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ (constante)

On a encore $f'(x) = \alpha\, x^{\alpha - 1}$

[Ex. $\left(x^{\sqrt{2}+\pi}\right)' = (\sqrt{2}+\pi)\, x^{\sqrt{2}+\pi-1}$]

- $$\int x^\alpha\, dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$$ $\boxed{\text{MAIS POUR } \alpha \neq -1}$

ET si $\alpha = -1$?

On cherche une fonction $F(x)$ telle que $F'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

On a vu que $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$

Mais ça ne marche pas pour $x < 0$ ...

En effet, on a $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|)$

$$\ln(|x|) = \begin{cases} \ln(x), & \text{si } x>0 \\ \ln(-x), & \text{si } x<0 \end{cases} \xrightarrow{\text{dérivation}} \underbrace{\begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{si } x>0 \\ \frac{1}{x}, & \text{si } x<0 \end{cases}}_{\text{c'est la fonction } \frac{1}{x}}$$

Rappel : $\displaystyle \left(\ln(u(x))\right)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$

$u(x) = -x \rightsquigarrow u'(x) = -1$

$$\left(\ln(-x)\right)' = \frac{(-x)'}{-x} = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$$

- $f(x) = e^x \xrightarrow{\text{dér.}} f'(x) = e^x$

$$\Rightarrow \int e^x\,dx = e^x$$

- $F(x) = \sin(x)$

$\sin(x) \xrightarrow{\text{dér}} \cos(x) \xrightarrow{\text{dér}} -\sin(x) \xrightarrow{\text{dér}} -\cos(x) \xrightarrow{\text{dér}} \sin(x)$

$\sin(x) \xleftarrow{\text{intég}} \cos(x) \xleftarrow{\text{intég}} -\sin(x) \xleftarrow{\text{intég}} -\cos(x) \xleftarrow{\text{intég.}} \sin(x)$

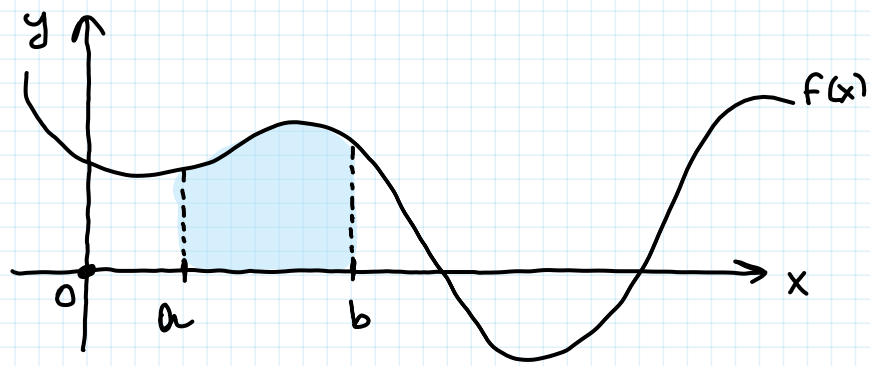
$$\int \cos(x)\,dx = \sin(x)$$

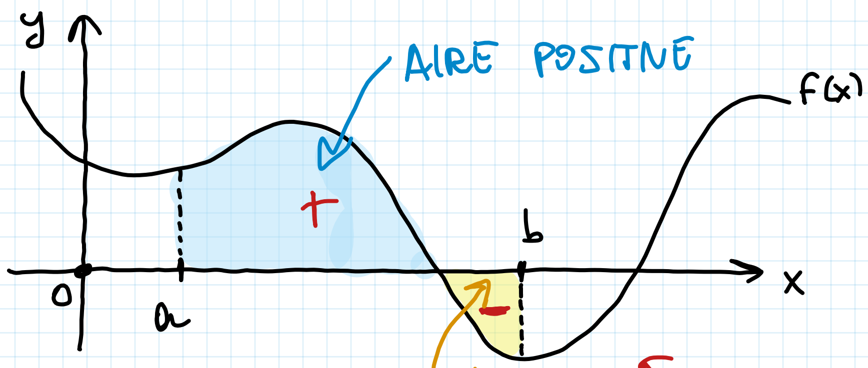
$$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x)$$

$$\int (-\sin(x))\,dx = -\int \sin(x)\,dx = -(-\cos(x)) = \cos(x)$$

- Intégration (lien entre primitives et aires...)

On considère une fonction $f(x)$

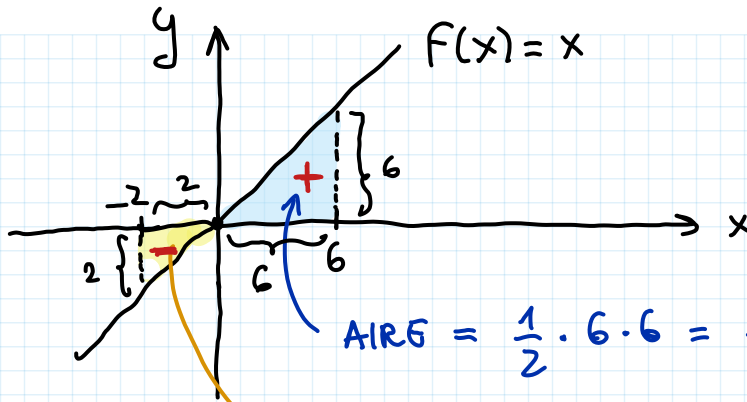




On indique $\int_a^b f(x)\,dx$ l' AIRE (ALGÉBRIQUE) de la région du plan limitée par le graphe de $f(x)$, l'axe x et le droites $x = a$ et $x = b$

[C'est-à-dire, la partie colorée]

Ex.



AIRE $= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18$

AIRE $= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$

AIRE ALGÉBRIQUE
18
−2

Donc on a

$$\int_{-2}^{0} x \, dx = -2$$

$$\int_{0}^{6} x \, dx = 18$$

$$\int_{-2}^{6} x \, dx = -2 + 18 = 16$$

Lien :

Théorème (Fondamental du calcul intégral)

Soit $f(x)$ une fonction (continue sur l'intervalle $[a,b]$)

Si $F(x) = \int f(x)\, dx$ est une primitive de $f(x)$,

alors

$$\boxed{\int_{a}^{b} f(x)\, dx = F(b) - F(a)}$$

Notation : on dénote $\left[F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a)$

Ensuite, on appelle INTÉGRAL DÉFINI (entre a et b) de $f(x)$ la quantité

$$\int_a^b f(x)\, dx .$$

Ex. (Le Théorème marche)

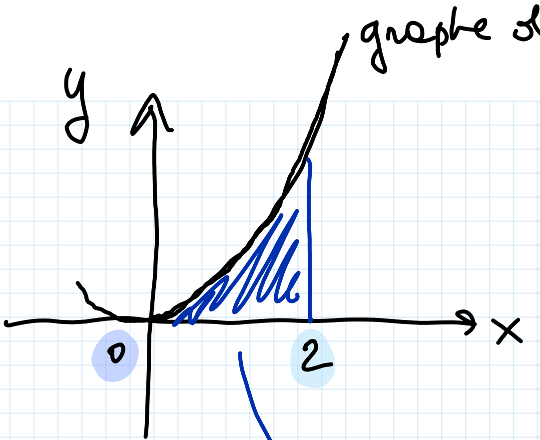
$$\int_{-2}^{0} x\, dx \overset{\text{Théorème}}{=} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-2}^{0} = \frac{0^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2}$$

$$= 0 - \frac{4}{2} = -2$$

$$\int_{-2}^{6} x\, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-2}^{6} = \frac{6^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2}$$

$$= \frac{36}{2} - \frac{4}{2}$$

$$= 18 - 2 = 16.$$



$f(x) = x^2$

$F(x) = \frac{x^3}{3}$

Aire $= \int_0^2 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3}$

$= \frac{8}{3}$.

est la droite verticale à $x = 1$

Exercice 29. Calculer l'aire de la portion bornée du plan située entre les droites d'équations : $(D_1)\ \ x = 1$, $(D_2)\ \ x = 2$, $(D_3)\ \ \boxed{y = 0}$ et la courbe $y = x^2$.

axe x

le graphe de $f(x) = x^2$

Exercice 30. Calculer l'aire de la portion bornée du plan située entre les droites d'équations : $(D_1)\ \ x = -2$, $(D_2)\ \ x = 2$, $(D_3)\ \ y = 0$, et la courbe $y = x^3$.

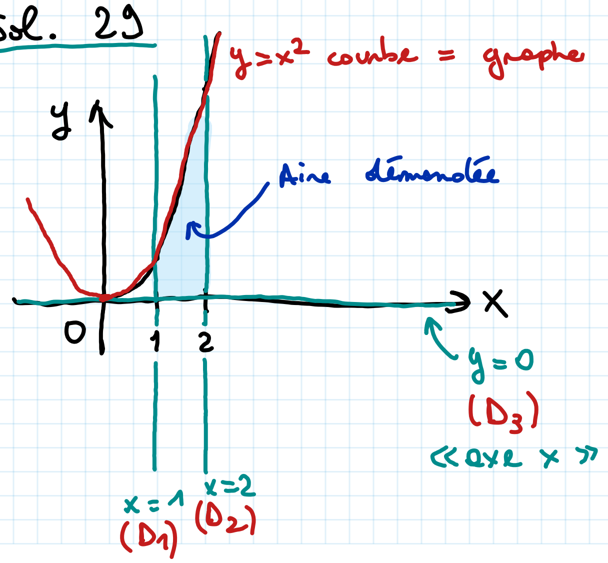
Quelle ambiguité cela soulève-t-il ?

Exercice 31. Calculer les intégrales :

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x}\quad J = \int_1^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x\right) dx,\quad K = \int_1^2 \left(\frac{1}{2}x\right) dx,\quad L = \int_1^2 (x^2 - 2x + 2)dx,\quad M = \int_1^2 1dx.$$

$= \frac{1}{x}\,dx$

Sol. 29



Vous ne devez pas (savoir) faire le dessigne.

l'ex. demande de calculer

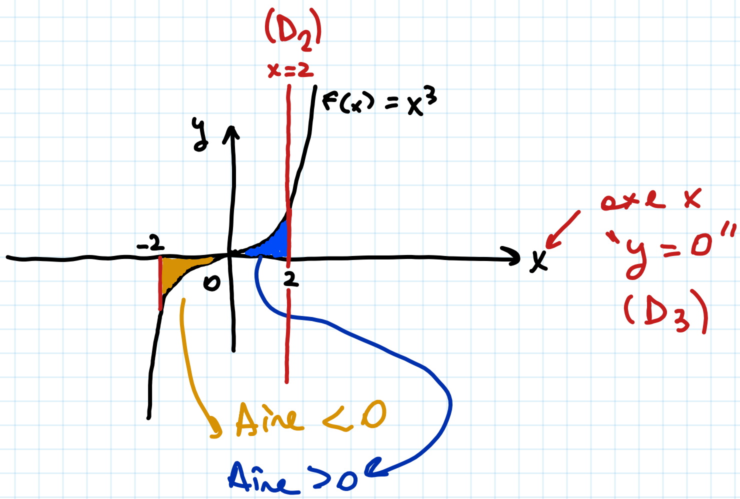
$$\int_1^2 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

Sol. 30

Comme pour le 29, l'ex. demande de calculer :

$$\int_{-2}^2 x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-2}^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{(-2)^4}{4} = \frac{2^4}{4} - \frac{2^4}{4} = 0.$$

Ambiguïté : l'aire est ZÉRO



Aire = − Aire

Sol. 31 : Voir le fichier du 17/10/25 (BST groupe 3).