TD L1 AES (GROUPE 3) - 21/10/2025

5.2 Le budget du consommateur 1/2

Soit un consommateur dont le revenu est $R = 60$ envisageant d'acquérir des biens 1 et 2 dont les prix sont respectivement $p_1 = 6$ et $p_2 = 3$. On note x_1 la quantité de bien 1 consommée et x_2 la quantité de bien 2 consommée. On remarque que si le consommateur consomme x_1 unités de bien 1, et x_2 unités de bien 2, il dépense $6x_1 + 3x_2$ euros. On cherche à déterminer l'ensemble des paniers de biens (x_1, x_2) que le consommateur peut consommer compte tenu de son revenu et des prix des biens.

1. On suppose que le consommateur dépense tout son revenu. Quelle est la quantité de bien 2 que le consommateur peut acheter s'il n'achète que du bien 2 (et donc n'achète aucune unité de bien 1)? De même, quelle est la quantité de bien 2 que le consommateur peut acheter s'il achète 5 unités de bien 1?

$x_1 = 5$

1) $x_1 = 0$

$$6x_1 + 3x_2 = 60$$

La quantité de bien 2 (x_2) achetée si $X_1 = 0$ est donnée par :

$$\underbrace{6 \cdot 0}_{0} + 3 \cdot x_2 = 60$$

$$\Rightarrow \quad 3x_2 = 60$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = 60/3 = 20.$$

2) $x_1 = 5$ $\leadsto$ $6 \cdot \underbrace{x_1}_{5} + 3 \cdot x_2 = 60$

$$6 \cdot 5 + 3x_2 = 60$$

$$30 + 3x_2 = 60$$

$$3x_2 = 60 - 30 = 30$$

$$x_2 = 30/3 = 10.$$

2. On note B l'ensemble des paniers (x_1, x_2) que le consommateur peut consommer s'il consomme tout son budget dans la consommation des biens 1 et 2. Ecrivez, à l'aide de la notation des ensembles, l'expression de B.

$$6x_1 + 3x_2 = 60$$

$$B = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 \mid 6x_1 + 3x_2 = 60\}$$

Pas vraiment important...

N.B. On peut considérer également

$$(x_1, x_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \mathbb{N}^2$$

C'est-à-dire $\quad B = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid 6x_1 + 3x_2 = 60 \}$

3. On veut représenter cet ensemble B dans le plan (x_1, x_2). Pour cela, exprimez la quantité x_2 de bien 2 que le consommateur peut consommer en fonction de la quantité x_1 de bien 1 qu'il achète sachant qu'il consomme tout son revenu, puis tracez la fonction ainsi obtenue dans le plan (x_1, x_2).

$$6x_1 + 3x_2 = 60$$

$$\Updownarrow \cdot 1/3$$

$$\frac{6x_1 + 3x_2}{3} = \frac{60}{3}$$

$$\frac{6}{3}x_1 + \frac{3}{3}x_2 = 20$$

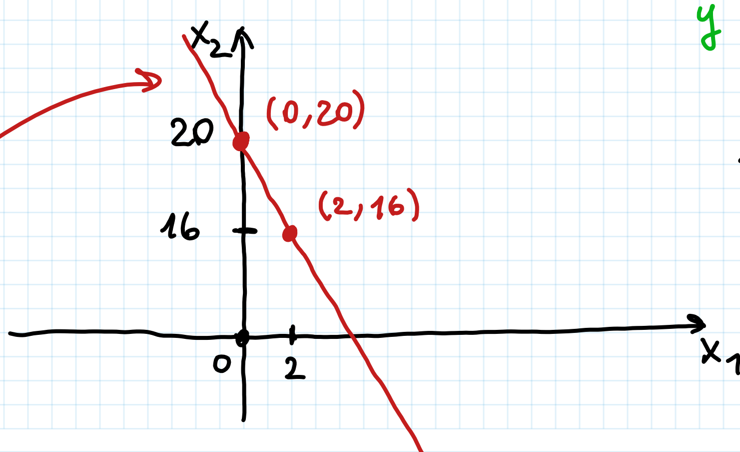
$$2x_1 + x_2 = 20$$

$$x_2 = 20 - 2x_1$$

x_1 devient x
x_2 devient y

$$y = 20 - 2x \iff y = -2x + 20$$

$$y = mx + q$$



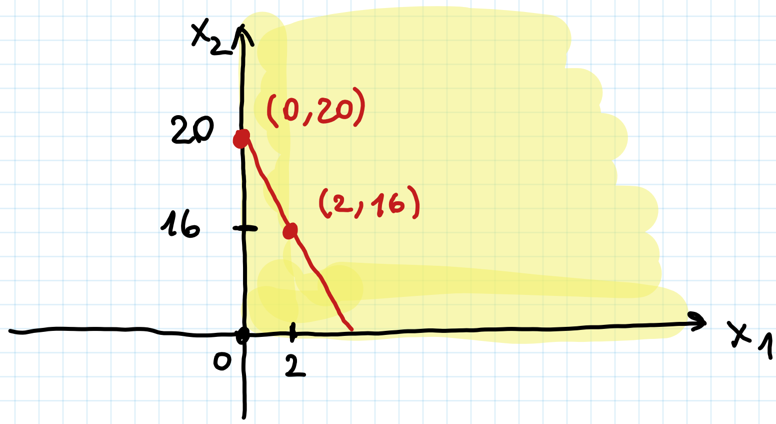
Ce n'est pas l'ensemble B

2° point : au hasard

$x_1 = 2 \implies x_2 = -2 \cdot 2 + 20$
$x \qquad\qquad y \; = 16$

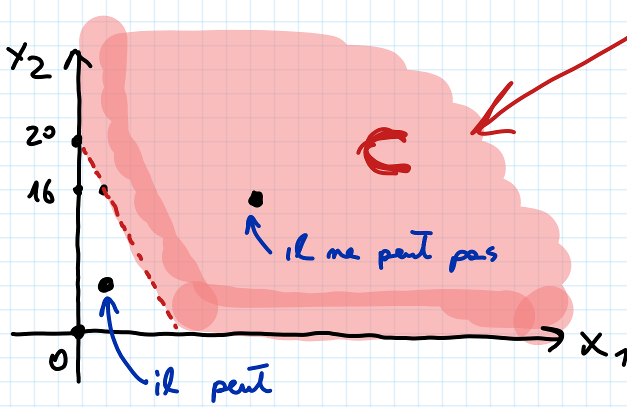
$$B = \{(x_1, x_2) \in \underbrace{\mathbb{R}^2_+}_{} \mid 6x_1 + 3x_2 = 60\}$$

il faut considérer $x_1 \geq 0$
$x_2 \geq 0$



4. On s'intéresse à l'ensemble C défini comme suit : $C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \mid 6x_1 + 3x_2 > 60\}$ A quoi correspond cet ensemble ? Situez-le sur le graphique tracé à la question précédente.

$$6x_1 + 3x_2 > 60$$

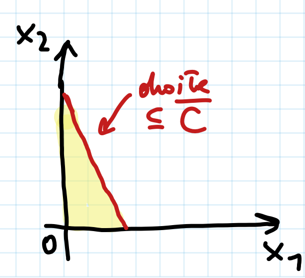


L'ensemble C représente les points (x_1, x_2) des quantités que le consommateur ne peut pas acheter.

5. A quoi correspond $\overline{C}$ ici ?

$$\overline{C} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \mid 6x_1 + 3x_2 \leq 60\}$$

↳ Représenté par le triangle jaune (droite $\in \overline{C}$)



5.3 Le budget du consommateur 2/2

Reprenons l'exemple précédent avec un consommateur dont le revenu est R=60 envisageant d'acquérir des biens 1 et 2 dont les prix sont respectivement $p_1 = 6$ et $p_2 = 3$.

1. Ecrivez l'expression de l'ensemble budgétaire du consommateur qui définit l'ensemble des paniers de biens que le consommateur peut consommer compte tenu de son budget et des prix des biens (sans nécessairement épuiser son budget...). On notera B_{nc} cet ensemble.

$$B_{nc} = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \mid 6x_1 + 3x_2 \leq 60 \}$$

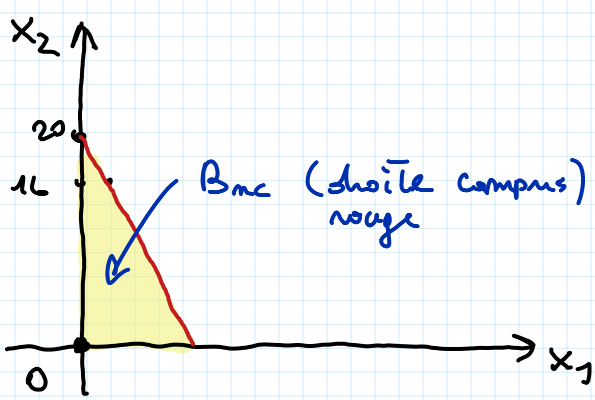
2. On suppose que le consommateur est soumis à un rationnement et ne peut pas consommer plus de 8 unités de bien 1. Que devient l'ensemble budgétaire du consommateur? On notera B_c ce nouvel ensemble.

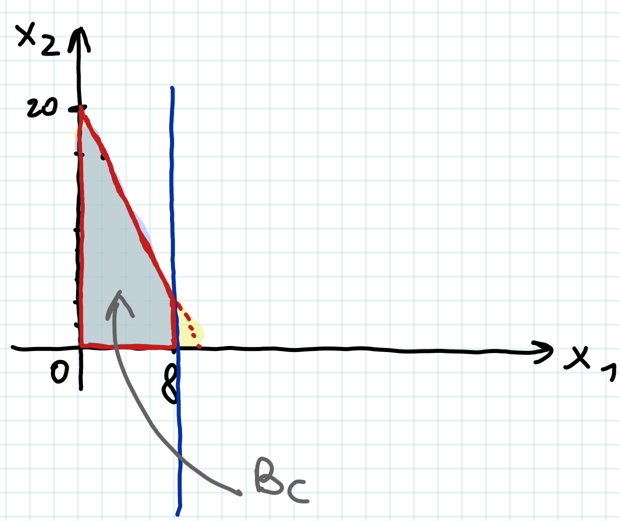
$x_1 \leq 8$

$$B_c = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \mid 6x_1 + 3x_2 \leq 60 \ \overbrace{\text{et} \quad x_1 \leq 8}^{\text{nouvelle condition}} \}$$

3. Représenter ces deux ensembles dans le plan (x_1, x_2).

$$B_{nc} = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \mid 6x_1 + 3x_2 \leq 60 \}$$
$$B_c = \{ \text{〃} \quad \text{〃} \quad \text{〃} \mid \text{〃} \quad \text{〃} \quad \text{〃} \quad \text{et} \quad x_1 \leq 8 \}$$





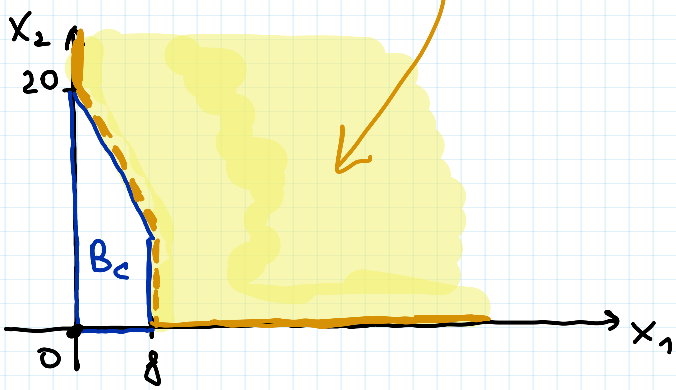
(déjà fait : c'est $\overline{C}$)

4. Comment noter l'ensemble des paniers qui ne sont plus accessibles au consommateur du fait du rationnement? Identifiez cet ensemble sur le graphique.

$$B_c = \{ (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \mid 6x_1 + 3x_2 \leq 60 \text{ et } x_1 \leq 8 \}$$

PAIRES ACCESSIBLES

L'ensemble demandé est "$\overline{B_c}$" $= \{ (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \mid (x_1,x_2) \notin B_c \}$



TD 3 | Les fonctions - Partie 1

Rappel : Une fonction est une "loi" donné par

- Domaine D
- Codomaine C
- Rélation (ou loi) $f : D \longrightarrow C$

  t.q. pour chaque $d \in D$, il existe un unique $c \in C$ t.q. $f(d) = c$.

Ex. $D = \{$ classe du groupe 3 (TD AES L1) $\}$, $C = \mathbb{N}$

Loi : $f : D \to C$ est l'age

Ex. $D = C = \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par une expression algébrique ou analytique

1) $f(x) = 3x + 2$

2) $f(x) = -|x|$

3) $f(x) = e^x$

4) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2+1}$ ...

1 Fonctions usuelles appliquées à l'économie et la gestion

1.1 Fonction affine

Soit une fonction définie comme suit $y = f(x) = 3x + 2$ avec $x \in \mathbb{R}$. parce que

1. Quels sont le domaine, le codomaine de cette fonction? Domaine $= \mathbb{R}$
2. Donnez l'image de 3 par la fonction f et l'antécédent de 8 par la fonction f.
3. Quel est le type de la fonction? → affine (du type $a \cdot x + b$)
4. Représentez graphiquement la fonction dans le plan (O, x, y).
5. Que pouvez-vous dire sur la relation que cette fonction établit entre x et y? Donnez un exemple de grandeurs d'économie ou de gestion qui pourraient correspondre à x et y.

1. Domaine $= \mathbb{R}$ (Text)

Codomaine $= \mathbb{R}$ (parce que f prends un nombre réel (x) et donne un autre nombre réel)

$\hookrightarrow 3x+2$

2. Image de 3 par la fonction f est

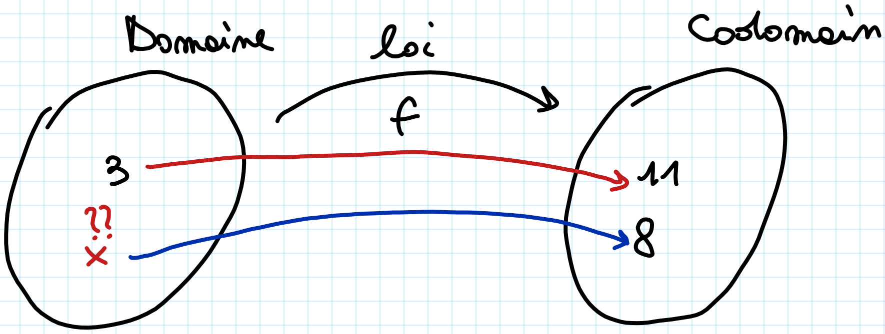
$$f(3)$$

(c'est-à-dire, je remplace x par 3 dans l'express. de f)

$$f(3) = 3 \cdot 3 + 2 = 11.$$

$$f(x) = 3 \cdot x + 2$$

Antécédent de 8 par f : c'est le nombre réel x t.q. $f(x) = 8$



$$f(x) = 8 \iff 3x + 2 = 8$$
$$\iff 3x = 8 - 2 = 6$$
$$\iff x = 6/3 = 2$$

Donc l'antécédent de 8 par f est 2.

3. Affine

4. $y = 3x + 2$ (on a déjà vu qu'elle représente une droite)

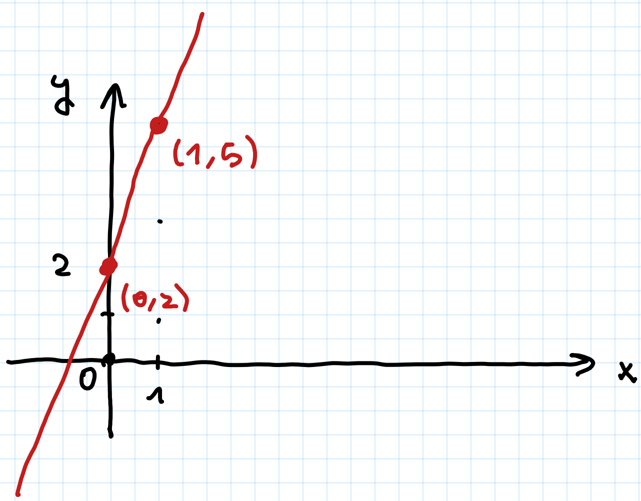


Image de 0 par f

$$f(0) = 3 \cdot 0 + 2 = 2$$

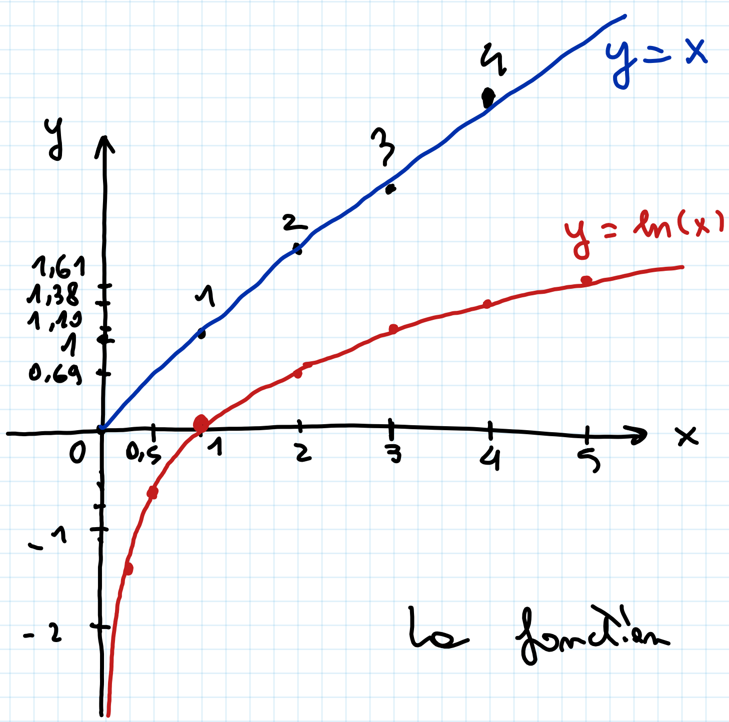
Image de 1 par f

$$f(1) = 3 \cdot 1 + 2 = 5$$

1.2 Fonctions exp et log

1. Représentez graphiquement ("à main levée") la fonction logarithme népérien $y = f(x) = \ln(x)$, avec $x > 0$. Comment évolue y à mesure que x augmente?
2. Représentez graphiquement ("à main levée") la fonction exponentielle $y = \exp(x)$, avec $x \in \mathbb{R}$. Comment évolue y à mesure que x augmente?
3. Quel est le lien entre les fonctions logarithme népérien et exponentielle?

1. $y = \ln(x)$ pour $x > 0$.



$\ln(1) = 0$
$\ln(2) \approx 0,69$
$\ln(3) \approx 1,10$
$\ln(4) \approx 1,38$
$\ln(5) \approx 1,61$
$\ln(0,5) \approx -0,69$
$\ln(0,25) \approx -1,39$

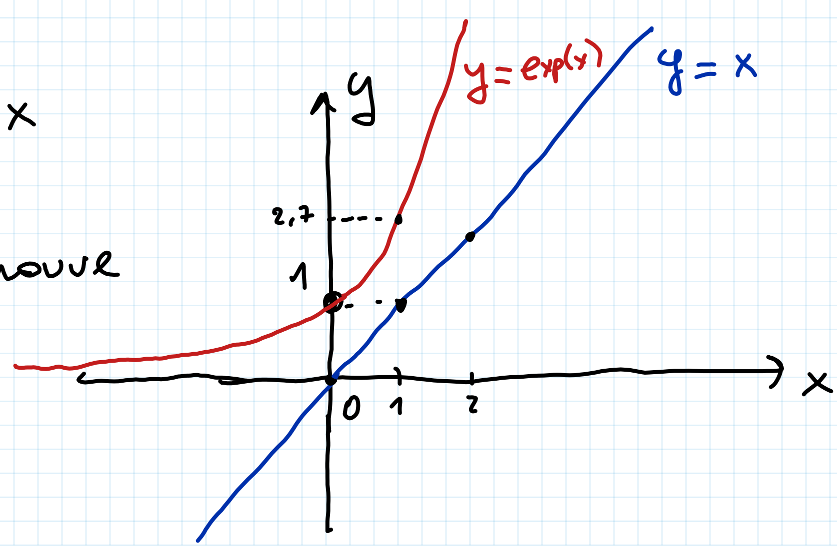
La fonction $y = \ln(x)$ est croissante

Si x va grandir, y va grandir mais plus faiblement par rapport à x.

2. $y = \exp(x) = e^x$

De même façon, on trouve,

$e^0 = 1$
$e^1 \approx 2,7\ldots$
etc



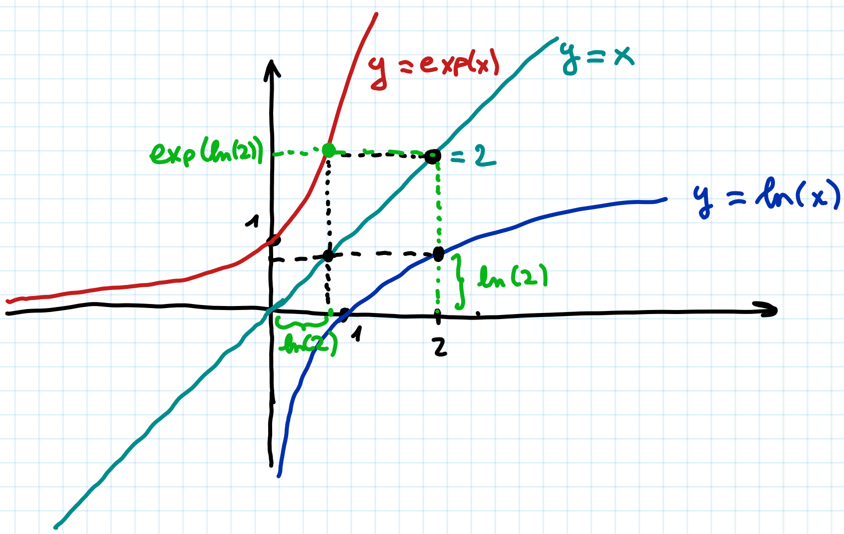
$\ln(x)$ est la réciproque de $\exp(x)$

C'est-à-dire $\exp(\ln(x)) = x$

$\ln(\exp(x)) = x$

Ex. $e^2 = \exp(2)$ $\ln(2)$

$\ln(\exp(2)) = 2$ $\exp(\ln(2)) = 2$



1.3 Proposer une fonction 1/2

$y = f(x)$ $f(0) = 5$

On veut trouver une fonction qui relie x et y telle que si x est nul, y vaut 5 et à chaque hausse de x, y diminue de 2 unités. x peut prendre n'importe quelle valeur. Posez et représentez graphiquement la fonction qui permet de reproduire cette relation entre x et y. Donnez un exemple de grandeurs d'économie ou de gestion qui pourraient correspondre à x et y.

$x \in \mathbb{R}$ ⇝ le domaine est $\mathbb{R}$

$x \rightsquigarrow x+1$

$y \rightsquigarrow y-2$

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$0 \longmapsto 5$

La condition nous dit que $f(1) = 5 - 2 = 3$

Parce que $x = 0 \rightsquigarrow y = 5$

donc $x = 1 \rightsquigarrow y = 5 - 2 = 3$

$x = 2 \rightsquigarrow y = 5 - 2 - 2 = 1$

$x = 3 \rightsquigarrow y = 5 \underbrace{-2-2-2}_{3 \text{ fois}}$

$x = 6 \rightsquigarrow y = 5 - \underbrace{2 - 2 - 2 \cdots - 2}_{6 \text{ fois}}$

$\Rightarrow \quad y = 5 - 2x$

x au hasard $\rightsquigarrow y = 5 - \underbrace{2 - 2 - 2 \cdots - 2}_{x \text{ fois}}$

$= 5 - 2 \cdot x$

Graphe :