TD L1 AES (GROUPE 4) - 21/10/2025

Informations : Tous les fichiers peuvent être trouvés à l'addresse

https://poisson.phc.dm.unipi.it/~dinunzio/Teaching

Pour toute question : antonio.dinunzio@unicaen.fr

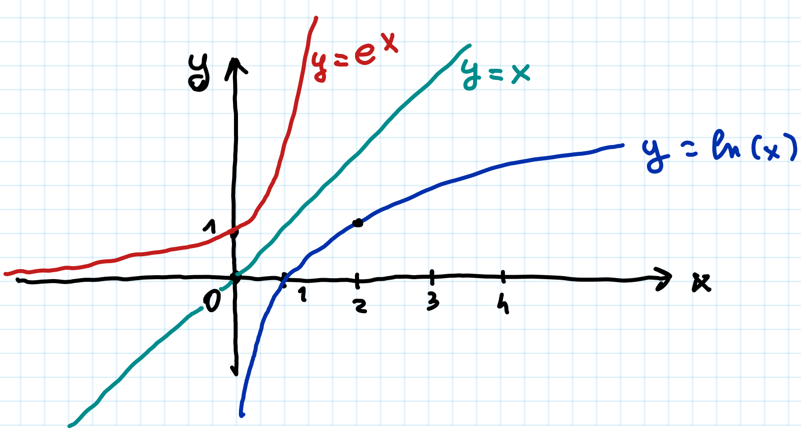
TD 3 | Les fonctions - Partie 1

Rappel

1.2 Fonctions exp et log

1. Représentez graphiquement ("à main levée") la fonction logarithme népérien $y = f(x) = \ln(x)$, avec $x > 0$. Comment évolue y à mesure que x augmente ?
2. Représentez graphiquement ("à main levée") la fonction exponentielle $y = \exp(x)$, avec $x \in \mathbb{R}$. Comment évolue y à mesure que x augmente ?
3. Quel est le lien entre les fonctions logarithme népérien et exponentielle ?

Graphe de $y = \ln(x)$ et $y = e^x = \exp(x)$



1.3 Proposer une fonction 1/2

On veut trouver une fonction qui relie x et y telle que si x est nul, y vaut 5 et à chaque hausse de x, y diminue de 2 unités. x peut prendre n'importe quelle valeur. Posez et représentez graphiquement la fonction qui permet de reproduire cette relation entre x et y.

Le domaine est $\mathbb{R}$

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

codomaine

$$0 \longmapsto 5$$

$y = f(x)$ telle que si $x = 0$, alors $y = 5$

$$f(0) = 5.$$

$$x \rightsquigarrow x+1 \Rightarrow y \rightsquigarrow y-2$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 5$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 5 - 2 = 3$$

$$x = 2 \Rightarrow y = 5 \underbrace{-2 - 2}_{2 \text{ fois}} = 1 \qquad -2-2 = -2 \cdot 2$$

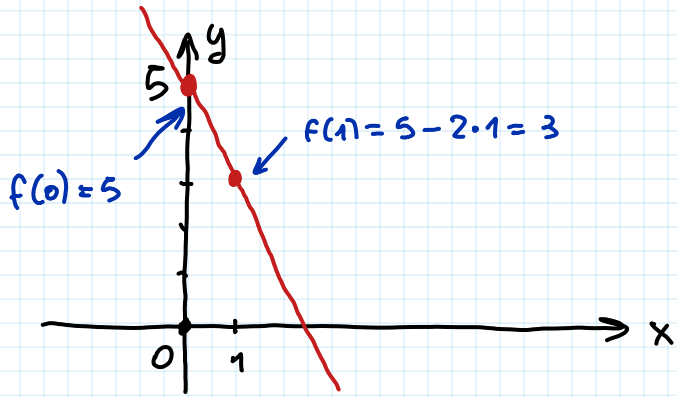
$$x = 3 \Rightarrow y = 5 \underbrace{-2 -2 -2}_{3 \text{ fois}} = -1 \qquad -2-2-2 = -2 \cdot 3$$

$$x \rightsquigarrow y = 5 - \underbrace{2 - 2 - 2 \cdots}_{x \text{ fois}} = 5 - 2 \cdot x$$

Notre fonction est $y = f(x) = 5 - 2x$

Graphe de $y = f(x) = 5 - 2x$

Vous savez qu'elle représente une droite sur le plan (x,y). Il suffit d'avoir deux points pour la dessiner

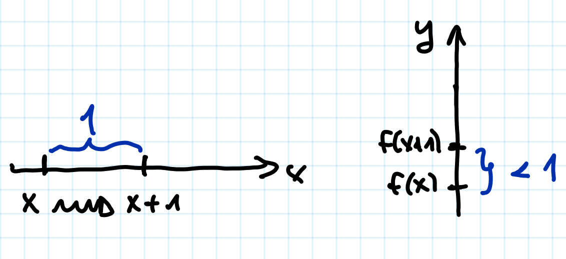


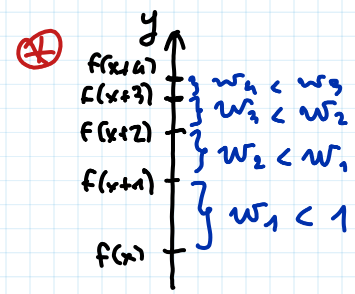
1.4 Proposer une fonction 2/2

On souhaite trouver une fonction qui serait adaptée pour représenter la relation entre deux variables x et y, avec x positif ou nul. On a l'intuition que si x augmente, y augmente et qu'une hausse donnée de x va conduire à une variation de y de plus en plus petite à mesure que x est grand. Proposez une fonction qui permet d'avoir cette relation entre x et y. Vous représenterez graphiquement cette fonction (approximatvement) et donnerez un exemple de grandeurs d'économie ou de gestion qui pourraient correspondre à x et y.

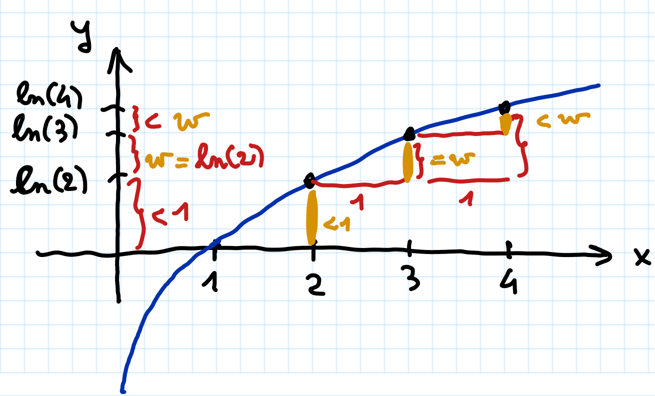
Domaine $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

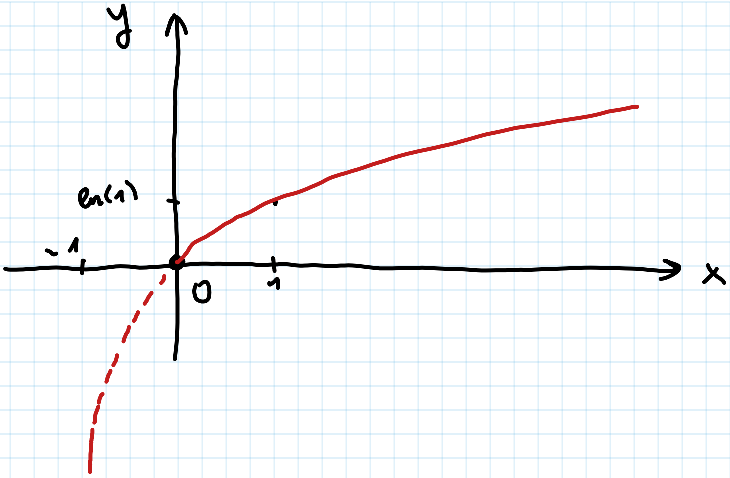
f est croissante





<u>Ex.</u> $f(x) = \ln(x)$ presque (x doit être ≥ 0, mais avec $\ln(x)$ il faut avoir $x > 0$)





$\ln(x) \xrightarrow{\text{translée}} \ln(x+1)$

$$y = \ln(x+1)$$

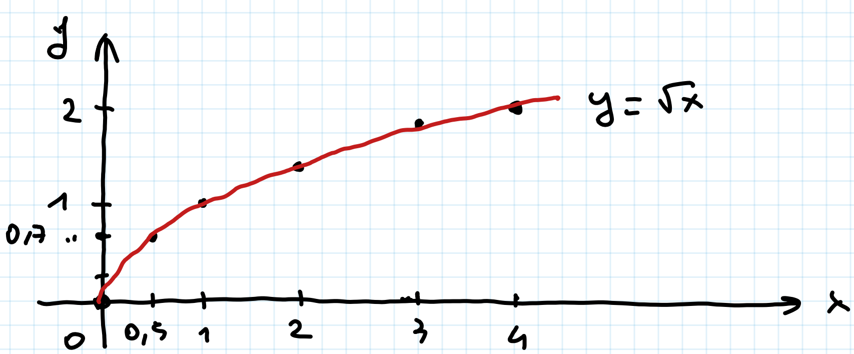
Exemple concret : x heures de travail

y production

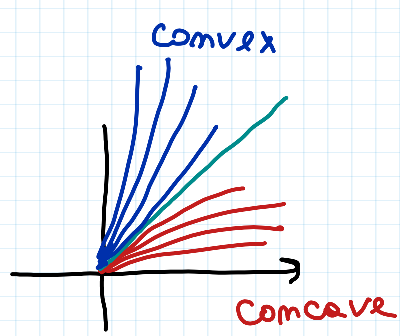
- Après 8 heures, la production n'est pas comme après 2 heures

Ex. (Mathématique) $y = \sqrt{x}$, $x \geq 0$

$y = \sqrt{x}$ est croissante



En général, une fonction CONCAVE



1.5 Fonction de recette totale

En concurrence pure et parfaite, on considère que le producteur n'a pas le choix de son prix de vente, mais seulement des quantités qu'il peut produire et vendre. On s'intéresse ici à la recette totale (aussi appelée chiffre d'affaires) d'une entreprise qui produit un bien. La recette totale correspond au total de ses ventes en valeur. On note p le prix de vente et Q la quantité produite et vendue.

1. Posez la fonction de la recette totale, que vous noterez R, en fonction de p et de Q. Quelles sont ici les variables endogène(s) et exogène(s) et quel est le domaine de définition de la fonction?

$R = p \cdot Q$

Q = quantité : ≥ 0 ⇝ Domaine $= \mathbb{R}_+$

⇝ Codomaine $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}_+$

$R : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ mais aussi : $R : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$

$R(Q) = p \cdot Q$ $R(Q) = p \cdot Q$

2. A quel type de fonction correspond la fonction définie à la question précédente?

$R(Q) = p \cdot Q$ est une fonction LINÉAIRE de la variable Q et de pente p.

3. On suppose que le marché fixe à $p = 2$ le prix de vente.
   (a) Que vaut la recette totale si l'entreprise vend 50 unités?
   (b) Comment évolue la recette totale à chaque unité supplémentaire de bien vendue?
   (c) Proposez une représentation graphique de la fonction de recette totale.

↳ $R(Q) = 2 \cdot Q$

(a) $R(50) = 2 \cdot 50 = 100$

(b) $R(Q+1) - R(Q) = 2(Q+1) - 2Q$

$= 2Q + 2 - 2Q$

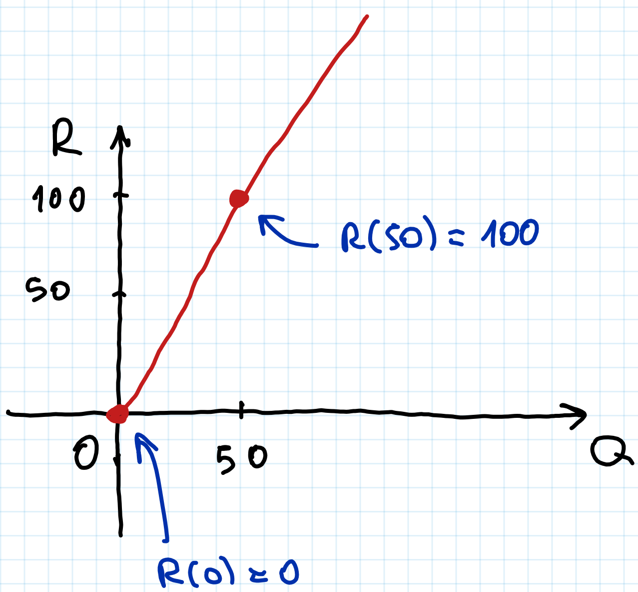
$= 2$

$$\begin{array}{ccc} Q & \rightsquigarrow & Q+1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ R(Q) & & R(Q+1) \end{array}$$

- $R(Q) = 2Q$
- $R(Q+1) = 2(Q+1) = 2Q + 2$

c) $R(Q) = 2 \cdot Q$ → représentée par une droite

↳ on a besoin de deux points



2 Manipulation de fonctions

2.1 Opération sur les fonctions

1. Soit $f(x) = 2x$ et $g(x) = 6x + 1$, deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$

↳ les domaines sont $\mathbb{R}$

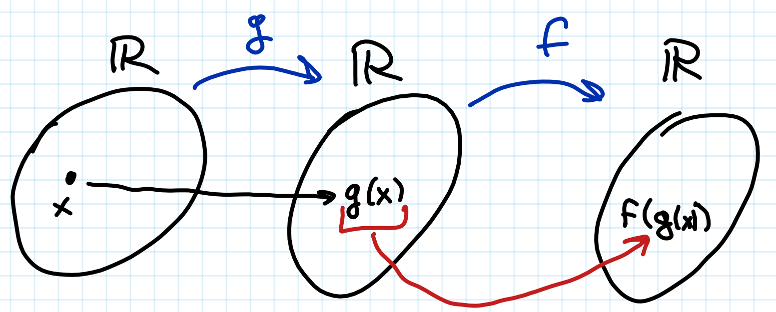
   (a) Que vaut $(f + g)(x)$?
   (b) Que vaut $(f \times g)(x)$?
   (c) Que vaut $(f \circ g)(x)$?

(a) $$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 2x + 6x + 1 = 8x + 1$$

(b) $$(f \times g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (2x) \cdot (6x+1) = 12x^2 + 2x$$

Déf $$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



(c) $$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2\,g(x) = 2(6x+1)$$

↑ $f(x) = 2x$ ↳ remplacé par $g(x)$

2. Question 1., mais en prenant $f(x) = 100x^2$ et $g(x) = 1 + x$

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 100x^2 + 1 + x$
- $(f \times g)(x) = f(x) \cdot g(x) = 100x^2 \cdot (1+x) = 100x^2 + 100x^3$
- $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1+x) = 100(1+x)^2$

$= 100(1 + 2x + x^2)$

$= 100 + 200x + 100x^2$

Rappel : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

3. *** Question 1., mais en prenant $f(x) = 3x^3$ et $g(x) = x^2$

- $(f+g)(x) = 3x^3 + x^2$
- $(f \times g)(x) = 3x^3 \cdot x^2 = 3x^5$
- $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3(g(x))^3 = 3(x^2)^3 = 3x^6$

2.2 Manipulation de la fonction logarithme

Utilisez les règles de calcul de la fonction logarithme pour exprimer autrement les expressions suivantes :

1. $\ln(x^{0,5})$
2. $\ln(\frac{1-x}{1+2x})$
3. $\ln(AK^aL^b)$ avec a et b deux paramètres et K et L deux variables
4. $\ln(\exp(3x+1))$

- $\ln(x^{0,5}) = 0,5 \cdot \ln(x) = \frac{1}{2}\ln(x)$ ← $\ln(x^a) = a\ln(x)$
- $\ln\left(\frac{1-x}{1+2x}\right) = \ln(1-x) - \ln(1+2x)$ ← $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln(A \cdot K^a \cdot L^b) = \ln(A) + \ln(K^a) + \ln(L^b)$ ← $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$

$= \ln(A) + a\ln(K) + b\ln(L)$

• $\ln(\exp(\underbrace{3x+1})) = \underbrace{3x+1}$

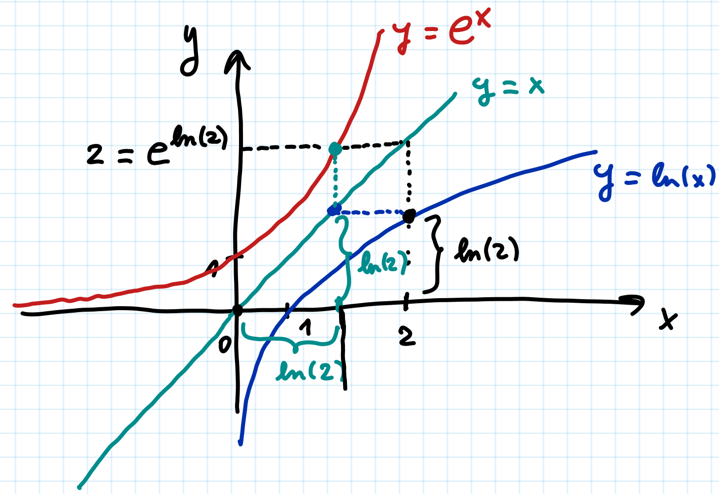
$\ln(x)$ est la réciproque de $\exp(x)$

c'est-à-dire : $\ln(\exp(x)) = x$

$\exp(\ln(x)) = x$

$\ln(\exp(2)) = 2$

$\exp(\ln(3)) = 3$



2.3 Manipulation de la fonction exponentielle

Utilisez les règles de calcul de la fonction exponentielle pour exprimer autrement les expressions suivantes :

1. $\exp(3x+2)$
2. $\exp(x)\exp(-3x)$
3. $\frac{\exp(2x)+\exp(4x)}{\exp(2x)}$
4. $\exp(3x)$
5. $\exp(3x-7)$
6. $\exp(x)(1+\exp(-x))$
7. $\frac{1}{\exp(x)}$
8. $\exp(-3x)$

1. $\exp(3x+2) = e^{3x+2} = e^{3x}\cdot e^{2}$ ← $e^{a+b} = e^{a}\cdot e^{b}$

2. $\exp(x)\cdot\exp(-3x) = e^{x}\cdot e^{-3x} = e^{x-3x} = e^{-2x}$ ← // // //

3. $\frac{\exp(2x)+\exp(4x)}{\exp(2x)} = \frac{e^{2x}+e^{4x}}{e^{2x}} = \frac{e^{2x}}{e^{2x}} + \frac{e^{4x}}{e^{2x}} = 1 + e^{2x}$

$4x - 2x = 2x$

4. $\exp(3x) = e^{3x} = (e^{x})^{3}$

$e^{a}/e^{b} = e^{a-b}$