TD L1 BST (GROUPE 3) - 23/10/25

Quelques Remarques

1) $$\int e^x \, dx = e^x + \underbrace{C}_{=0}$$

$a \in \mathbb{R} \Rightarrow (e^{ax})' = a\, e^{ax}$

On déduit que, si $a \neq 0$, alors

$$\int e^{ax} \, dx = \frac{1}{a} e^{ax}$$

2) Fonctions Trigonométriques:

$$\begin{tikzcd}
\sin(x) \arrow[d, "\text{dér}"] \arrow[ddd, bend right=60, "\text{prim}"'] \\
\cos(x) \arrow[d, "\text{dér}"] \arrow[u, bend right, "\text{prim.}"'] \\
-\sin(x) \arrow[d, "\text{dér}"] \arrow[u, bend right, "\text{prim.}"'] \\
-\cos(x) \arrow[uuu, bend left=40, "\text{dér}"] \arrow[u, bend right, "\text{primitive}"']
\end{tikzcd}$$

INTEGRATION PAR PARTIES

Rappel : $\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

$\rightsquigarrow$ Soient f et g des fonctions (dérivables... etc)

On a la Formule d'intégration par parties :

$$\boxed{\int f'(x)\cdot g(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f(x)\,g'(x)\,dx}$$

Ex. 1) $\displaystyle\int x\,e^x\,dx = \int \underbrace{e^x}_{f'(x)}\cdot\underbrace{x}_{g(x)}\,dx$

$f(x) = e^x$

$\boxed{g'(x) = 1}$

$$= f(x)\cdot g(x) - \int \underbrace{f(x)}_{e^x}\,\underbrace{g'(x)}\,dx$$

Formule (Integ. par parties)

$$= e^x\cdot x - \int e^x\cdot 1\,dx$$

$$= e^x\cdot x - e^x$$

$$= e^x(x-1).$$

2) $$\int \underbrace{x}_{g(x)} \underbrace{\sin(x)}_{f'(x)}\, dx = g(x) \cdot f(x) - \int g'(x) \cdot f(x)\, dx$$

$g'(x) = 1$

$f(x) = -\cos(x)$

$$= x \cdot (-\cos x) - \int 1 \cdot (-\cos x)\, dx$$

$$= -x \cdot \cos x + \int \cos x \;\; dx$$

$$= -x \cdot \cos(x) + \sin(x)$$

3) $$\int \ln(x)\, dx = \int \underbrace{1}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{g(x)}\, dx$$

$f(x) = x$

$g'(x) = 1/x$

$$= f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)\, dx$$

$$= x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx$$

$$= x \cdot \ln(x) - \int 1 \cdot dx$$

$$\Rightarrow = x \cdot \ln(x) - x$$

$$= x\,(\ln(x) - 1)$$

4) $\int \underset{f' \cdot g}{x^2 \ln(x)}\, dx$ $\quad f(x) = x^3/3$, $g'(x) = 1/x$

Pourquoi ?

Parce que, si je pose $g(x) = \ln(x)$, dans le prochaine intégral, je trouverai $g'(x) = \frac{1}{x}$ [plus facile !]

$$\int x^2 \ln(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)\, dx$$

$$= \frac{x^3}{3} \cdot \ln(x) - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x}\, dx$$

$\left[\frac{1}{3} \frac{x^3}{x} = \frac{1}{3} x^2 \; ; \; \int c \cdot f(x)\, dx = c \int f(x)\, dx \right]$ $c \in \mathbb{R}$ constante, ici $c = 1/3$

$$= \frac{x^3}{3} \ln(x) - \frac{1}{3} \int x^2\, dx$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln(x) - \frac{1}{3} \left(\frac{x^3}{3} \right)$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln(x) - \frac{1}{9} x^3$$

5) $\int x^2 \cos(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)\, dx$

On dois choisir f' et g entre x^2 et $\cos(x)$

- si $f'(x) = x^2$, alors $f(x) = \frac{x^3}{3}$
  $g(x) = \cos(x)$, alors $g'(x) = -\sin(x)$

L'intégral à droite devient : $-\int \frac{x^3}{3} \cdot (-\sin x)\, dx$

pas du tout plus facile !

Donc le bonne choix est :

- $f'(x) = \cos(x)$ $\quad \rightsquigarrow \quad$ $f(x) = \sin(x)$

  $g(x) = x^2$ $\qquad\qquad\qquad$ $g'(x) = 2x$

$$\Rightarrow \int \underbrace{x^2}_{g} \underbrace{\cos(x)}_{f'} \, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) \, dx$$

$$= \sin(x) \cdot x^2 - \int \sin(x) \cdot 2x \, dx$$

$$= \sin(x) \cdot x^2 - 2 \underbrace{\int x \cdot \sin(x) \, dx}_{\text{déjà calculé [Ex. 2)]}}$$

$$\int x \cdot \sin(x) \, dx = -x \cdot \cos(x) + \int \cos(x) \, dx$$

$$= -x \cos(x) + \sin(x)$$

$$= x^2 \cdot \sin(x) - 2 \left(-x \cos(x) + \sin(x)\right)$$

$$= x^2 \cdot \sin(x) + 2x \cdot \cos(x) - 2 \sin(x) .$$

Exercice 32. Calculer, grâce à le méthode d'intégration par partie, les primitives suivantes :

a. $\int xe^x\,dx$ d. $\int e^x \sin(x)\,dx$ g. $\int x^2e^x\,dx$

b. $\int x\ln(x)\,dx$ e. $\int \ln(x)\,dx$ h. $\cancel{\int \frac{x}{(\cos(x))^2}\,dx}$

c. $\int (x+1)\sin(x)\,dx$ f. $\int x^2\sin(x)\,dx$ i. $\int xe^{3x}\,dx$

(Ind. pour i. utiliser que, pour $a \in \mathbb{R}$ constant, $\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + \cancel{C}$).

$\underline{a \neq 0}$

Sol.

a. Déjà vu (Ex. 1))

b. $\int \underbrace{x}_{f'(x)} \underbrace{\ln(x)}_{g(x)}\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)\,dx$

$f(x) = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}$

$g'(x) = \frac{1}{x}$

$= \frac{x^2}{2}\cdot \ln(x) - \int \underbrace{\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}}_{\frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2}}\,dx$

$= \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{1}{2}\int x\,dx$

$= \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2}$

$= \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}.$

c. $\int (x+1)\sin(x)\,dx$

Deux manières :

1. STANDARD

$$\int \underbrace{(x+1)}_{g(x)} \underbrace{\sin(x)}_{f'(x)}\, dx = f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)\, dx$$

↳ parce que comme ça je trouve $g'(x) = 1$ et $f(x) = \int \sin(x)\, dx = -\cos(x)$

$$= -\cos(x)\cdot(x+1) - \int (-\cos(x))\cdot 1\, dx$$

$$= -\cos(x)\cdot(x+1) + \int \cos(x)\, dx$$

$$= -\cos(x)\cdot(x+1) + \sin(x) .$$

2. Si non :

$$\int (x+1)\sin(x)\, dx = \int \big(x\sin(x) + \sin(x)\big) dx$$

$$= \underbrace{\int x \sin(x)\, dx}_{\text{déjà vu}} + \underbrace{\int \sin(x)\, dx}_{-\cos(x)}$$

d. $$\int \underbrace{e^x}_{f'} \underbrace{\sin(x)}_{g}\, dx = \underbrace{e^x}_{f} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{g} - \int \underbrace{e^x}_{f} \underbrace{\cos(x)}_{g'}\, dx$$

$$= e^x \sin(x) - \left(\int \underbrace{e^x}_{f'} \underbrace{\cos(x)}_{g}\, dx \right)$$

... encore par parties ...

$$= e^x \sin(x) - \left(\underbrace{e^x}_{f} \underbrace{\cos(x)}_{g} - \int \underbrace{e^x}_{f} \underbrace{(-\sin(x))}_{g'}\, dx \right)$$

$$= e^x \sin(x) - \left(e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x)\, dx \right)$$

$$= e^x \sin(x) - e^x \cos(x) - \int e^x \sin(x)\, dx$$

Si on appelle $A(x) = \int e^x \sin(x)\, dx$, on trouve

$$A(x) = e^x \sin(x) - e^x \cos(x) - A(x)$$

$$2\, A(x) = e^x \sin(x) - e^x \cos(x)$$

$$\underset{\int e^x \sin(x) dx}{\overset{\parallel}{A(x)}} = \frac{1}{2} \left(e^x \sin(x) - e^x \cos(x) \right).$$

e. Déjà vu (Ex. 3)).

f. Exactement comme le Ex 5)).

g.
i. } La prochaine fois

Voir le fichier
du TD du Groupe 1
du même jour (23/10/25)