TD L1 AES (Groupe 3) — 04/11/25

Rappel. La prochaine fois : **QCM** !

1.3 Proposer une fonction 1/2

On veut trouver une fonction qui relie x et y telle que si x est nul, y vaut 5 et à chaque hausse de x, y diminue de 2 unités. x peut prendre n'importe quelle valeur. Posez et représentez graphiquement la fonction qui permet de reproduire cette relation entre x et y. Donnez un exemple de grandeurs d'économie ou de gestion qui pourraient correspondre à x et y.

La dernière fois on a trouvé : $y = 5 - 2x$. Pourquoi ?

On cherche $y = f(x)$ t.q.

- $f(0) = 5$
- $x \mapsto x+1$ alors $y \mapsto y-2$

si $x = 0$, alors $y = 5$

si $x = 1$, alors $y = 5 - 2 = 3$

si $x = 2$, alors $y = 3 - 2 = 1$

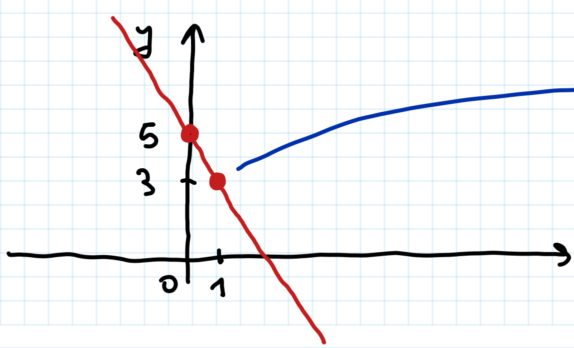
(avec $x \xrightarrow{+1}$ et $y \xrightarrow{-2}$ d'une ligne à la suivante)

Si $x = n$ entier, alors $y = 5 \underbrace{-2-2-2 \cdots -2}_{n \text{ fois}}$

$= 5 - 2 \cdot n$

Donc la fonction $y = 5 - 2x$ est un bon exemple !

Graphe :



$x = 1 \Rightarrow y = 3$

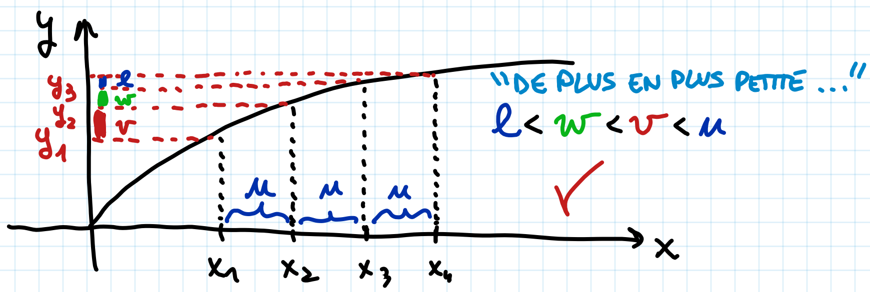
1.4 Proposer une fonction 2/2

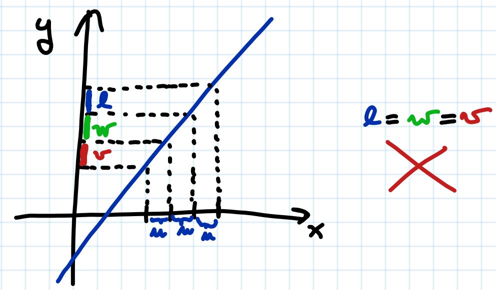
On souhaite trouver une fonction qui serait adaptée pour représenter la relation entre deux variables x et y, avec x positif ou nul. On a l'intuition que si x augmente, y augmente et qu'une hausse donnée de x va conduire à une variation de y de plus en plus petite à mesure que x est grand. Proposez une fonction qui permet d'avoir cette relation entre x et y. Vous représenterez graphiquement cette fonction (approximatvement) et donnerez un exemple de grandeurs d'économie ou de gestion qui pourraient correspondre à x et y.

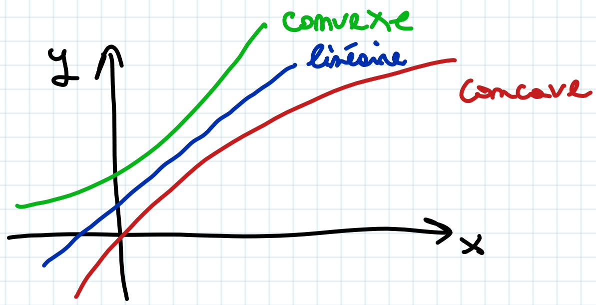
$x \in \mathbb{R}_+$

$x \leadsto x+1$ alors y augmente

$x_1 < x_2 \leadsto y_1 < y_2$ mais $\underbrace{y_2 - y_1}_{v} < \underbrace{x_2 - x_1}_{u}$





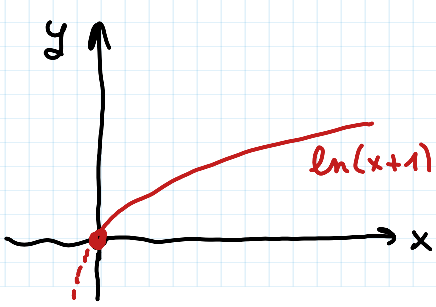


Donc il suffit de considérer une fonction CONCAVE.

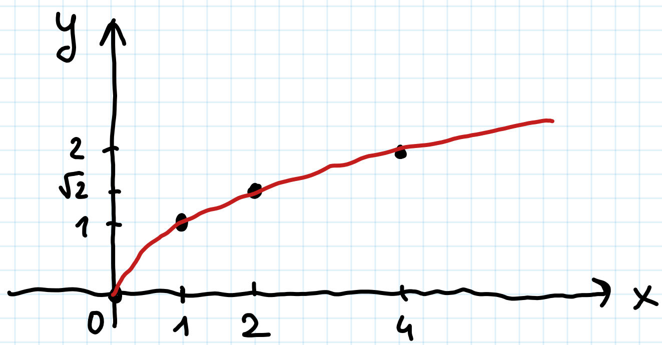
Ex. 1) $y = \ln(x)$ Problème : elle n'est pas définie pour $x = 0$

Solution : Translation

$y = \ln(x+1)$ pour $x \geq 0$



2) $y = \sqrt{x}$, $x \geq 0$



$x = 1 \Rightarrow y = \sqrt{1} = 1$

$x = 4 \Rightarrow y = \sqrt{4} = 2$

$x = 2 \Rightarrow y \approx 1{,}4142$.

1.5 Fonction de recette totale

En concurrence pure et parfaite, on considère que le producteur n'a pas le choix de son prix de vente, mais seulement des quantités qu'il peut produire et vendre. On s'intéresse ici à la recette totale (aussi appelée chiffre d'affaires) d'une entreprise qui produit un bien. La recette totale correspond au total de ses ventes en valeur. On note p le prix de vente et Q la quantité produite et vendue.

1. Posez la fonction de la recette totale, que vous noterez R, en fonction de p et de Q. $R = p \cdot Q$
2. A quel type de fonction correspond la fonction définie à la question précédente ? linéaire
3. On suppose que le marché fixe à $p = 2$ le prix de vente. $R = 2 \cdot Q$
   (a) Que vaut la recette totale si l'entreprise vend 50 unités ? $R(50) = 2 \cdot 50 = 100$
   (b) Comment évolue la recette totale à chaque unité supplémentaire de bien vendue ?
   (c) Proposez une représentation graphique de la fonction de recette totale.

Ex. $p = €1$ pour $Q = 1$ fixée

Si $Q = 5$, alors $R = €5$

Si $Q = 7$, alors $R = €7$

Avec p générique : $Q = 1 \Rightarrow R = p$

$Q = 2 \Rightarrow R = 2 \cdot p$

$Q \Rightarrow R = Q \cdot p$

b) Si $Q \mapsto Q+1$ comment R va-t-il changer ?

$R(Q) = 2 \cdot Q$

$R(Q+1) = 2(Q+1) = 2 \cdot Q + 2$

La différence est 2

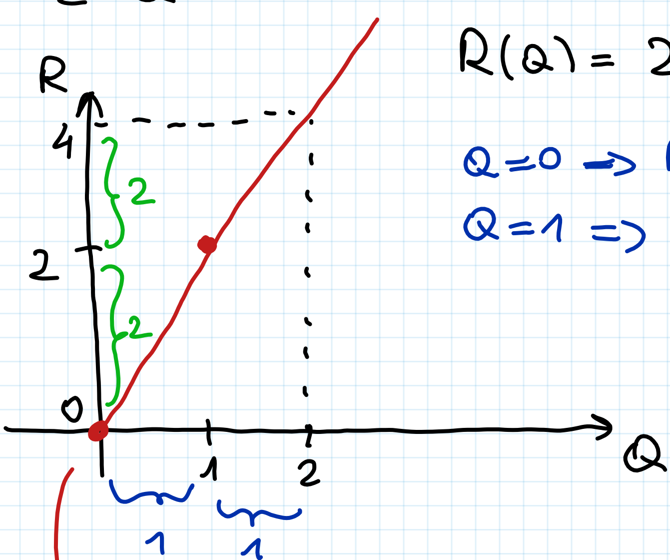
$R(Q+1) - R(Q) = 2Q + 2 - 2Q = 2$.

c) $R = 2 \cdot Q$

$R(Q) = 2 \cdot Q$

$Q = 0 \Rightarrow R = 0$

$Q = 1 \Rightarrow R = 2$



$Q \geq 0$

RAPPEL. La prochaine fois :

QCM

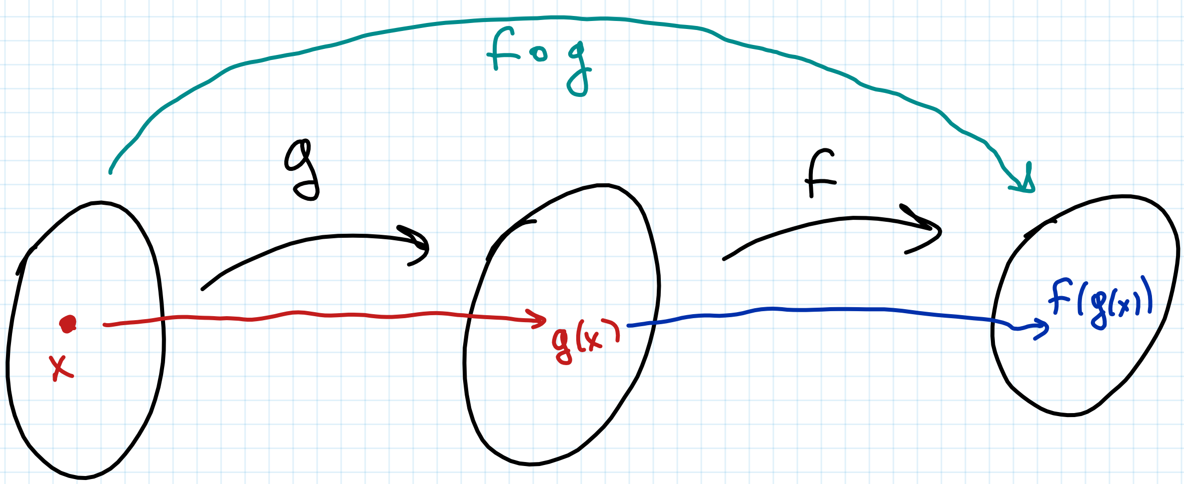
2 Manipulation de fonctions

2.1 Opération sur les fonctions

1. Soit $f(x) = 2x$ et $g(x) = 6x + 1$, deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$
   (a) Que vaut $(f + g)(x)$?
   (b) Que vaut $(f \times g)(x)$?
   (c) Que vaut $(f \circ g)(x)$?

$f \circ g$? COMPOSITION de fonctions :

$$(f \circ g)(x) \overset{\text{définition}}{=} f(g(x))$$



$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 2x + 6x + 1 = 8x + 1$$

$$(f \times g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (2x) \cdot (6x+1) = 12x^2 + 2x$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(6x+1) = 2(6x+1) = 12x + 2$$

Rémplacer x par g(x) dans l'expression de f(x)

$f(x) = 2x$

$f(6x+1) = 2(6x+1)$

2. Question 1., mais en prenant $f(x) = 100x^2$ et $g(x) = 1 + x$

3. *** Question 1., mais en prenant $f(x) = 3x^3$ et $g(x) = x^2$

2. $(f+g)(x) = 100x^2 + 1 + x$

$(f \times g)(x) = 100x^2(1+x) = 100x^2 + 100x^3$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1+x) = 100(1+x)^2$

$= 100(1+2x+x^2) = 100 + 200x + 100x^2$

3. $(f+g)(x) = 3x^3 + x^2$

$(f \times g)(x) = 3x^3 \cdot x^2 = 3x^{3+2} = 3x^5$

multiplication!

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 3 \cdot (x^2)^3 = 3x^{2 \cdot 3} = 3x^6$

2.2 Manipulation de la fonction logarithme

Utilisez les règles de calcul de la fonction logarithme pour exprimer autrement les expressions suivantes :

1. $\ln(x^{0,5})$
2. $\ln(\frac{1-x}{1+2x})$
3. $\ln(AK^aL^b)$ avec a et b deux paramètres et K et L deux variables
4. $\ln(\exp(3x+1))$

1. $\ln(x^{0,5}) = 0,5 \ln(x) = \frac{1}{2}\ln(x)$ $\qquad \ln(x^a) = a\ln(x)$

2. $\ln\left(\frac{1-x}{1+2x}\right) = \ln(1-x) - \ln(1+2x)$ $\qquad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$

3. $\ln(AK^aL^b) = \ln(A) + \ln(K^a) + \ln(L^b)$ $\qquad \ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$

$= \ln(A) + a\ln(K) + b\ln(L)$

4. $\ln(\exp(3x+1)) = 3x+1$

ln est la réciproque de exp

$\ln(\exp(x)) = x$ et $\exp(\ln(x)) = x$

$x \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $x > 0$

2.3 Manipulation de la fonction exponentielle

Utilisez les règles de calcul de la fonction exponentielle pour exprimer autrement les expressions suivantes :

1. $\exp(3x+2)$
2. $\exp(x)\exp(-3x)$
3. $\frac{\exp(2x)+\exp(4x)}{\exp(2x)}$
4. $\exp(3x)$
5. $\exp(3x-7)$
6. $\exp(x)(1+\exp(-x))$
7. $\frac{1}{\exp(x)}$
8. $\exp(-3x)$

Rappel : $\exp(x) = e^x$

I $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$

$e^{a+b} = e^a \cdot e^b$

II $\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}$

$e^{-a} = \frac{1}{e^a}$

III $\exp(a \cdot b) = (\exp(a))^b$

$e^{a \cdot b} = (e^a)^b$

On note que II est un cas particulier de III avec $b = -1$.

Rappel : $x^{-1} = \frac{1}{x}$

1) $\exp(3x+2) = e^{3x+2} \overset{\text{I}}{=} e^{3x} \cdot e^{2} = \exp(3x)\exp(2)$

2) $\exp(x)\exp(-3x) \overset{\text{I}}{=} \exp(x-3x) = \exp(-2x)$

3) $$\frac{\exp(2x)+\exp(4x)}{\exp(2x)} = \frac{\exp(2x)}{\exp(2x)} + \frac{\exp(4x)}{\exp(2x)}$$

$$\overset{\text{II}}{=} 1 + \exp(4x)\exp(-2x)$$

$$\overset{\text{I}}{=} 1 + \exp(4x-2x)$$

$$= 1 + \exp(2x)$$

Mais aussi : $\dfrac{\exp(4x)}{\exp(2x)} = \dfrac{e^{4x}}{e^{2x}} = e^{4x-2x} = e^{2x} = \exp(2x)$

4) $\exp(3x) \overset{\text{III}}{=} (\exp(x))^3$

5) $\exp(3x-7) \overset{\text{I}}{=} \exp(3x)\exp(-7) \overset{\text{II}}{=} \dfrac{\exp(3x)}{\exp(7)}$

6) $$\exp(x)\,(1+\exp(-x)) = \exp(x) + \exp(x)\exp(-x)$$

$$= \exp(x) + \exp(x-x)$$

$$= \exp(x) + \exp(0)$$

$$= \exp(x) + 1$$

Mais aussi : $\exp(x)\exp(-x) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(x)} = 1$

7) $\dfrac{1}{\exp(x)} \overset{\text{II}}{=} \exp(-x)$

8) $\exp(-3x) \overset{\text{II}}{=} \dfrac{1}{\exp(3x)} \overset{\text{III}}{=} \dfrac{1}{(\exp(x))^3} = \left(\dfrac{1}{\exp(x)}\right)^3 .$