TD L1 AES (Groupe 4) — 04/11/25

Rappel. La prochaine fois : **QCM** !

2.3 Manipulation de la fonction exponentielle

Utilisez les règles de calcul de la fonction exponentielle pour exprimer autrement les expressions suivantes :

1. $\exp(3x+2)$
2. $\exp(x)\exp(-3x)$
3. $\frac{\exp(2x)+\exp(4x)}{\exp(2x)}$
4. $\exp(3x)$

Dernière fois

5. $\exp(3x-7)$
6. $\exp(x)(1+\exp(-x))$
7. $\frac{1}{\exp(x)}$
8. $\exp(-3x)$

Rappel :

- $\exp(a)\cdot\exp(b) = e^a \cdot e^b = e^{a+b} = \exp(a+b)$.
- $\exp(-a) = e^{-a} = \frac{1}{e^a} = \frac{1}{\exp(a)}$

$$\exp(-7) = \frac{1}{\exp(7)}$$

5) $\exp(3x-7) = \exp(3x)\cdot\exp(-7) = \frac{\exp(3x)}{\exp(7)}$.

6)
$$\begin{aligned}\exp(x)(1+\exp(-x)) &= \exp(x) + \exp(x)\cdot\exp(-x)\\ &= \exp(x) + \exp(x-x)\\ &= \exp(x) + \exp(0)\\ &= \exp(x) + 1\end{aligned}$$

Mais également : $\exp(x)\exp(-x) = \frac{\exp(x)}{\exp(x)} = 1$

7) $\dfrac{1}{\exp(x)} = \exp(-x).$

8) $\exp(-3x) = \dfrac{1}{\exp(3x)} = \dfrac{1}{(\exp(x))^3} = \left(\dfrac{1}{\exp(x)}\right)^3$

$(e^{a})^{b} = e^{a \cdot b}$, c'est-à-dire

$(\exp(a))^{b} = \exp(a \cdot b)$

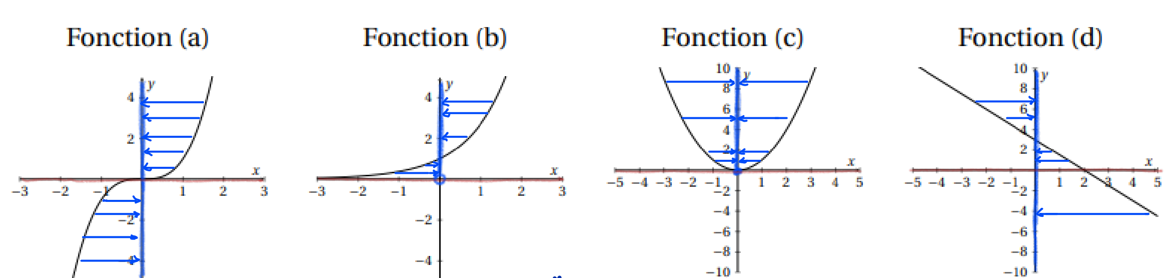
TD 4 | Les fonctions - partie 2

1.1 Question de cours

1. Les graphes de 4 fonctions définies sur $\mathbb{R}$ sont représentés ci-dessous. Pour chacune des fonctions
   - (a) identifiez le type de fonction
   - (b) identifiez le domaine et le codomaine → en général c'est toujours $\mathbb{R}$, mais ici nous considérons l'IMAGE (valeurs y atteintes)
   - (c) dites si la fonction est injective, surjective ou bijective (en précisant les domaines d'arrivée).
   - (d) dites si a fonction est monotone ou non monotone et sur quel(s) intervalle(s) elle est croissante,
   - (e) dites sur quel(s) intervalle(s) la fonction est linéaire, concave et convexe.

Image $\ni y$

Domaine $\ni x$



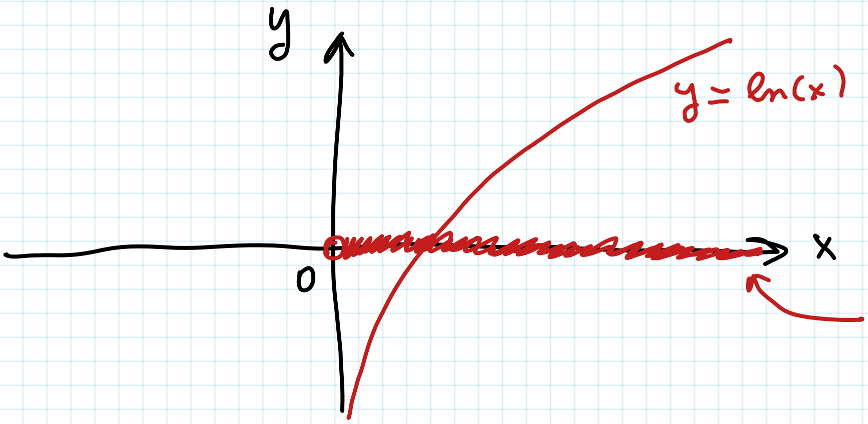
Dom $= \mathbb{R}$ Im: $\mathbb{R}$ | Dom $= \mathbb{R}$ Im: $\mathbb{R}_+^*$ | Dom $= \mathbb{R}$ Im $= \mathbb{R}_+$ | Dom $= \mathbb{R}$ Im $= \mathbb{R}$

Type: POUISSANCE | EXP. | POUISSANCE | AFFINE

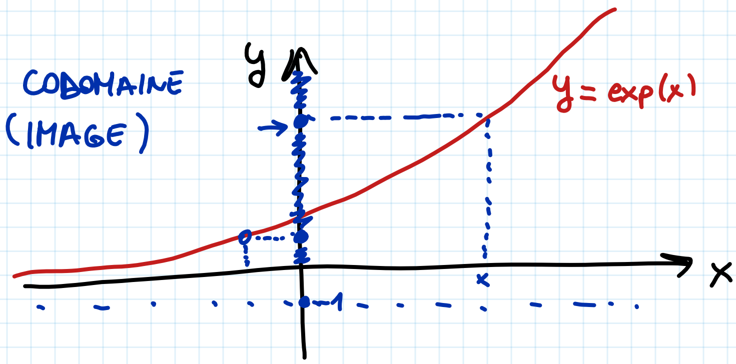
$\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} =]0, +\infty[$

$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} = [0, +\infty[$

Rappels Théoriques

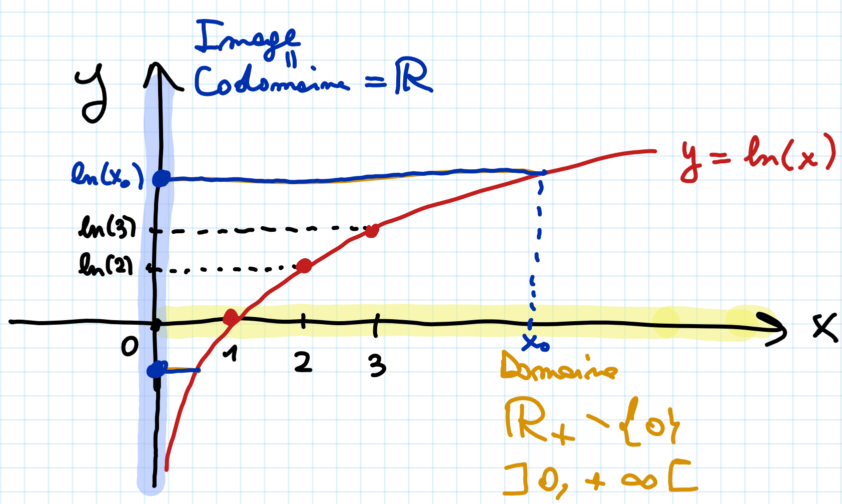


DOMAINE
"$x > 0$"
ou $\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$



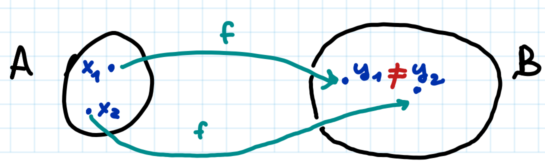
$\nexists x \in \mathbb{R}$ tq $e^x = -1$

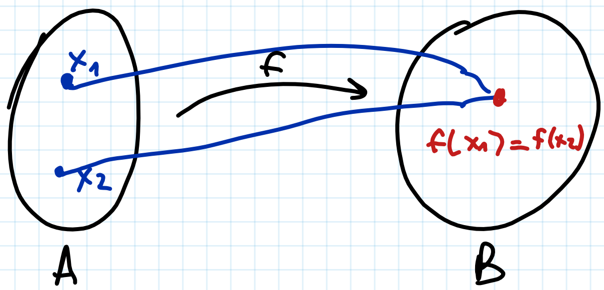
$-1 \notin$ Image de exp



Déf. $f : A \to B$ fonction est <u>INJECTIVE</u> si

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2).$$





PAS INJECTIVE !

Ex. 1 $\quad f :$ étu Groupe 4 AES $\longrightarrow$ Noms français

$$f(\text{étu}) = \text{Nom étu}$$

f est injective parce que dans le GROUPE 4 il n'y a pas deux étu avec le même nom !

$\quad \text{étu}_1 \neq \text{étu}_2 \Rightarrow \text{nom}_1 \neq \text{nom}_2$

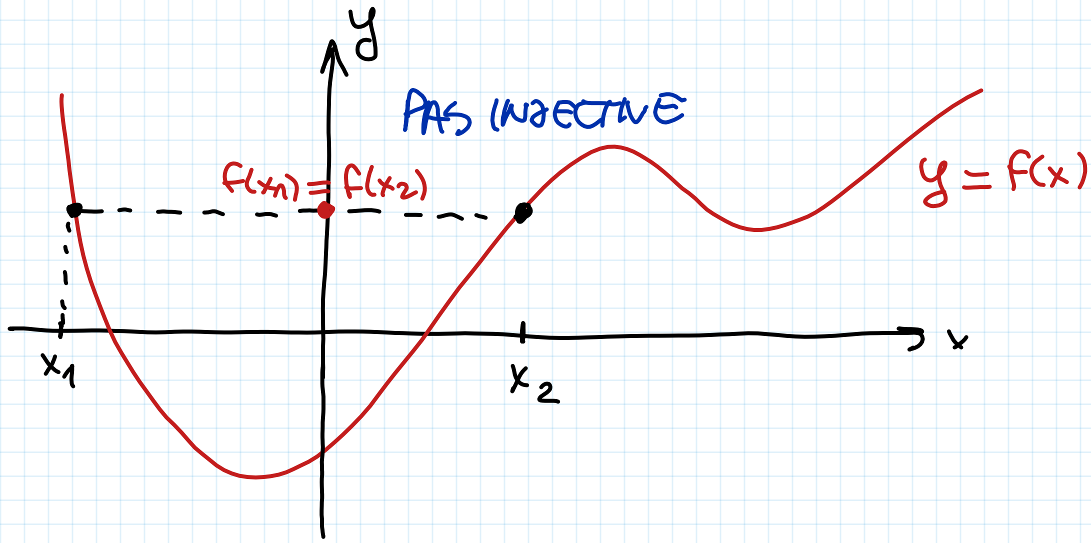
Ex. 2 $\quad f :$ étu Groupe 4 AES $\longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(\text{étu}) = \text{Âge étu}$$

f N'EST PAS INJECTIVE car dans le groupe 4 il y a surement deux étu avec la même âge.

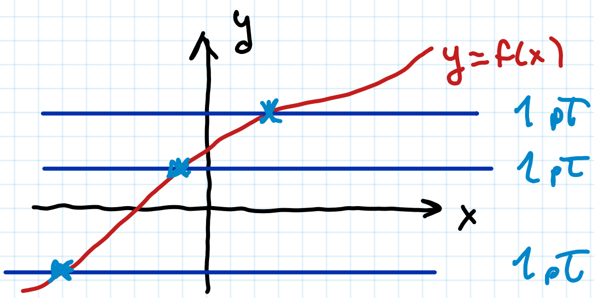
$\text{étu}_1 \neq \text{étu}_2$ mais $\text{âge}(\text{étu}_1) = 18$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\ \ \text{âge}(\text{étu}_2) = 18$

Pour les fonctions réels $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a
(ou f . intervl $\to \mathbb{R}$)
une méthode graphique pour Tester l'injectivité.

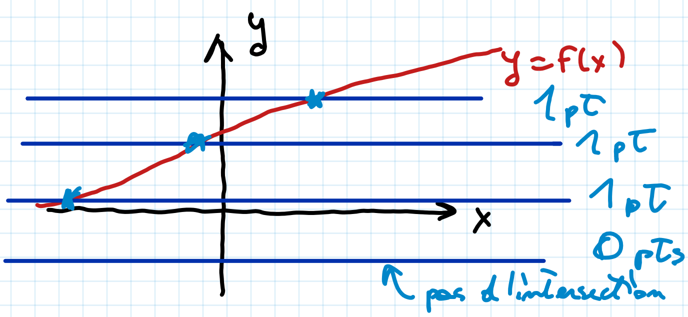


f injective $\Longleftrightarrow$ Chaque droite horizontale rencontre le graphe de f en AU PLUS un point.

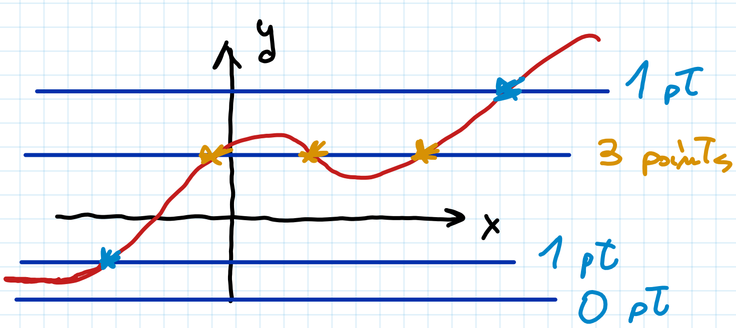
$\mathrm{Card}(\text{droite horiz.} \cap \text{graphe}) \leq 1$



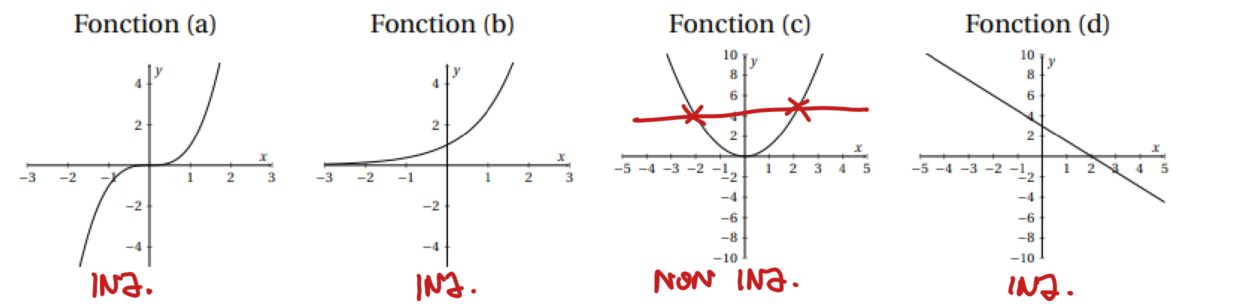
INJECTIVE



INJECTIVE



PAS INJECTIVE !

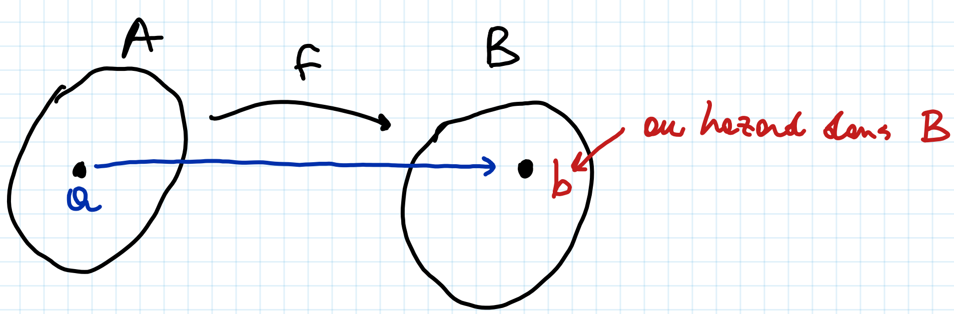


Déf. $f : A \to B$ est SURJECTIVE si

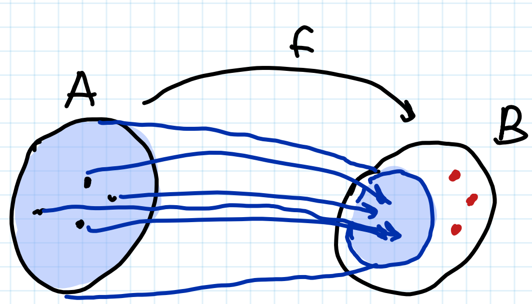
$$\forall b \in B \quad \exists a \in A \quad \text{t.q.} \quad f(a) = b$$

c'est-à-dire : chaque élément de B est atteint via f par (au moins) un élément de A

f surj $\Rightarrow$ si $b \in B$ (au hasard), il exist toujours $a \in A$ t.q. $f(a) = b$



- Non-exemple



f n'est pas surjective, car les élém. "pts rouges" ne sont pas atteints.

Ex. 1 $f : \text{Villes françaises} \longrightarrow \text{Régions françaises}$

ville $\longmapsto$ région de la ville

$f(\text{Caen}) = \text{Normandie}$

f est surjective : pour chaque région il existe toujours une ville appartenant à la région

[Par contre, f n'est pas injective :
$f(\text{Caen}) = f(\text{Rouen}) = \text{Normandie}$ mais $\text{Caen} \neq \text{Rouen}$]

Ex. 2 $f : \text{étu Groupe 4 AES} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(\text{étu}) = \text{Âge étu}$

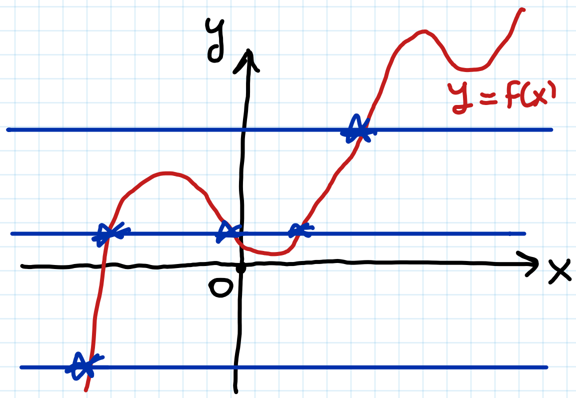
$100 \in \mathbb{R}$
$-2 \in \mathbb{R}$

f n'est pas surjective : il n'y a pas d'étu de 100 ans (ou "−2" ans) dans le groupe 4.

Pour les fonctions réels $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (ou f : intervel $\to$ intervel), on a une méthode graphique pour tester la surjectivité.

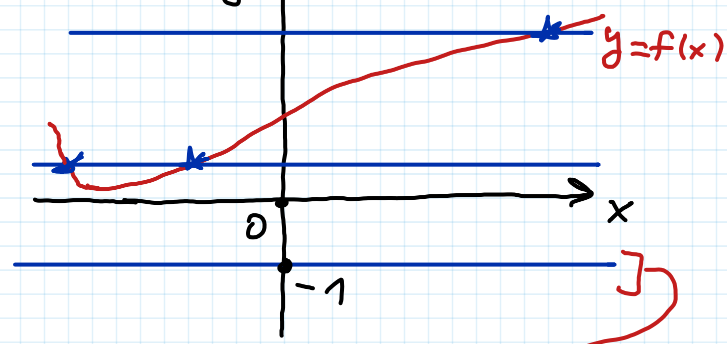
Il faut toujours spécifier le $\underbrace{\text{domain d'arrivé}}_{\text{codomaine}}$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



SURJECTIVE

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

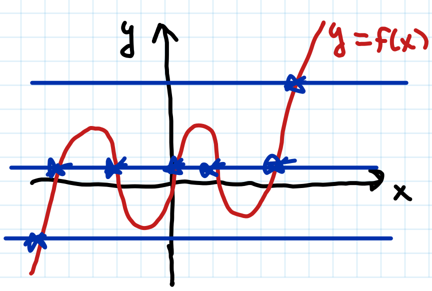


PAS SURJECTIVE

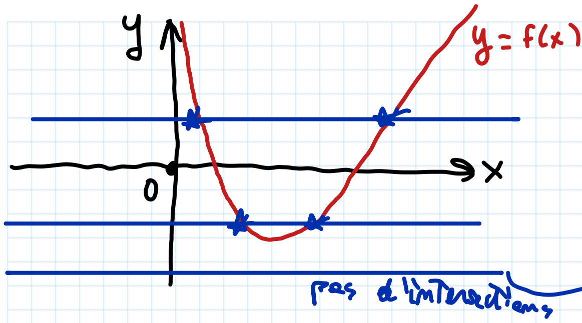
($y = -1$ n'est pas atteint)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est surjective $\iff$ Chaque droite horizontale rencontre le graphe de f en <u>AU MOINS</u> un point.

Card(droite horiz. $\cap$ graphe) ≥ 1

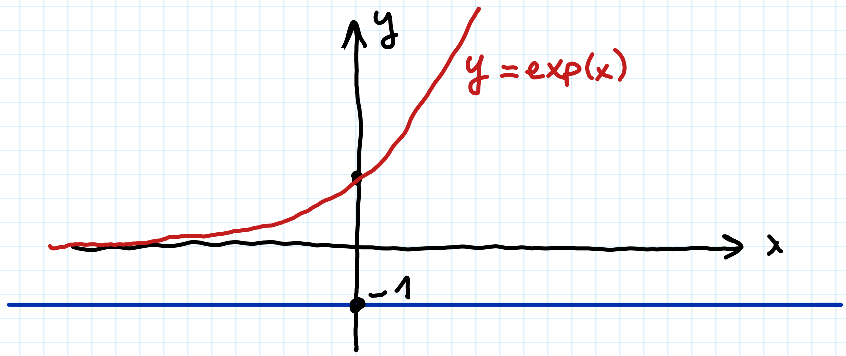


f(x) est SURJECTIVE



PAS SURJECTIVE si le codomaine est $\mathbb{R}$

La surjectivité dépends du CODOMAINE :

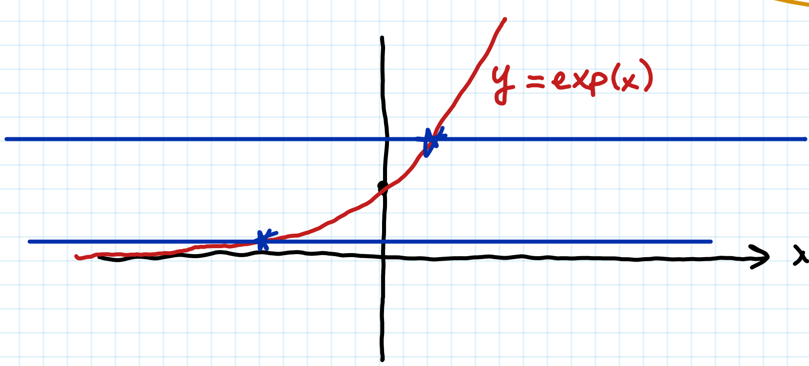


$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ N'EST PAS SURJECTIVE

$-1 \in \mathbb{R}$ et $\nexists x \in \mathbb{R}$ tq $\exp(x) = -1$

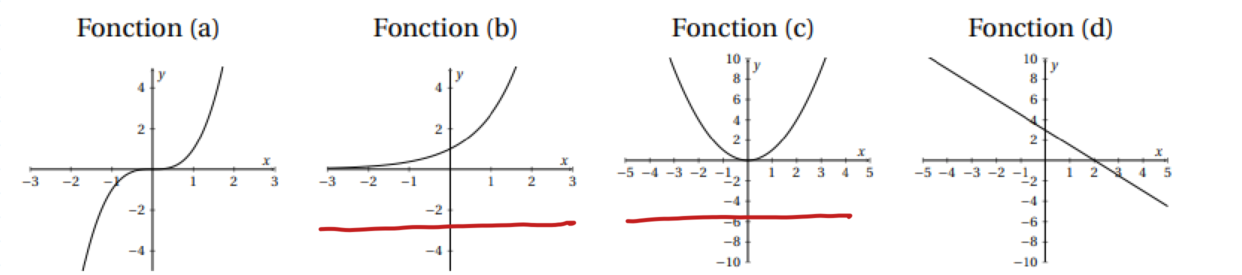
Mais $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ EST SURJECTIVE

$\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$



Maintenant je considère uniquement les droites horizontales de hauteur > 0

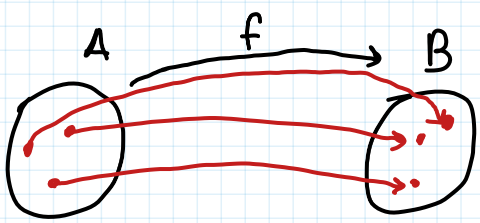
Donc, il faut vraiment préciser le codomain (domain d'arrivé).



Fonction (a)	Fonction (b)	Fonction (c)	Fonction (d)
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
SURJ.	PAS SURJ.	PAS SURJ.	SURJ.
	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$	
	SURJ	SURJ	

Déf. Une fonction $f : A \to B$ est BIJECTIVE si elle est

INJECTIVE + SURJECTIVE



Pour chaque $b \in B$ $\overbrace{\text{il existe}}^{\text{SURJ}}$ $\overbrace{\text{un UNIQUE}}^{\text{INJ.}}$ $a \in A$

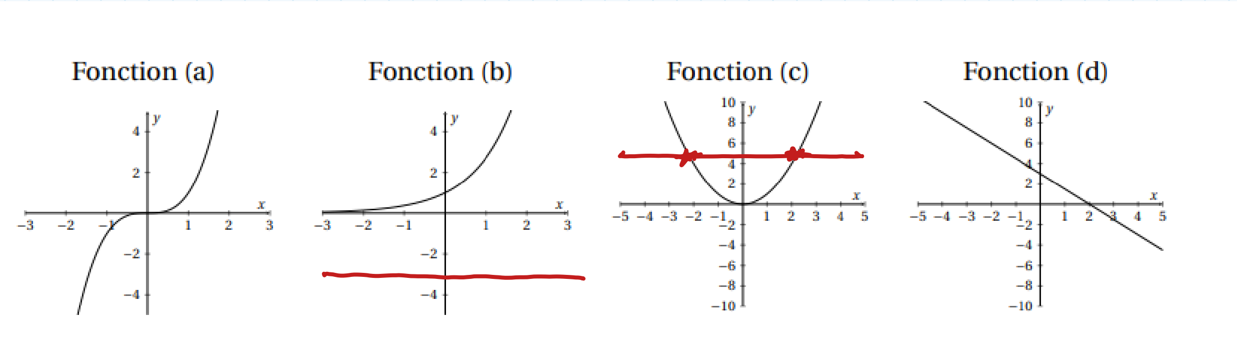
t.q. $f(a) = b$

Graphiquement (pour les fonctions réels)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est BIJECTIVE $\Longleftrightarrow$ Chaque droite horizontale rencontre le graphe de f en EXACTEMENT un point.

$$\text{Card}(\text{droite horiz.} \cap \text{graphe}) = 1$$

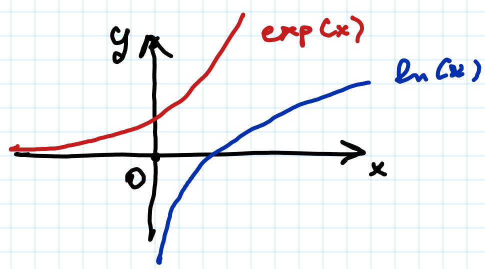
SURJ: ≥ 1, INJ: ≤ 1 $\Rightarrow$ SURJ et INJ: $= 1$



Fonction (a)	Fonction (b)	Fonction (c)	Fonction (d)
BIJ.	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ PAS BIJ. (PAS SURJ.) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ BIJ	PAS BIJ. (PAS INJ.)	BIJ.

<u>Ex.</u> $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ BIJECTIVE

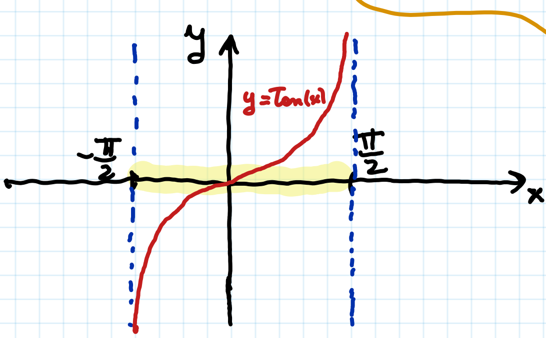
$\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ BIJECTIVE



<u>Ex.</u> $f(x) = \text{Tan}(x)$

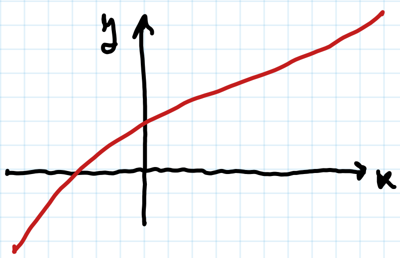
$f : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$

Domaine

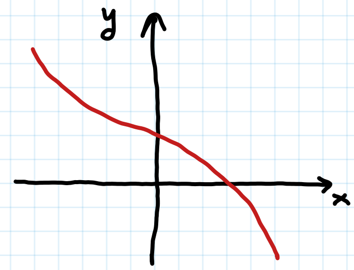


BIJECTIVE !

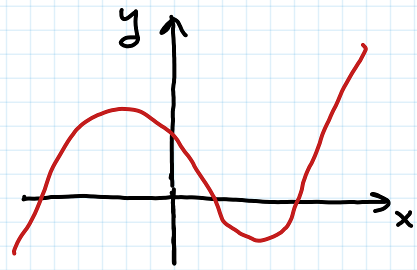
"**Déf.**" MONOTONE = CROISSANTE OU DÉCROISSANTE



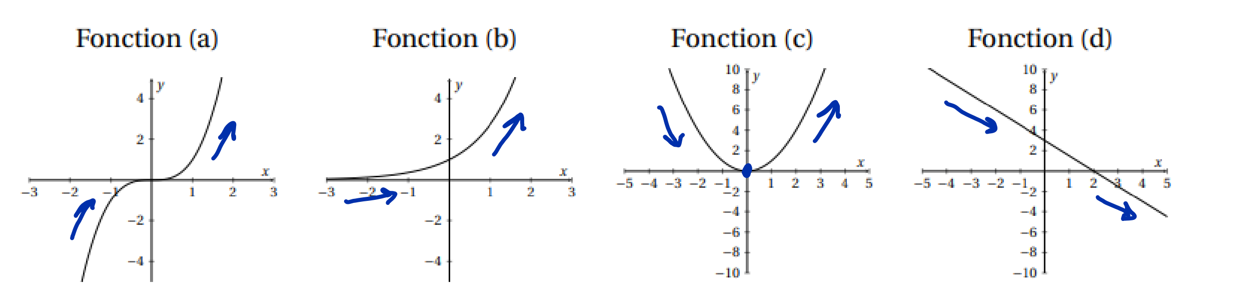
Croiss. => MONOTONE



Décroiss. => MONOTONE



PAS MONOTONE



MONOTONE (Croissante)

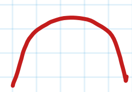
MONOTONE (Croissante)

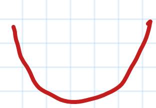
PAS MONOTONE

Croissante en $[0,+\infty[$
Décroissante en $]-\infty,0]$

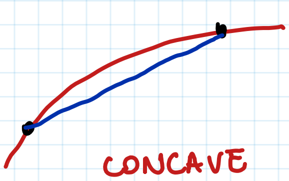
MONOTONE (Décroissante)

" "**Déf.**" "

CONCAVE = 

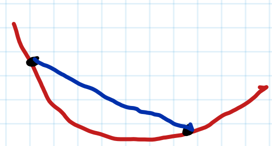
CONVEXE = 

Plus précisément (mais quand-même, pas trop ...)



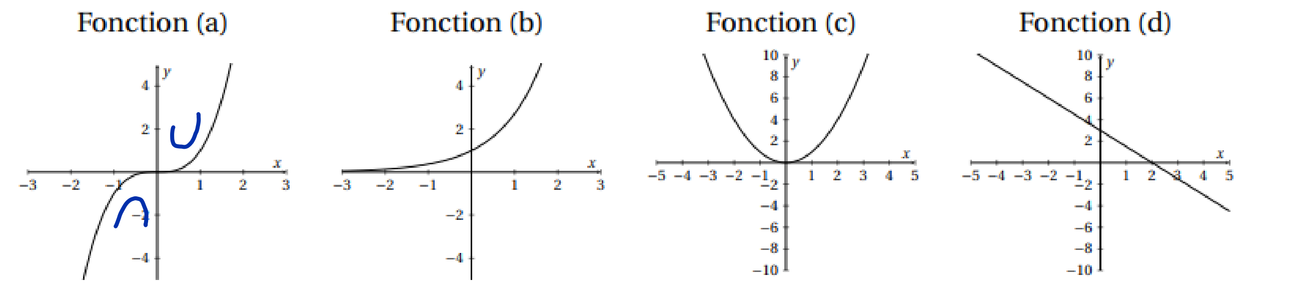
CONCAVE

La ligne bleue se situe SOUS le graphe de la fonc.



CONVEXE

La ligne bleue se situe AU-DESSUS du graphe de la fonc.



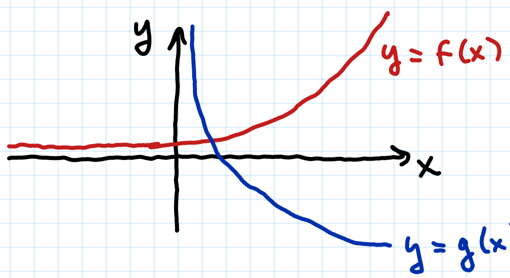
CONCAVE sur $]-\infty, 0[$
CONVEXE sur $]0, +\infty[$

CONVEXE

CONVEXE

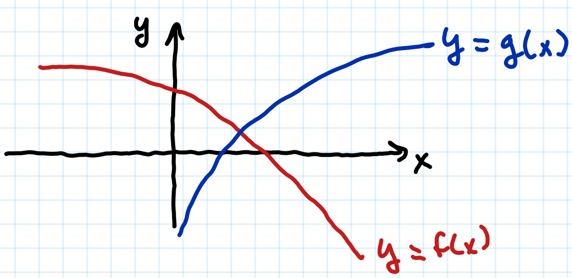
LINÉAIRE

Note. La concavité n'a rien à voir avec la monotonie :



f est CONVEXE CROISSANTE

g est CONVEXE DÉCROISSANTE



f est CONCAVE DÉCROISSANTE

g est CONCAVE CROISSANTE

1.2 Fonction de demande et fonction de demande inverse

On s'intéresse à la demande pour un bien. On note p le prix du bien et Q la quantité demandée. On suppose que la demande pour le bien ne dépend que du prix p du bien et on se donne la fonction de demande $f(p) = 4 - \frac{1}{2}p$. Cette fonction exprime la demande en fonction du prix.

1. Quel est le type de la fonction de demande et quels peuvent être le domaine de définition et le co-domaine de la fonction (compte tenu des variables économiques considérées) ? Quelles sont les propriétés de cette fonction (compte tenu de son type) ?

Type : AFFINE

La demande Q doit être ≥ 0

Donc $f(p) \geq 0$

$$\Updownarrow$$

$$4 - \frac{1}{2}p \geq 0 \iff 4 \geq \frac{1}{2}p \iff p \leq 8$$

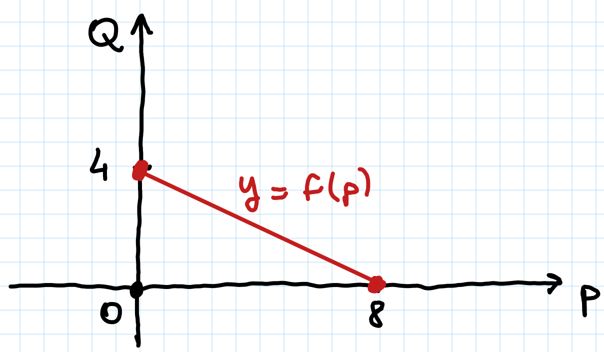
Ensuite, puisque p est le prix, on doit avoir $p \geq 0$

$$\implies \quad 0 \leq p \leq 8$$

Le domaine est $[0, 8]$.

Le codomaine est $\mathbb{R}_+$.

Graphe :



$f(0) = 4$

$f(8) = 4 - \frac{8}{2} = 4 - 4 = 0$