TD L1 BST (Groupe 3) - 06/11/25

Calcul d'intégrales : CHANGEMENT de VARIABLE

Introduction

$$\int (x+1)^2\,dx = \int (x^2+2x+1)\,dx$$

$$= \int x^2\,dx + 2\int x\,dx + \int 1\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + x^2 + x + C$$

normalem., pour nous $C=0$ ou C quelconque

Je vais choisir $C = 1/3$

$$= \frac{x^3}{3} + x^2 + x + \underbrace{\frac{1}{3} + C'}_{C = 1/3 + C'}$$

$$= \frac{1}{3}\left(x^3 + 3x^2 + 3x + 1\right) + C'$$

$$= \frac{1}{3}(x+1)^3 + C'$$

$$(x+1)^3 = (x+1)^2(x+1)$$
$$= (x^2+2x+1)(x+1)$$
$$= x^3 + 2x^2 + x + x^2 + 2x + 1$$
$$= x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$\Rightarrow \int (x+1)^2\,dx = \frac{(x+1)^3}{3} \cancel{+C}$$

" Comme si, en posant $y = x+1$, on calculait $\int y^2\,dy = \frac{y^3}{3}$ "

Le terme dx dans l'intégral s'appel

« ÉLÉMENT DIFFERENTIEL (de x) »

Si $f(x)$ est une fonction dérivable, on pose

$$\underbrace{df}_{\text{él. diff. de } f} = f'(x) \underbrace{dx}_{\text{él. diff. de } x}$$

[df est aussi dit le « DIFFERENTIEL » de f]

Formule du changement de variable

Si $x = g(t)$ est une fonction dérivable, on a

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))\, g'(t)\,dt$$

Idée : on part de la formule

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$\int (f(g(x)))'\,dx = \int f'(g(x)) \cdot \underbrace{g'(x)\,dx}_{dy}$$

Changement de variable $y = g(x)$, alors $dy = g'(x)dx$

et on trouve

$$\int f'(g(x))\, g'(x)\, dx = \int f'(y)\, dy = f(y)$$

et en effet

$$\int \left(f(g(x))\right)' dx = f(\underbrace{g(x)}_{y}) = f(y) .$$

Ex. $\int (x+1)^2\, dx$

$y = x+1 \qquad (y = y(x) = x+1)$

$y' = 1$

$dy = y'(x)\, dx = 1 \cdot dx = dx$

$$\int (\underbrace{x+1}_{y})^2 \underbrace{dx}_{dy} = \int y^2\, dy = \frac{y^3}{3} \overset{y = x+1}{=} \frac{(x+1)^3}{3}$$

Stratégie :

- Remplacer $y =$ " quelque chose dans l'intégral difficile à gérer "
- Calculer l'él. diff. $dy = y'(x)\, dx$
- Calculer l'intégral " en y "
- Retourner à la variable x

Ex. 1) $\int e^{2x+3}\, dx$

$$y = 2x+3$$
$$y' \;(= y'(x)) = 2$$
$$dy = 2\, dx$$
$$dy = y'(x)\, dx$$

$$\int e^{2x+3}\, dx = \int e^{y}\, \tfrac{1}{2}\, dy = \tfrac{1}{2}\int e^{y}\, dy$$

$$dy = 2\, dx$$
$$\Rightarrow dx = \tfrac{1}{2}\, dy$$

$$= \tfrac{1}{2} e^{y}$$

$$y = 2x+3$$

$$= \tfrac{1}{2} e^{2x+3}$$

2) $\int \sin(2x)\, dx$

$$y = 2x$$
$$y' = 2$$
$$dy = 2\, dx$$
$$dx = \tfrac{1}{2}\, dy$$

$$\int \sin(2x)\, dx = \int \sin(y)\, \tfrac{1}{2}\, dy$$
$$= \tfrac{1}{2}(-\cos(y)) = -\tfrac{1}{2}\cos(2x)$$

3) $\int \frac{1}{3-x}\,dx$

$y = 3-x$

$y' = -1$

$dy = -dx$

$\Rightarrow dx = -dy$

$$\int \frac{1}{3-x}\,dx = \int \frac{1}{y}(-dy) = -\int \frac{1}{y}\,dy$$

$$= -\ln(|y|)$$

$$= -\ln(|3-x|)$$

4) $\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$

$y = x^2+1$

$y' = 2x$

$dy = 2x\,dx$

$\Rightarrow dx = \frac{1}{2x}\,dy$

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \int \frac{\cancel{x}}{y}\,\frac{1}{2\cancel{x}}\,dy = \int \frac{1}{y}\cdot\frac{1}{2}\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{y}\,dy = \frac{1}{2}\ln(|y|) = \frac{1}{2}\ln(|x^2+1|)$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

parce que $x^2+1>0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

5) $\int 2x\, e^{-x^2} dx$

$y = -x^2$

$y' = -2x$

$dy = -2x\, dx$

$\Rightarrow dx = -\frac{1}{2x} dy$

$= \int \cancel{2x}\, e^{y} \left(-\frac{1}{\cancel{2x}}\right) dy = \int e^{y} \cdot (-dy) = -\int e^{y} dy = -e^{y}$

$= -e^{-x^2}.$

5') Mais aussi : $\int 2x\, e^{-x^2} dx$

$y = e^{-x^2}$

$y' = -2x\, e^{-x^2}$ [Rappel : $\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)\, e^{u(x)}$]

$dy = -2x\, e^{-x^2} dx$

$\Rightarrow 2x\, e^{-x^2} dx = -dy$

$\rightsquigarrow \int 2x\, e^{-x^2} dx = \int (-dy) = -\int dy = -y$

$= -e^{-x^2}.$

6) $\displaystyle\int (\cos(x))^7 \sin(x)\, dx$

$$\xi = \cos(x)$$

$$\xi' = -\sin(x)$$

$$d\xi = -\sin(x)\, dx$$

$$\int (\underbrace{\cos(x)}_{\xi})^7 \underbrace{\sin(x)\,dx}_{-d\xi} = \int \xi^7 (-d\xi)$$

$$= -\int \xi^7\, d\xi$$

$$= -\frac{\xi^8}{8}$$

$$= -\frac{(\cos(x))^8}{8}$$

Rappel:

$$\int \smiley^{\alpha}\, d\smiley = \frac{\smiley^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad \alpha \neq -1$$

$$\int e^{\text{🧍}}\, d\text{🧍} = e^{\text{🧍}}$$

Exercice 33. A l'aide d'un changement de variable approprié, calculer les primitives suivantes, en précisant les intervalles où ce calcul est valable :

a. $\displaystyle\int \frac{1}{2x+3}dx$ c. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$ e. $\displaystyle\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$ g. $\displaystyle\int xe^{x^2}\,dx$ i. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^3}$

b. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}dx$ d. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt{2+\cos(x)}}dx$ f. $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x}dx$ h. $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{(1+\sin x)^4}dx$ j. $\displaystyle\int \tan(x)dx$

Ind. Pour f. poser $y = \ln(x)$

Pour j. rappel $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Solutions : voir le fichier du GROUPE 1 (même jour)