TD L1 BST (Groupe 1) – 13/11/25

- Partie 0 : RAPPELS

1) Soit $a \in \mathbb{R}$ une constante. Alors

$$\int \frac{1}{x-a}\,dx \underset{\substack{y = x-a \\ y' = 1 \\ dy = y'dx = dx}}{=} \int \frac{1}{y}\,dy = \ln|y| = \ln|x-a| .$$

2) $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$

$$\left[\begin{array}{l} \underset{a\neq 0}{ax^2+bx+c} \quad \text{avec} \quad \Delta = b^2 - 4ac \geq 0 \\ \alpha_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \,, \quad \alpha_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ \Rightarrow \quad ax^2+bx+c = a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \end{array}\right.$$

Pour x^2-3x+2, on a $\Delta = 3^2 - 4\cdot 2 = 9 - 8 = 1$

et $\alpha_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{1}}{2} \begin{cases} \frac{4}{2} = 2 \\ \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow 1 \cdot x^2 - 3x + 2 = 1 \cdot (x-1)(x-2)$

3) $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$

<u>Ex.</u> $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$

$4x^2 - 1 = (2x-1)(2x+1)$

- **Partie 1 : Changement de variable dans les intégrales DÉFINIES**

On a vu $\int f(g(x))\, g'(x)\,dx \underset{\uparrow \; y=g(x)}{=} \int f(y)\,\underbrace{dy}_{dy = g'(x)dx}$

Rappel : si F est une primitive de f, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_2^3 \frac{1}{x-1}\,dx = \Big[\underset{\uparrow \text{ « Partie 0 »}}{\ln|x-1|}\Big]_2^3 = \ln|3-1| - \ln|2-1|$$
$$= \ln 2 - \underbrace{\ln 1}_{=0} = \ln 2.$$

Plus vite :

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy$$

« ce n'est pas nécessaire de retourner à la variable x »

C'est-à-dire : en posant $y = g(x)$ ($\leadsto dy = g'(x)\,dx$)

si $x = a$, alors $y = g(a)$

si $x = b$, alors $y = g(b)$

$$\int_2^3 \frac{1}{x-1}\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ y = x-1 \\ dy = dx}}{=} \int_{1 \,\leftarrow\, x=2 \Rightarrow y=1}^{2 \,\leftarrow\, x=3 \Rightarrow y=2} \frac{1}{y}\,dy = \big[\ln|y|\big]_1^2 = \ln 2 - \underbrace{\ln 1}_{=0} = \ln 2.$$

- Rappel (méthode STANDARD) : pour calculer $\int_a^b f(x)\,dx$

on calcule $\int f(x)dx = F(x)$ (primitive) et après :

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Exercice 37. Soient $b > 0$ et $h > 0$ deux constantes. Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^h b^2 \left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 dx.$$

On pourra utiliser le changement de variable $u = 1 - \frac{x}{h}$.

Devoir Maison !

Indications : 1) Si vous allez calculer I en utilisant la formule du changement de variable dans l'intégral DÉFINIE, rappelez que $\int_a^b f(x)\,dx$ est défini même pour $b < a$.

2) b et h sont constantes :

N'AYEZ PAS PEUR DES LETTRES !

$u' = \left(1 - \frac{x}{h}\right)' = (1)' - \left(\frac{x}{h}\right)' = -\frac{1}{h}(x)' = -\frac{1}{h}$

Sol. : Voir le fichier du Groupe 3 du même jour.

Réponse : $I = \dfrac{b^2 h}{3}$.

• Partie 2 : Intégration des fractions rationnelles

Ex. 1 Calculer $\displaystyle\int \frac{2}{x^2-1}\,dx$.

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{1\cdot(x+1) - 1\cdot(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+1-x+1}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{2}{x^2-1}$$

$$\Rightarrow \int \frac{2}{x^2-1}\,dx = \int\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= \int \frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= \ln|x-1| - \ln|x+1|$$

$$\left(= \ln\frac{|x-1|}{|x+1|} = \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right).$$

⊛ Rappel :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \longleftrightarrow \frac{a(x)}{b(x)} + \frac{c(x)}{d(x)} = \frac{a(x)\,d(x) + b(x)\,c(x)}{b(x)\,d(x)}$$

nombres   polynômes

Ex. 2 $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-3x+2}\,dx$

On a déjà vu que $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

L'idée est de trouver deux constantes $a,b\in\mathbb{R}$ telles que

$$\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-2}$$

c'est-à-dire a,b ne dépendent pas de x

Comment trouver a et b ?

Notons que

$$\underbrace{\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-2}}_{\frac{1}{(x-1)(x-2)}}=\frac{a(x-2)+b(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

$$=\frac{ax-2a+bx-b}{(x-1)(x-2)}$$

$$=\frac{(a+b)x-2a-b}{(x-1)(x-2)}$$

Donc on cherche $a,b\in\mathbb{R}$ t.q.

$$\underbrace{(a+b)}_{=0}x\underbrace{-2a-b}_{=1}=1$$

On obtient un système linéaire

$$\begin{cases} a+b=0\\ -2a-b=1\end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} a+b=0 \\ -2a-b=1 \end{cases} \iff \begin{cases} a=-b \\ \underbrace{-2(-b)}_{2b}-b=1 \end{cases} \iff \begin{cases} a=-b=-1 \\ b=1 \end{cases}$$

Donc $a=-1$, $b=1$ et on a

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{x^2-3x+2}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,dx = \int \frac{1}{x-2}\,dx - \int \frac{1}{x-1}\,dx$$

$$= \ln|x-2| - \ln|x-1|$$

$$\left(= \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| \right).$$

IMPORTANT !

Les constantes ne dependent pas de x :

Si par exemple on veut trouver $a,b,c \in \mathbb{R}$ const. telles que

$$a\,x^2 + (a+b)\,x + c+a = 2x^2 + 3x + 2 \,,$$ alors

il faut poser $\begin{cases} a = 2 \\ a+b = 3 \\ c+a = 1 \end{cases} \left(\iff \begin{cases} a = 2 \\ b = 3-a = 1 \\ c = 1-a = -1 \end{cases} \right).$

Exercices

1) Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ t.q. $\dfrac{x}{x^2-5x+6} = \dfrac{a}{x-2} + \dfrac{b}{x-3}$

et calculer $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-5x+6}\,dx$.

2) Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ t.q. $\dfrac{x}{(x-1)(x-2)^2} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x-2} + \dfrac{c}{(x-2)^2}$

et calculer $\displaystyle\int \frac{x}{(x-1)(x-2)^2}\,dx$. [Note: $\displaystyle\int \frac{1}{(x-2)^2}\,dx \overset{y=x-2}{=} \int \frac{1}{y^2}\,dy = \int y^{-2}\,dy = -\frac{1}{y} = -\frac{1}{x-2}$]

Sol.

1) $$\frac{a}{x-2} + \frac{b}{x-3} = \frac{a(x-3)+b(x-2)}{(x-2)(x-3)}$$

$$= \frac{(a+b)x - 3a - 2b}{(x-2)(x-3)} \;\;!\;\; \frac{\overset{1\cdot x + 0}{\downarrow}}{} \frac{x}{(x-2)(x-3)}$$

$$\begin{cases} a+b = 1 \\ -3a-2b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b = 1 \\ -3a-2b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 1-a \\ -3a-2(1-a) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 1-a \\ -a-2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = -2 \\ b = 1-a = 1-(-2) = 3 \end{cases}$$

Donc

$$\int \frac{x}{(x-2)(x-3)}\,dx = \int \left(\frac{-2}{x-2} + \frac{3}{x-3} \right) dx = -2\int \frac{1}{x-2}\,dx + 3\int \frac{1}{x-3}\,dx$$

$$= -2 \ln|x-2| + 3 \ln|x-3|.$$

Exo. (Devoir maison) Même exercice mais avec

$$\frac{2x+3}{(x-2)(x-3)}$$

Solution (POST TD)

Dans ce cas, on a

$$\frac{(a+b)x - 3a - 2b}{(x-2)(x-3)} = \frac{2x+3}{(x-2)(x-3)}$$

Donc $\begin{cases} a+b = 2 \\ -3a-2b = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2-b \\ -3(2-b)-2b = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2-b \\ -6+b = 3 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} b = 9 \\ a = 2-b = -7 \end{cases}$$

et donc $\displaystyle\int \frac{2x+3}{(x-2)(x-3)}\,dx = \int \left(\frac{-7}{x-2} + \frac{9}{x-3} \right) dx$

$$= -7 \ln|x-2| + 9 \ln|x-3|.$$

2) $$\frac{x}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{a}{x-1} + \underbrace{\frac{b}{x-2} + \frac{c}{(x-2)^2}}$$

$$\frac{b}{(x-2)} + \frac{c}{(x-2)^2} = \frac{b\,(x-2)}{(x-2)(x-2)} + \frac{c}{(x-2)^2} = \frac{b(x-2)+c}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{a(x-2)^2 + b(x-1)(x-2) + c(x-1)}{(x-1)(x-2)^2}$$

$$= \frac{a(x^2-4x+4) + b(x^2-3x+2) + cx - c}{(x-1)(x-2)^2}$$

$$ax^2 - 4ax + 4a + bx^2 - 3bx + 2b + cx - c$$

$$(a+b)\,x^2 + (-4a - 3b + c)\,x + 4a + 2b - c$$

On veut

$$(a+b)\,x^2 + (-4a-3b+c)\,x + 4a+2b-c \;-\; \cancel{x}$$
$$= 0\cdot x^2 + 1\cdot x + 0$$

Donc

$$\begin{cases} a+b = 0 \\ -4a-3b+c = 1 \\ 4a+2b-c = 0 \end{cases}$$

Après résolution [voir les détails dans le fichier du Groupe 3]

on trouve : $a = 1$, $b = -1$, $c = 2$.

(il y a une erreur dans le fichier du cours, où il est écrit $c = 1$)

[↓ POST TD]

Donc $\dfrac{x}{(x-1)(x-2)^2} = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{2}{(x-2)^2}$ et alors

$$\int \frac{x}{(x-1)(x-2)^2}\,dx = \int \frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{1}{x-2}\,dx + 2 \underbrace{\int \frac{1}{(x-2)^2}\,dx}$$

$$= \ln|x-1| - \ln|x-2| - \frac{2}{x-2}.$$

$$\int \frac{1}{(x-2)^2}\,dx \underset{\substack{y = x-2 \\ y' = 1 \\ dy = dx}}{=} \int \frac{1}{y^2}\,dy = \int y^{-2}\,dy \underset{\substack{\alpha = -2 \\ ☺ = y}}{=} \frac{y^{-2+1}}{-2+1} = -y^{-1} = -\frac{1}{y} = -\frac{1}{x-2}.$$

$$\int ☺^{\alpha}\,d☺ = \frac{☺^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad \text{pour } \alpha \neq -1$$