TD L1 BST (Groupe 3) – 13/11/25

- **Partie 0 : Rappels**

Soit $a \in \mathbb{R}$ constant, alors

$$\int \frac{1}{x-a}\,dx \underset{\substack{y = x-a \\ y' = 1}}{=} \int \frac{1}{y}\,dy = \ln(|y|) = \ln(|x-a|).$$

$dy = y'\,dx = dx$

- **Partie 1 : Changement de variable pour un intégral définie**

On a vu $$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx \underset{y = g(x)}{=} \int f(y)\,dy$$

$a<b$ réels : comment calculer

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx \quad ?$$

Rappel : F primitive de f, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{F(b) - F(a)}_{[F]_a^b}$$

Donc on peut calculer $\int f(y)\,dy$, retourner à la variable x et appliquer la formule [STANDARD]

Autrement,

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{\boxed{g(a)}}^{\boxed{g(b)}} f(y)\,dy$$

Si $y = g(x)$, alors pour $x = a$ on a $y = g(a)$; si $x = b$, $y = g(b)$

Exercice 37. Soient $b > 0$ et $h > 0$ deux constantes. Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^h b^2 \left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 dx.$$

On pourra utiliser le changement de variable $u = 1 - \frac{x}{h}$.

Sol.

Deux méthodes : 1 STANDARD

$$\int b^2 \left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 dx \qquad u = u(x) = 1 - \frac{x}{h}$$

$$u' = \left(1 - \frac{x}{h}\right)' = \left(-\frac{x}{h}\right)' = -\frac{1}{h}(x)' = -\frac{1}{h}$$

$$du = u'(x)\,dx = -\frac{1}{h}\,dx$$

$$\Rightarrow dx = (-h)\,du$$

$$\int b^2 \left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 dx = \int \underbrace{b^2}_{\text{constantes}} u^2 \underbrace{(-h)}_{} du$$

$$= -h b^2 \int u^2\,du$$

$$= -h b^2 \frac{u^3}{3} = -\frac{h b^2}{3}\left(1 - \frac{x}{h}\right)^3$$

et donc

$$\int_0^h b^2 \left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 dx = \left[-\frac{hb^2}{3}\left(1 - \frac{x}{h}\right)^3\right]_0^h = 0 - \left(-\frac{hb^2}{3} \cdot 1\right) = \frac{hb^2}{3}$$

si $x = h$, alors $-\frac{hb^2}{3}\left(1 - \cancel{\frac{h}{h}}\right)^3 = -\frac{hb^2}{3} \cdot 0 = 0$

si $x = 0$, alors $-\frac{hb^2}{3}\left(1 - \frac{0}{h}\right)^3 = -\frac{hb^2}{3} \cdot 1^3 = -\frac{hb^2}{3}$

② Formule

$$\int_0^h b^2\left(1-\frac{x}{h}\right)^2 dx \underset{u=1-\frac{x}{h}}{=} \int_1^0 b^2\, u^2\, (-h)\, du$$

$x=0 \Rightarrow u=1$

$x=h \Rightarrow u=0$

$u=1-\frac{h}{h}=1-1=0$

$$= -hb^2\int_1^0 u^2\, du = -hb^2\left[\frac{u^3}{3}\right]_1^0$$

$$= -hb^2\Big(\cancel{\frac{0^3}{3}} - \underbrace{\frac{1^3}{3}}_{-1/3}\Big) = \frac{hb^2}{3}.$$

- **Partie 2 : Intégration des fractions rationelles**

Question : comment calculer $\displaystyle\int \frac{2}{x^2-1}\,dx$?

Idée : $\displaystyle\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{(x+1)-(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2}{x^2-1}$

Donc

$$\int \frac{2}{x^2-1}\,dx = \int\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \int \frac{1}{x-1}\,dx - \int\frac{1}{x+1}\,dx$$

"Partie 0" $\displaystyle = \ln|x-1| - \ln|x+1|$

Pas necessaire $\displaystyle\left(= \ln\frac{|x-1|}{|x+1|} = \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right).$

Ex. 1 $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-3x+2}\,dx$

Rappel : ax^2+bx+c avec $\Delta = b^2-4ac \geq 0$

$$\alpha_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad \alpha_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ alors :}$$

$$\boxed{ax^2+bx+c = a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)}$$

$x^2-3x+2 \longrightarrow$ $\Delta = 3^2 - 4\cdot 2\cdot 1 = 9-8 = 1$

$$\alpha_{1,2} = \frac{3\pm 1}{2} \begin{cases} 4/2 = 2 \\ 2/2 = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad x^2-3x+2 = 1\cdot(x-1)(x-2).$

Idée : $$\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}$$

pour $a, b \in \mathbb{R}$ constantes.

$\rightarrow$ Il faut TROUVER a et b !

$$\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} = \frac{a(x-2) + b(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{ax - 2a + bx - b}{x^2 - 3x + 2}$$

$$= \frac{(a+b)x - 2a - b}{x^2 - 3x + 2}$$

$\Rightarrow \quad (a+b)\,x - 2a - b = 1$

Ça doit être vrai pour tout x ! a, b constantes (ne dependent pas de x)

$$\underbrace{(a+b)}_{=0}\,x \; \underbrace{-\;2a - b}_{=1} = 1$$

$$\begin{cases} a+b=0 \\ -2a-b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-a \\ \underbrace{-2a-(-a)}_{-2a+a=-a}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-a \\ -a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=-1 \end{cases}$$

Donc
$$\frac{1}{x^2-3x+2} = -\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$$

et alors

$$\int \frac{1}{x^2-3x+2}\,dx = \int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}\right) dx$$

$$= \int \frac{1}{x-2}\,dx - \int \frac{1}{x-1}\,dx$$

$$= \ln|x-2| - \ln|x-1|$$

$$\left(= \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| \right).$$

Ex. 2 $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx$

$$x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$$

$$\frac{x}{(x-1)(x-2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} = \frac{a(x-2)+b(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

$$= \frac{ax-2a+bx-b}{(x-1)(x-2)} = \frac{(a+b)x-2a-b}{(x-1)(x-2)}$$

$$(a+b)x \; -2a-b = x = 1\cdot x + 0$$

$$\begin{cases} a+b=1 \\ -2a-b=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a+b=1 \\ b=-2a \end{cases} \longrightarrow \begin{aligned} a+(-2a) &= 1 \\ -a &= 1 \\ a &= -1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad b = -2a = (-2)(-1) = 2.$$

$$\frac{x}{x^2-3x+2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} = -\underbrace{\frac{1}{x-1}}_{}\!\!{}^{a=-1} + \frac{2}{x-2}{}^{\,b=2}$$

et donc :

$$\int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx = \int\left(-\frac{1}{x-1}\right)dx + \int\frac{2}{x-2}\,dx = -\int\frac{1}{x-1}\,dx + 2\int\frac{1}{x-2}\,dx$$

$$= -\ln|x-1| + 2\ln|x-2|.$$

IMPORTANT !

Les constantes ne dependent pas de x :

Si par exemple on veut trouver $a,b,c \in \mathbb{R}$ const. telles que

$$a\,x^2 + (a+b)\,x + c+a = 2\,x^2 + 3\,x + 2 \,, \quad \text{alors}$$

il faut poser $\begin{cases} a = 2 \\ a+b = 3 \\ c+a = 1 \end{cases}$ $\left(\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3-a = 1 \\ c = 1-a = -1 \end{cases} \right)$.

Ex. 3 Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ (constantes) telles que:

$$\frac{x}{(x-2)(x^2-3x+2)} = \frac{a}{(x-1)} + \frac{b}{(x-2)} + \frac{c}{(x-2)^2}$$

et calculer $\displaystyle\int \frac{x}{(x-2)(x^2-3x+2)}\,dx$.

Sol.

$x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$ (déjà vu)

$\Rightarrow \quad (x-2)(x^2-3x+2) = (x-2)^2(x-1)$

$$\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-2}+\frac{c}{(x-2)^2} = \frac{a}{x-1}+\frac{b(x-2)}{(x-2)^2}+\frac{c}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{a}{x-1}+\frac{b(x-2)+c}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{a(x-2)^2+(b(x-2)+c)(x-1)}{(x-1)(x-2)^2}$$

$$\text{NUMERATEUR} = a(x-2)^2+(b(x-2)+c)(x-1)$$

$$= a(x^2-4x+4)+b(x-2)(x-1)+c(x-1)$$

$$= ax^2-4ax+4a+b(x^2-3x+2)+cx-c$$

$$= a\underline{x^2}-4a\underline{x}+4a+b\underline{x^2}-3b\underline{x}+2b+c\underline{x}-c$$

$$= (a+b)\underline{x^2}+(-4a-3b+c)\underline{x}+4a+2b-c$$

Donc on a

$$\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-2}+\frac{c}{(x-2)^2} = \frac{(a+b)x^2+(-4a-3b+c)x+4a+2b-c}{(x-1)(x-2)^2}$$

doit être égal à

$$\frac{x}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{0\cdot x^2+1\cdot x+0}{(x-1)(x-2)^2}$$

$$\begin{cases} a+b=0 \\ -4a-3b+c=1 \\ 4a+2b-c=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=-b \\ -4(-b)-3b+c=1 \\ 4(-b)+2b-c=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a=-b \\ 4b-3b+c=1 \\ -4b+2b-c=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b+c=1 \\ -2b-c=0 \end{cases} \iff \begin{cases} b+c=1 \\ c=-2b \end{cases} \iff \begin{cases} c=-2b \\ \underbrace{b-2b=1}_{-b=1} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b=-1 \\ c=-2b=2 \end{cases}$$ et puisque on avait $a=-b$,

$$a=1$$

Donc $a=1$, $b=-1$ et $c=2$, c'est-à-dire

$$\frac{x}{(x-2)(x^2-3x+2)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2}$$

$$\int \frac{x}{(x-2)(x^2-3x+2)}\,dx = \int \frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{1}{x-2}\,dx + 2\underbrace{\int \frac{1}{(x-2)^2}\,dx}$$

$$= \ln|x-1| - \ln|x-2| - \frac{2}{x-2}.$$

$$\int \frac{1}{(x-2)^2}\,dx \underset{\substack{y=x-2\\ y'=1\\ dy=dx}}{=} \int \frac{1}{y^2}\,dy = \int y^{-2}\,dy \underset{\substack{\alpha=-2\\ \text{☺}=y}}{=} \frac{y^{-2+1}}{-2+1} = -y^{-1} = -\frac{1}{y} = -\frac{1}{x-2}.$$

$$\int \text{☺}^{\alpha}\,d\text{☺} = \frac{\text{☺}^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad \text{pour } \alpha \neq -1$$