TD L1 BST (Groupe 5) – 17/11/25

CHANGEMENT DE VARIABLE dans les INTÉGRALS

Rappel.
- $\int e^y\,dy = e^y$
- Si $☃ \neq -1$, alors $\int x^{☃}\,d☃ = \frac{x^{☃+1}}{☃+1}$
- $\int \frac{1}{☺}\,d☺ = \ln(|☺|)$

Intro. $\int e^{x+7}\,dx = \int e^x \cdot \underbrace{e^7}_{\text{constante}}\,dx = e^7 \int e^x dx = e^7 \cdot e^x = e^{x+7}$

c'est « comme si j'avais posé $y = x+7$ et j'avais calculé $\int e^y\,dy = e^y = e^{x+7}$ »

$y = x+7$

$$\int e^{x+7}\,dx = \int e^y\,dx$$

Déf Soit $f = f(x)$ une fonction dérivable. On appelle « ÉLÉMENT DIFFERENTIEL de f »

$$df = f'(x)\,dx$$

Ex Si $f(x) = x+7$, alors $f'(x) = 1$ et $df = \overbrace{f'(x)}^{1}\,dx = dx$

si $f(x) = x^2+2x$, alors $f'(x) = 2x+2$ et $df = (2x+2)\,dx$

Règle : changement de variable dans les intégrals

Si $y = y(x)$ (et en particulier $dy = y'(x)\,dx$),

on a

$$\int f(y)\,dy = \int f(y(x))\,y'(x)\,dx$$

Ex. 0 $f(x) = e^{x+7}$. On pose $y = x+7$.

Alors $y' = 1$ et donc $dy = y' \cdot dx = dx$

$$\Rightarrow \int e^{\overbrace{x+7}^{y}} \underbrace{dx}_{dy} = \int e^{y}\,dy = e^{y} = e^{x+7}$$

Ex. 1 $\int (x+3)^{10}\,dx$

$y = x+3 \Rightarrow y' = 1$

$\Rightarrow dy = 1 \cdot dx = dx$

$$\int (\overbrace{x+3}^{y})^{10} \underbrace{dx}_{dx = dy} = \int y^{10}\,dy \underset{\substack{\uparrow \\ ☺ = 10 \\ \text{dans le rappel}}}{=} \frac{y^{11}}{11} = \frac{(x+3)^{11}}{11}.$$

Ex. 2 $\int \frac{1}{2x+19}\,dx$

$u = 2x+19 \Rightarrow u' = 2$

$\Rightarrow du = 2\,dx$

$\Rightarrow dx = \frac{1}{2}\,du$

$$\int \frac{1}{2x+19}\,dx = \int \frac{1}{u}\,\frac{1}{2}\,du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du \underset{\substack{\uparrow \\ ☺ = u}}{=} \frac{1}{2}\ln(|u|) = \frac{1}{2}\ln(|2x+19|).$$

Ex. 3 $\int \frac{x}{x^2-2}\,dx$

$y = x^2-2 \Rightarrow y' = 2x$

$\Rightarrow dy = 2x \cdot dx$

$\Rightarrow dx = \frac{1}{2x}\,dy$

$$\int \frac{x}{x^2-2}\,dx = \int \frac{\cancel{x}}{y}\,\frac{1}{2\cancel{x}}\,dy = \frac{1}{2}\int \frac{1}{y}\,dy = \frac{1}{2}\ln(|y|) = \frac{1}{2}\ln(|x^2-2|).$$

Ex. 4 $\int \frac{x}{3}e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{3}\int x\,e^{-x^2}\,dx$

$z = -x^2$

$z' = -2x$

$dz = (-2x)\,dx$

$\Rightarrow dx = -\frac{1}{2x}\,dz$

$$= \frac{1}{3}\int \cancel{x}\,e^z\left(-\frac{1}{2\cancel{x}}\right)dz = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)\int e^z\,dz$$

$$= -\frac{1}{6}e^z = -\frac{1}{6}e^{-x^2}.$$

Ex. 5 $\int (\sin(x))^{12}\cos(x)\,dx$

$y = \sin(x)$

$y' = \cos(x)$

$dy = \cos(x)\,dx$

$$= \int y^{12}\,dy = \frac{y^{13}}{13} = \frac{(\sin(x))^{13}}{13}.$$

- Changement de variable dans les intégrals DÉFINIS

Rappel Si F est une primitive de f, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b)-F(a)$$

Règle

$$\int_a^b f(y(x))\,y'(x)\,dx = \int_{y(a)}^{y(b)} f(y)\,dy$$

$x=a \Rightarrow y=y(a)$

$x=b \Rightarrow y=y(b)$

Ex. 6 $$\int_0^{\sqrt{7}} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}\,dx$$

→ Méthode 1 : STANDARD

On calcule $F(x)=\int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}\,dx$ et après on calcule $\left[F(x)\right]_0^{\sqrt{7}}$

$y=x^2+1 \Rightarrow y'=2x \Rightarrow dy = 2x\,dx \Rightarrow x\,dx = \frac{1}{2}\,dy$

$$\int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt[3]{y}}\,\frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}\int y^{-\frac{1}{3}}\,dy \underset{\substack{\uparrow \\ \alpha=-\frac{1}{3} \\ \text{dans le rappel}}}{=} \frac{1}{2}\cdot\frac{y^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{y^{2/3}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}\,y^{2/3}$$

$$= \frac{3}{4}\sqrt[3]{y^2} = \frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2+1)^2}.$$

et donc

$$\int_0^{\sqrt7} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}\,dx = \left[\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2+1)^2}\right]_0^{\sqrt7} = \frac{3}{4}\sqrt[3]{(7+1)^2} - \frac{3}{4}\sqrt[3]{(0+1)^2}$$

$$= \frac{3}{4}\sqrt[3]{8^2} - \frac{3}{4}\sqrt[3]{1^2}$$

$$= \frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{8}\right)^2 - \frac{3}{4}$$

$$= \frac{3}{4}\,2^2 - \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left(2^2-1\right)$$

$$= \frac{3}{4}\cdot 3 = \frac{9}{4}.$$

→ Méthode 2 (changement de variable dans l'intégral DÉFINI)

(Plus rapide)

si $x=\sqrt7$, alors $y=(\sqrt7)^2+1 = 7+1 = 8$

$$\int_0^{\sqrt7} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}\,dx \underset{\substack{y=x^2+1\\ x\,dx=\frac{1}{2}dy}}{=} \int_1^8 \frac{1}{\sqrt[3]{y}}\,\frac{1}{2}\,dy$$

si $x=0$, alors $y=0^2+1=1$

$$= \frac{1}{2}\int_1^8 y^{-1/3}\,dy = \frac{1}{2}\left[\frac{y^{-1/3+1}}{-1/3+1}\right]_1^8$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{8^{2/3}}{2/3} - \frac{1^{2/3}}{2/3}\right) = \dots = \frac{9}{4}.$$

En utilisant la deuxième méthode, ce n'est pas necessaire de retourner à la variable x (il faut juste changer les extreme $0 \to 1$, $\sqrt7 \to 8$).

Exercice 33. A l'aide d'un changement de variable approprié, calculer les primitives suivantes, en précisant les intervalles où ce calcul est valable :

a. $\displaystyle\int \frac{1}{2x+3}dx$ c. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$ e. $\displaystyle\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$ g. $\displaystyle\int xe^{x^2}\,dx$ i. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^3}$

b. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}dx$ d. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt{2+\cos(x)}}dx$ f. $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x}dx$ h. $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{(1+\sin x)^4}dx$ j. $\displaystyle\int \tan(x)dx$

Ind. Pour f. poser $y = \ln(x)$

Pour j. rappel $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Sol. Voir le fichier du Groupe 1 du 06/11/25.